

1 次元粉体振動層の重心運動についての現象論

都城工業高等専門学校 若生 潤一¹

名古屋工業大学 大学院工学研究科 落合昭紀、磯部雅晴²

1 はじめに

粉体層に対して振動を加えると、内部に対流が生じる、表面にパターンや山が形成される、偏析が生じるなどの様々な特異な現象を示すことが知られている [1]。このような粉体振動層がどのような条件のもとで流動化するのか、というのはこの系に関する基礎的な問題のひとつであるといえる。Luding 達 [2] は 1 次元粉体振動層について、Event-Driven (ED) MD シミュレーションを用いてこの問題を詳細に調べた。彼らは振動層の流動化転移を特徴付ける巨視的な物理量として振動層の重心の高さに着目し、流動化転移が生じる条件を数値的に明らかにした。この流動化転移の理論的な説明としては、無重力下での 1 次元粉体層の壁への衝突に関する解析的な結果 [3] との類似点が指摘されているのみである。

振動層の状態を特徴付ける物理量としては、重心の高さ以外にも運動エネルギー、粉体温度、粒子列の幅などの様々な巨視的な物理量が考えられるが、これらの量の性質や相互関係を明らかにすることは、流動化転移を理解するうえでも重要である。粉体振動層の流動状態における重心の高さや運動エネルギーについては、これまでに実験、数値シミュレーション、運動論あるいは流体力学に基づく理論による研究がなされてきているが [4]、ある程度重心の高さが低い場合には、各研究の結果が一致しないことが明らかにされており [4]、その原因はまだ理解されていない。

本研究で、我々は 1 次元粉体振動層の流動状態における巨視的物理量の振る舞いを理解するための新しいアプローチとして、重心についての現象論的運動方程式を用いる方法を提案する。我々はその方程式の解より得られる各種巨視的物理量について、EDMD シミュレーションの結果と比較し、本現象論の有効性を議論する。

我々は 1 次元粉体振動層として、高さ $z = 0$ のまわりで振動する底板上で、 z 軸上に運動領域が制限された直径 d 、質量 m の N 個の球状粒子列の、重力加速度 g の重力下での運動について考える。我々は運動領域の制限のために生じる摩擦や球の回転運動を無視することにより、この系を 1 次元非弾性剛体球系によりモデル化し、EDMD シミュレーションを行う。1 次元系では剛体球の直径 d は物理的な意味を持たないため、以後各粒子を質点として扱う。振動板の高さ z_0 は時間 t について角振動数 ω の三角関数的振動をする場合を考え、 $z_0(t) = A \sin \omega t$ とする。2 粒子が衝突するとはねかえり係数を r_p とする非弾性衝突を行い、粒子と振動板は弾性衝突するものとする。

¹E-mail:wakou@cc.miyakonojo-nct.ac.jp

²E-mail:isobe@nitech.ac.jp

2 重心運動についての現象論

粉体粒子列の全質量を $M = Nm$ 、時刻 t において振動板が粒子列に及ぼす力を $f_w(t)$ 、重心の高さ、速度を $Z(t)$ 、 $V(t)$ とすると、重心に対する運動方程式は

$$M \frac{dV}{dt} = -Mg + f_w \quad (1)$$

のように書かれる。力 $f_w(t)$ の長時間平均値は粒子列にはたらく重力 Mg に等しい。力 $f_w(t)$ の長時間平均値からのずれ $\delta f(t) \equiv f_w(t) - Mg$ をどのように評価するかが本研究の核心部分である。

振動板が粒子列に及ぼす力 $f_w(t)$ は粒子列が振動板に及ぼす力の反作用に他ならない。我々は粒子列が流動状態にあるときに振動板におよぼす力を、ブラウン運動において溶媒分子がブラウン粒子におよぼす力との類推により考えることにする。振動板が受ける力には、粒子の乱雑な衝突によるランダム力と、振動板の運動に伴う系統的な力が含まれることが期待される。系統的な力のひとつとしては、ブラウン運動と同様に、振動板の運動に伴う摩擦力を考えることができる。また、粒子列の弾性体としての振動運動に伴う力もはたらくと考えられる。我々は、粒子列が振動板の運動と同期せず、乱雑な流動状態をとっているような定常状態に限定して考える。系がそのような状態をとるためには、振動板の振動周期が摩擦力による定常状態への緩和の時間スケールや弾性力による固有振動の周期に比べて十分に短くなくてはならない。我々はそのような定常状態における δf の考えうる最も単純なモデルとして次のような形

$$\delta f(t) = -k \left(Z(t) - \bar{Z} \right) + f_s(t) - \mu V(t) + r(t) \quad (2)$$

を仮定する。ここで、 \bar{Z} は重心の高さ $Z(t)$ の長時間平均値で、定常状態における重心の高さを表している。右辺第1項は全長の伸縮に伴う弾性係数を k とする弾性力、第2項 $f_s(t)$ は振動板が音波を励起する際にはたらく弾性力、第3項は摩擦係数を μ とする重心速度 $V(t)$ に比例する摩擦力、第4項 $r(t)$ はランダム力を表す。ここで我々は、振動板の振動周期が巨視的な緩和時間や固有振動の周期に比べて十分に短いことから、振動板の運動は緩やかに時間発展する全長の伸縮モードには直接的には影響を与えず、音波を励起することにより系にエネルギーを供給すると仮定した。

音波の励起による力 $f_s(t)$ については、流体力学における音波の理論に基づいて評価する。音波の伝播については、流体の速度 v が音速 c_s に比べて十分小さい場合、反射波の存在しない一方向への進行波について、流体の圧力の平衡値からのずれ p' と速度 v の間に $p' = \rho c_s v$ という関係が成立することが知られている。ここで ρ は流体の密度の平衡値である。振動板近傍においてもこの関係が成立すると仮定し、 ρ 、 c_s 、 v を粒子列の熱速度 c を用いてそれぞれ次のように評価する： $\rho \sim M/l \sim M/(c^2/g)$ 、 $c_s \sim c$ 、 $v \simeq v_0$ 。ここで l は粒子列の全長であるが、それを振動板近傍から熱速度 c で上昇する粒子の最高到達点 c^2/g と同程度であるとした。 $v_0(t)$ は振動板の速度で $v_0(t) = Aw \cos \omega t$ である。以上の考察より、 $f_s(t)$ は次のような形で与えられる： $f_s(t) = M \hat{\beta} \frac{g}{c} Aw \cos(\omega t)$ 。ここで $\hat{\beta}$ はオーダー1の数係数で、後に示すシミュレーション結果との比較の際にフィッティングパラメーターとして用いられる。このとき、音波の理論の成立条件から、 $c \gg Aw$ (Aw は振動板の最大速度) が成立しなくてはならないことに注意する。

式(2)中の現象論的パラメーターとして、全長が伸縮する振動モードの固有振動数 $\Omega \equiv \sqrt{k/M}$ 、摩擦係数 $\mu' \equiv \mu/M$ がある。どちらも、その逆数は粒子列全体に及ぶ巨視的な運動に伴う時間スケールを与える。よって、我々は両者とも音波が系全体に行き渡るのに必要な時間スケール $g/c_s \sim g/c$ と同程度であると仮定する: $\Omega = \hat{\Omega}g/c$ 、 $\mu' = \hat{\mu}g/c$ 。ここで $\hat{\Omega}$ 、 $\hat{\mu}$ はオーダー1の数係数で、シミュレーションとのフィッティングにより値が決められる。

ランダム力 $r(t)$ の性質としては、温度 T の溶媒中のブラウン粒子に作用するランダム力と同等であると仮定する。すなわち、ランダム力は定常ガウシアン・ホワイトノイズであるとする: $\langle r(t) \rangle = 0$ 、 $\langle r(t)r(t') \rangle = I\delta(t-t')$ 。このとき、ランダム力の強度 I と摩擦係数 μ' の間には揺動散逸関係 $I = 2M\mu'kT = 2M\mu'mc^2$ が成立するものとする。ここで、2番目の等式においては熱速度 c と温度 T の関係 $c \equiv \sqrt{kT/m}$ を用いた。

最終的に、重心に対する運動方程式は次のような線形ランジュバン方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\Omega^2 (Z - \bar{Z}) - \mu'V + \frac{f_s}{M} + \frac{r}{M} \quad (3)$$

となる。この運動方程式は容易に解くことができ、その解を用いて様々な巨視的な物理量を計算できる。

3 EDMD シミュレーションとの比較

式(3)を解くと、重心の高さの時間平均値からのずれ $Z(t) - \bar{Z}$ について

$$Z(t) - \bar{Z} = A\zeta \sin(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^t G(t-t')r(t')dt' + (\text{初期条件に依存する減衰項}) \quad (4)$$

という形の解を得る。ここで、振幅 ζ 、位相 θ 、関数 $G(t)$ は全て(3)式中のパラメーターによって決まる。右辺第1項は音波の励起による力 $f_s(t)$ による強制振動の項、第2項はランダム力による揺らぎを表す項である。第3項は長時間の振る舞いを考える限り無視してよい。

第1項の強制振動の項から導かれる重要な巨視的物理量のひとつとして、振動板により単位時間あたりに系に流入するエネルギー P_b がある。定常状態においては、この量は非弾性衝突により単位時間あたりに系内で散逸されたエネルギーに等しい。 P_b は、振動板が粒子列におよぼす力 f_w と振動板の速度 v_0 の積の長時間平均値により $P_b = \overline{f_w v_0}$ と定義される。この式に、(1)式より $f_w = M \frac{dV}{dt} + Mg$ を代入した上で、長時間平均 $\overline{\frac{dV}{dt} v_0} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dV}{dt} v_0 dt$ について2回部分積分を行うと、 $P_b = -M\omega^2 \bar{Z} v_0$ のように(4)式の解を用いて計算できる。最終的に、

$$P_b/MgAw = \frac{\hat{\beta} Aw}{2c} \frac{\omega^2(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (\mu'\omega)^2} \simeq \frac{\hat{\beta} Aw}{2c} \quad (5)$$

を得る。ここで、右辺の2番目の近似的等式では、振動板の周期が粒子列の巨視的な運動の時間スケールに比べて十分に短いこと、すなわち $\omega \gg \Omega$ 、 μ' を用いた。この理論の予測とEDMDシミュレーションの結果との比較を図1(a)に示す。フィッティングパラメーター $\hat{\beta} = 1.5$ としたときの理論直線は、粒子数 N 、はねかえり係数 r_p 、振動板の加速度 $\Gamma \equiv Aw^2/g$ を様々に変えたときのシミュレーションの結果と、音波の理論が成立する領域 $c/Aw > 1$ においてよい一致を示している。

(4) 式の第2項から導かれる重要な物理量として、重心高さのパワースペクトル I_{CM} がある。計算の詳細は省略するが、最終的に次の様な結果を得る。パワースペクトルを $I_{CM}/(c^5/Ng^3)$ のように無次元化し、変数を $\omega = \hat{\omega}g/c$, $\omega' = \hat{\omega}'g/c$ のようにスケールすると、

$$I_{CM}(\hat{\omega}')/\frac{c^5}{Ng^3} = \frac{\pi}{2}N\zeta^2 \left(\frac{Ag}{c^2}\right)^2 (\delta(\hat{\omega}' - \hat{\omega}) + \delta(\hat{\omega}' + \hat{\omega})) + \frac{2\hat{\mu}}{(\hat{\Omega}^2 - \hat{\omega}'^2)^2 + (\hat{\mu}\hat{\omega}')^2} \quad (6)$$

となる。ここで、右辺第1項は振動板の(スケールされた)角振動数 $\hat{\omega}$ におけるデルタ関数的ピークを表し、第2項は連続スペクトルを表す。第2項は定数 $\hat{\mu}$, $\hat{\Omega}$ のみで決まり、系のパラメーターにまったくよらないことに注意する。図1 (b)にEDMDシミュレーションの結果を示す。異なるパラメーターセットにおけるプロットは、大きなノイズを含むもののほぼ同一の支配曲線上に乗る。(6)式第2項において $\hat{\mu} = 2.0$, $\hat{\Omega} = 1.5$ と選んだときの理論曲線と、シミュレーション結果の支配曲線はよく一致しており、本現象論の有効性を示唆している。

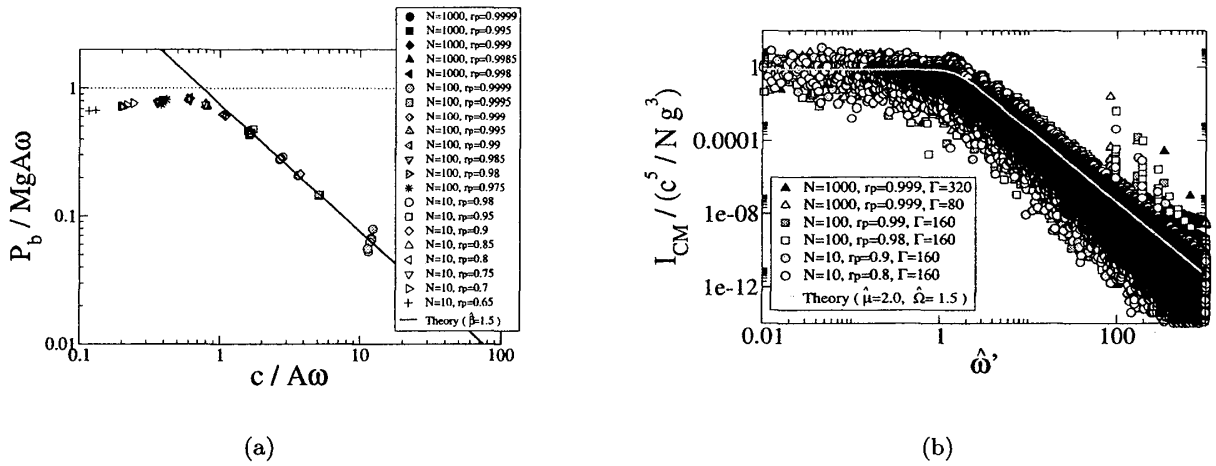


図1: (a) 異なる N , r_p , Γ (Γ は 10~640 の範囲で変えた) について、無次元化されたエネルギー流入量 P_b を熱速度 c と最大振動板速度 $A\omega$ の比の関数としてプロットしたもの。実線は $\hat{\beta} = 1.5$ としたときの理論の予測 ((5) 式の近似的等式)。 (b) 異なる N , r_p , Γ についての無次元化された重心高さのパワースペクトル。灰色の太線は $\hat{\mu} = 2.0$, $\hat{\Omega} = 1.5$ としたときの理論曲線 ((6) 式第2項)。

参考文献

- [1] J. デュラン, 「粉粒体の物理学」, (吉岡書店) (2002) とその中の参考文献.
- [2] S. Luding, E. Clément, A. Blumen, J. Rajchenbach, and J. Duran, Phys. Rev. E **49** (1994), 1634.
- [3] B. Bernu and R. Mazighi, J. Phys. A **23** (1990), 5745.
- [4] S. McNamara and S. Luding, Phys. Rev. E **58** (1998), 813 とその中の参考文献.