振動子集団の位相ダイナミクスの設計：リズム現象の新しいフィードバック制御手法の確立

郡　宏*
北海道大学大学院理学研究院数学部門

1　はじめに

振動子集団の集団挙動は自然界において様々な機能を担っている。例えば、哺乳類の概日リズムは、時計細胞と呼ばれる約24時間周期で生理学的な活動度を変化させる細胞の集団がつくり出している [1]。また、歩行や羽ばたきといったロコモーションでは、特定の神経細胞群が身体の動きのリズムをつくり出しており、神経細胞同士、あるいは、神経細胞と実現されている歩行との相互作用を通して、ロコモーションを巧妙に構築・制御している [2]。

面白いことに、この2つの例の同期現象はそう単純ではない。哺乳類の時計細胞集団では、各時計細胞の位相が非常に広い分布を持った状態で同期しており、分布には3つのピークがあることが近年報告された [3]。この分布は概日リズムの何らかの機能形成のために必要であると考えるのが妥当であろう。ロコモーションにおいても、各部分は位相的に自由度の高い運動をしているのだが、全体として秩序だち、リズミカルに動くことができる。生命システムはそのような複雑な協同現象をどのように構築しているのだろう？

また、我々人間もテクノロジーにおいて振動子集団の同期を利用している [4]。ロボット工学や通信などへの応用を試みた研究 [5, 6] が進められており、さらなる発展が期待されている。しかし、工学的に、望みの協同現象をどのように設計すればいいのだろうか?有用な理論が必要である。

本稿では、これらの問いに対して指針を与えることを目指した研究 [7] を紹介する。この研究は、著者とバージニア大学の実験グループとの共同研究である。この研究では、振動子ダイナミクスの中でも重要な要素である位相ダイナミクスを自由に作りこむことに目的がある。望みの集団挙動に導くフィードバック結合を設計するために必要な理論の構築と、その実験検証が行われている。本稿では主に理論を紹介する。

*electronic address: kori@nsc.es.hokudai.ac.jp

2　位相ダイナミクスの設計方法

振動子集団にある特定のクラスの結合を導入すると、任意の位相ダイナミクスを実現できることを示す。まず準備として、この理論で用いる位相モデルについて簡単に説明する。次のような運動方程式に従う、なんらかの相互作用を持って影響し合う N 個の同一な自励振動子集団を考える。

$$\frac{d\boldsymbol{A}_i(t)}{dt} = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{A}_i(t)] + \epsilon \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{G}_{ij}(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j). \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{A}_i = (x_i, y_i, \ldots)^{\mathrm{T}}$ は振動子 i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ の状態変数、$\boldsymbol{F}$ はリミットサイクル振動を記述する非線形関数、ϵ は特徴的な結合強度、$\boldsymbol{G}_{ij}$ は振動子 j から振動子 i への結合の様態を記述する関数である。結合が弱い（つまり、ϵ が小さい）場合は、式 (1) を次の位相モデルに近似することができる [8]：

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \epsilon \sum_{j} H_{ij}(\phi_j - \phi_i). \tag{2}$$

ここで、ϕ_i は振動子 i の位相[1]、ω は各振動子の自然振動数、そして H_{ij} は結合関数と呼ばれる 2π 周期関数である[2]。結合関数 H は次のように求まる。

$$H_{ij}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{Z}(\phi_i + \lambda)\cdot\boldsymbol{G}_{ij}(\phi_i + \lambda, \phi_j + \lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{Z}(\lambda')\cdot\boldsymbol{G}_{ij}(\lambda', \phi_j - \phi_i + \lambda')d\lambda' \tag{3}$$

ここで、$\boldsymbol{Z}(\phi)$ は位相応答関数と呼ばれる 2π 周期関数であり、いくつかの方法で解析的、数値的、あるいは実験的に得ることができる [7, 8, 11, 12]。

式 (2) のように自然振動数が均一な振動子集団を記述する位相モデルでは、一般性を失わずに $\omega = 0, \epsilon = 1$ と置くことができる[3]。したがって、式 (2) の動的挙動は結合関数 H_{ij} のみに依存する。この節の目的は、どのような振動子（つまり、どのようなリミットサイクルを記述する $\boldsymbol{F}$）を用いても、それに応じた適切な $\boldsymbol{G}_{ij}$ を導入すれば、任意の結合関数 H_{ij} が得られることを示すことである。特に、ターゲットとなる結合関数 H_{ij}^{target} が与えられた場合に、どのような $\boldsymbol{G}_{ij}$ を導入すればいいのか、その処方箋を示す。

これらを示すためには、1 つの振動子が、他の振動子から影響を受けている場合を考えれば十分である。次の運動方程式を考える。

$$\frac{d\boldsymbol{A}_1(t)}{dt} = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{A}_1(t)] + \epsilon\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2). \tag{4}$$

[1]位相はリミットサイクル軌道近傍で定義されており、単一振動子において $\dot{\phi} = \omega$ を満たす。詳細は文献 [8, 9] などを参照。また、文献 [10] にも位相縮約についての解説があり、その原稿は http://www-nsc.es.hokudai.ac.jp/ kori/official/publications.html に公開している。

[2]結合関数の定義方法には主に 2 つ慣習がある。式 (2) では、結合関数が $H(\phi_j - \phi_i)$ としてあるが、ここを $\Gamma(\phi_i - \phi_j)$ と記述すことも よくある。本稿では $H(\phi_j - \phi_i)$ の定義を用いる。なお、Γ を用いた研究を参照する場合は、$H(\phi) = \Gamma(-\phi)$、および、そのフーリエ成分 $h_l = g_{-l}$ の関係に注意してもらいたい。また、H や Γ は、結合関数 (coupling function) ではなく相互作用関数 (interaction function) と呼ばれることも多い。

[3]これは、慣性系に移り ($\phi \to \phi - \omega t$)、時間をリスケールする ($t \to \epsilon t$) することに対応する。

振動子2は同様の運動方程式に従う。ここで、次のような関数$\boldsymbol{G}$を導入する。

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{G}(x_2) = \{p(x_2), 0, \ldots, 0\}^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

$$p(x_2) = \sum_{n=0}^{M} k_n \{x_2(t-\tau_n) - a_0\}^n. \tag{6}$$

関数pは次数Mの多項式で、各項はそれぞれ異なる時間遅れを伴う。k_nとτ_nはそれぞれn次項の結合強度と時間遅れと呼ぶ。a_0は、結合がない状態$(\epsilon = 0)$でのx_2の平均値である。この結合は、つまり、振動子の状態変数の一成分（この場合はx成分）から計算され、またその成分に与えられている。式(4)に対応する位相モデルは、位相応答関数$\boldsymbol{Z}(\phi)$のx成分$Z_x(\phi)$を用いて、次のように表せる。

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega + \epsilon H(\phi_2 - \phi_1), \tag{7}$$

$$H(\phi_2 - \phi_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z_x(\lambda) p(\phi_2 - \phi_1 + \lambda) d\lambda. \tag{8}$$

関数H, Z_x, pの関係を明確にするために、各量を次のようにフーリエ級数で展開する。

$$H(\phi) = \sum_l h_l e^{il\phi}, \quad Z_x(\phi) = \sum_l z_l e^{il\phi}, \quad x(\phi) = \sum_l a_l e^{il\phi}. \tag{9}$$

さらに、結合を受けてない振動子の位相について成り立つ関係式$\phi(t-\tau) = \phi(t) - \omega\tau$から次を得る[4]。

$$x[\phi(t-\tau)] = \sum_l a_l e^{il\phi(t)} e^{-il\omega\tau}. \tag{10}$$

これを用いて、関数$p(\phi)$は次のように展開できる。

$$p(\phi) = \sum_n k_n \{x(t-\tau_n) - a_0\}^n = \sum_n k_n \left\{\sum_{l\neq 0} a_l e^{il\phi} e^{-il\omega\tau_n}\right\}^n \equiv \sum_l b_l e^{il\phi}. \tag{11}$$

これらのフーリエ係数を用いると式(8)から次の関係式を得る（畳み込みの公式である)。

$$h_l = z_{-l} b_l. \tag{12}$$

なお各関数は実関数なので、各フーリエ係数c_l $(c \equiv h, z, a, b)$が$c_l = c_{-l}^*$を満たすことを注意しておく。

ここで、$x(\phi)$と$Z_x(\phi)$の関数形がわかっているとする。b_lは$a_0, a_{\pm1}, \ldots, k_0, \ldots, k_M, \tau_1, \ldots, \tau_M$の関数であり、$2M+1$個のパラメタ$k_n$と$\tau_n$を用いると、$2M+1$個の$b_l$ $(l = 0, \pm1, \ldots, \pm M)$を任意に作ることができる。つまり、$z_l = 0$でない限り、任意の$h_l$ $(l = 0, \pm1, \ldots, \pm M)$を設計できる。また逆に、あるターゲットとなる$h_l$ $(l = 0, \pm1, \ldots, M)$が与えられたとき、代数方程式(12)を解くことにより、パラメタk_nとτ_nを決定できる。この時、式(12)はk_nとτ_nについて非線形な方程式であるため、一般には数値的に解くことになり、少しやっかいである。ただし、特殊な条件下では手計算で簡単に解くことができる。次の例を見てもらいたい。

[4]結合がある場合には$\phi(t-\tau) = \phi(t) - \omega\tau + O(\epsilon\tau)$となるが、この誤差は式(8)でさらに結合強度$\epsilon$がかかり$O(\epsilon^2\tau)$となる。結局、$\epsilon$が小さいと仮定しているのでこの項を考慮する必要がない。詳しくは文献[13, 14]を参照。

3 観測量が調和振動する場合

理論の有用性をわかりやすくするために、観測量 $x(\phi)$ が完全にハーモニックで振幅が 2 であると仮定する[5]。位相の原点を適切に選んで、次のように置く。

$$x(\phi) = 2\cos\phi = e^{i\phi} - e^{-i\phi}. \tag{13}$$

すると $p(\phi)$ は次のようになる。

$$p(\phi) = \sum_{n=0}^{M} k_n \sum_{m=0}^{n} C_n^m e^{i(2m-n)(\phi-\omega\tau_n)}. \tag{14}$$

ここで、C_n^m は n 要素の中から m 個とる組み合わせの数である。これを式 (8) に代入して次を得る。

$$H(\phi) = \sum_{n=0}^{M} k_n \sum_{m=0}^{n} C_n^m z_{n-2m} e^{i(2m-n)(\phi-\omega\tau_n)}, \tag{15}$$

あるいは、フーリエ成分を用いて次のように書ける。

$$h_l = z_{-l} \sum_{n=l}^{M} k_n C_n^{\frac{n+l}{2}} e^{-il\omega\tau_n}. \tag{16}$$

ここで、便宜上、自然数でない m に対し $C_n^m = 0$ と定義している。式 (16) からわかるとおり、n 次の結合は l 次 $(l = n, n-2, n-4, \ldots)$ のフーリエ成分を強めている。振動の見た目は調和振動子と同様極めて単純であるが、z_l が 0 でない限り、任意の h_l を構成でき、複雑な集団挙動を実現することができる。

ターゲットとなる結合関数が与えられたときに、式 (16) は手計算で容易に解ける。例えば、ターゲットが次のような場合を考えよう。

$$H^{\mathrm{target}}(\phi) = \sin(\phi-\alpha) - r\sin(2\phi) = \frac{1}{2}e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}e^{i\phi} + \frac{r}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i2\phi} + \mathrm{c.c.}. \tag{17}$$

ここで、α と $r > 0$ は結合関数の任意パラメタである。この関数は、Hansel らが 1993 年に用いた結合関数で、slow switching 現象と呼ばれる特殊な集団挙動を作ることができる [14, 15]。ターゲットが 2 次のフーリエ成分までなので、結合は 2 次項まで必要であり、このとき式 (15) は次のようになる。

$$H(\phi) = (k_0 + 2k_2)z_0 + k_1 z_{-1} e^{i(\phi-\omega\tau_1)} + k_2 z_{-2} e^{i2(\phi-\omega\tau_2)} + \mathrm{c.c.}. \tag{18}$$

式 (17) と式 (18) を、高次のフーリエ成分から順にに比べていくと、次のように $2M+1$ 個のパラメタが決定される。

$$k_0 = -\frac{rz_0}{|z_2|}, \quad k_1 = \frac{1}{2|z_1|}, \quad k_2 = \frac{r}{2|z_2|}, \tag{19}$$

$$\tau_1 = \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \arg(z_1)}{\omega}, \quad \tau_2 = \frac{-\frac{\pi}{2} - \arg(z_2)}{2\omega}. \tag{20}$$

なお、(k_1, τ_1) の代わりに $(-k_1, \tau_1 + \pi/\omega)$ を、また、(k_0, k_2, τ_2) の代わりに $(-k_0, -k_2, \tau_2 + \pi/2\omega)$ を用いることもできる。

[5] 結果が見やすくなる便宜上、振幅を 2 とした。振幅については、以下で k_n を適切にリスケールすれば任意に設定できる。

4 フィードバック制御

フィードバック入力を与えられる振動子集団では、前章の理論を適用することによって、位相ダイナミクスを任意に作りこむことができる。例えば、大域的なフィードバック制御を行う場合には場合には、次のような入力 $P(t)$ を振動子集団に一様に与えればよい。

$$P(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p(x_n). \tag{21}$$

この場合は、大域結合する位相モデルに対応する。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega + \frac{\epsilon}{N}\sum_{j=1}^{N} H(\phi_j - \phi_i). \tag{22}$$

実験的に $Z_x(\phi)$ が計測できれば、H^{target} を構築するための k_n と τ_n が決定できる。したがって、式 (22) で可能なダイナミクスは、振動子の実体がなんであれ、実現可能である。論文 [7] では、電気化学振動子集団をフィードバック制御する実験を行い、この理論が正しく適用できることを実証した。具体的には、2 つの振動子を同期させて、その位相差を望みの量にすること、slow switching 現象を示すこと、また同期している振動子集団の位相をバラバラにすることを行った。詳細は論文を見ていただきたい。

5 まとめ

どのような振動子でも結合をうまく設定すれば、任意の位相ダイナミクスを実現できることが示した。また、この理論を使った新しいフィードバック制御の手法を紹介した。

謝辞

本研究の一部を遂行するにあたり、ドイツ国フンボルト財団、および、21 世紀 COE プロジェクト「特異性から見た非線形構造の数学」(北海道大学大学院理学研究院数学部門) から財政的な援助を頂いた。ここに謝意を表します。

参考文献

[1] S. M. Reppert and D. R. Weaver. "Coordination of circadian timining in mammals". *Nature* **418**, 935, 2002.

[2] 多賀厳太郎.「脳と身体の動的デザイン　運動・知覚の非線形力学と発達」. 金子書房, 2002.

[3] S. Yamaguchi, H. Isejima, T. Matsuo. R. Okura, K. Yagita, M. Kobayashi, and H. Okamura. "Synchronization of cellular clocks in the suprachiasmatic nucleus". *Science* **302**, 1408, 2003.

[4] William.L. Kath and Julio.M. Ottino. "Rhythm Engineering". *Science* **316**, 1857, 2007.

[5] 石黒章夫, 清水正宏, 川勝年洋. 「単純な運動機能を持つ結合振動子系から創発する知能」. 物性研究 **87**, 572, 2006.

[6] Hisa-Aki Tanaka, Kuniyasu Shimizu, Osamu Masugata, and Tetsuro Endo. "Flexible phase synchronisation control method using partially unlocking oscillator arrays". *IEE Electronics Letters* **43**, No. 16, 2007.

[7] Istvan. Z. Kiss, Craig Rusin, Hiroshi Kori, and John. L. Hudson. "Engineering Complex Dynamical Structures: Sequential Patterns and Desynchronization". *Science* **316**, 1886, 2007. (pulished online 24 May 2007).

[8] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* Springer, New York, 1984.

[9] 蔵本由紀［編］. 「リズム現象の世界」. 東京大学出版会, 2005.

[10] 郡宏, 蔵本由紀. 「連載：ネットワーク科学最前線–世界の"つながり"を知る科学と思考 (2) 『複雑ネットワークと非線形科学』」. 数理科学 **521**, 62, 2006.

[11] G.Bard Ermentrout. "$n{:}m$ Phase-Locking of Weakly Coupled Oscillators. *J. Math. Biol.* **12**, 327, 1981.

[12] F.C. Hoppensteadt and E.M. Izhikevich. *Weakly Connected Neural Networks.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[13] E.M. Izhikevich. "Phase Models With Explicit Time Delays". *Phys. Rev. E* **58**, 905, 1998.

[14] H. Kori and Y. Kuramoto. "Slow switching in globally coupled oscillators". *Phys. Rev. E* **63**, 046214, 2001.

[15] D. Hansel, G. Mato, and C. Meunier. "Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators". *Phys. Rev. E* **48**, 347, 1993.