

経済物理学入門

東工大・総理工・知能システム科学

高安美佐子

要旨：この10年ほどの間に人間の経済活動の詳細なデータがコンピュータの中に蓄積されるようになりました。そして、その蓄積された膨大な量のデータを解析することで、通常自然科学と同じような手法で経済現象を実証科学的に研究することができるようになってきています。そのような研究を中心的に推進しているのが経済物理学です。経済学における仮説をデータからどの程度成立しているのかを実証的に検証し、さらに、見逃していた効果があればそれを取り込むような形で、研究が発展し、既に実務に応用されているような研究成果も出ています。まだ解析のための道筋もできていないような高頻度の経済データは無尽蔵ともいえるほどありますから、物理学のセンスを活かした研究の発展が期待されています。

1 市場の特性

経済学の基本であるアダム・スミスの「見えざる手」のアイデアは、当時全盛だった古典力学の万有引力の理論をヒントに生まれてきました。あらゆる物体に働く目に見えない力を想定することによって惑星の複雑な動きが見事に予測できるようになったことから、人間同士にも見えない力が働いていると考えることで人間集団の経済活動を説明しようとしたわけです。需要が多ければ価格が上がる、という直感的なわかりやすさも手伝い、この考え方は、現在に至るまで最もよく知られた経済法則のひとつとして広く認識されています。

しかし、現実の市場の価格の変動を詳細な市場の高頻度データから解析すると、需要が多ければ価格が上がるというような単純な理論で説明ができる価格の変化はかなり限定的であることがわかってきました。外国為替市場の詳しいデータを解析すると、ほんの1, 2分間程度の短い時間スケールでは、売り買いの注文の量に比例する形で市場価格が上がり下がることが確認されます。しかし、需要と供給の法則が成り立つのは、そのようなごく短い時間スケールだけです。観測する時間スケールを数分間以上にすると、売買注文の量の差にはほとんど無相関に市場価格が変動することになってしまいます[1]。株などの他の金融市場でも状況はほとんど同じです。誰でも当たり前、と思っている需要と供給の法則が素直に成立しているのは、ほんの1, 2分間の短い時間スケールだけだったのです。それよりも大きな時間スケールでは、価格の変動と需要供給の量、あるいは、売り注文や買い注文の量、には明瞭な相関は観測できず、事実上、価格の変化はランダムであ

るとみなすことができます。

経済学では、市場価格がランダムに変動することに対して次のような理由付けをしています。市場を構成する人たちは、あらゆる手段を使って将来の価格の変化を先読みしており、そのような将来の予想価格を踏まえた上で価格が決まっていると考えます。例えば、ある企業が革新的な発明をしたことが公表され、その企業の株価が近い将来100円程度上がるだろう、と多くの人が揃って予想したとします。このように価格が上がるという予測の元では、少しでも安いときにその株を買っておいたほうが利得は大きくなります。すると一刻でも早くその株を買う人が殺到し、将来に起こるはずだった株価の上昇が、今、この瞬間に起こってしまうこととなります。このように考えていくと、あらゆる未来に起こりそうなことが全て盛り込まれた形で現時点の市場価格が決まり、それ以上の予測の余地は残っていない、という結論になります。それゆえ、価格の上がり下がりとは予測のできないランダムな変数になるのだ、というわけです。

これは、市場価格をランダムウォークで近似する金融工学の最も基本的な考え方で、一見もってもらしく思えます。そして、ある程度以上大きなスケールでは確かに、ほぼランダムウォークで近似できる価格の変動が普遍的に観測されています。図1は、円ドルレートの変動の過去13年間のデータのデータです[2]。変動の一部分を拡大し、またその一部分を拡大していますが、自己相似的な変動のグラフが得られます。一般にランダムウォークのグラフはフラクタル性を有していますし、円ドルレートの変動は、数時間以上の長さの時間スケールで観測すると、ほぼランダムウォークで近似できることが確認できます。

しかし、観測の精度を上げて、秒単位のスケールにまで拡大し、一回一回の取引が見えるようなスケールで観測すると事情が変わってきます。図2は、円ドルレートの変動を区間が10分間程度のスケールまで拡大したものです。ここでは、相似性が破れ、不連続的でジグザグした変動が見えてきていることが確認できます。

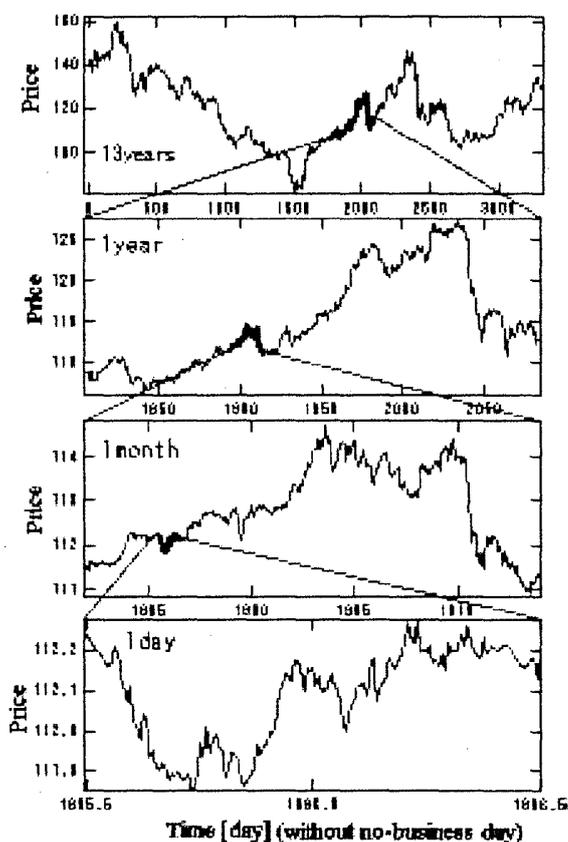
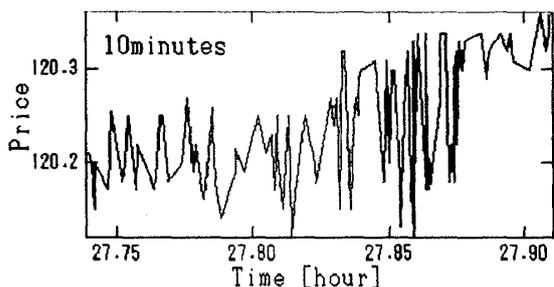


図1 13年間の円ドルレートの変動。上のグラフの一部分を次々と拡大している。

図2 一回ごとの取引が観測できるスケールまで拡大した円ドルレートの変動のグラフ。

一回一回の取引ごとのデータはティックデータとよばれています。ティックデータを観測すると、大きなスケールでは見えなかった幾つかの重要な特性を見出すことができます。まず、第一の特徴は、このスケールでの市場価格の上がり下がり、過去の履歴を引きずることのない単純なランダムウォークとは大きく異なり、上がり下がり多体の確率分布は1/2にならないのです。

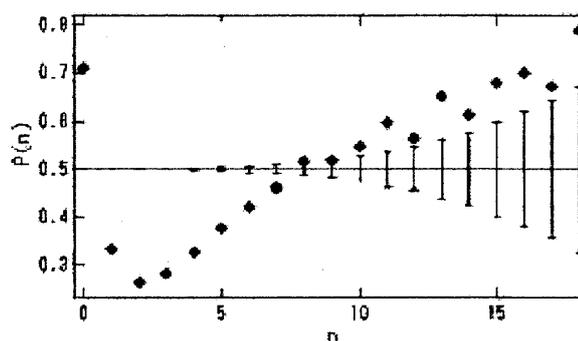


図3 n回価格が上昇した後で、価格が上昇する確率。

実際のデータから、n回続けて価格が上昇したという条件付で、さらに次にもう一度価格が上がる確率を計算したのが、図3です。およそ8ティックを境として、それよりも小さいnのときには価格を引き戻す確率が高く、それよりも大きなnのときにはさらに価格が上がる確率が0.5よりも有為に大きくなっています。特に、この後者の部分は、価格上昇が続いて起こり、トレンドが発生したと多くの人々が判断をして、さらにその兆候を増長させる動きが起こった、と解釈することができます。円ドル市場の場合、取引の平均間隔は時間帯にも依存しますが、およそ数秒程度ですから、上記のn=8は、およそ1分間に相当します。つまり、秒単位で激しく変動する市場のなかで、約1分間1方向に価格が動き続けると、トレンドが発生したと判断され、そのトレンドを強化するような集団心理が働く、というわけです[3]。

もうひとつ、ティックデータから興味深いことが観測されます。それは、取引の間隔についてです。図4の上部のプロットは、取引のあった事象を表しています。ここで、注目していただきたいのは、取引の間隔のゆらぎが、単純な無相関なゆらぎではなく、クラスター化しやすい性質、すなわち、取引間隔が短い状態が続く傾向、また、逆に、長い取引間隔が持続しやすい傾向があることです。

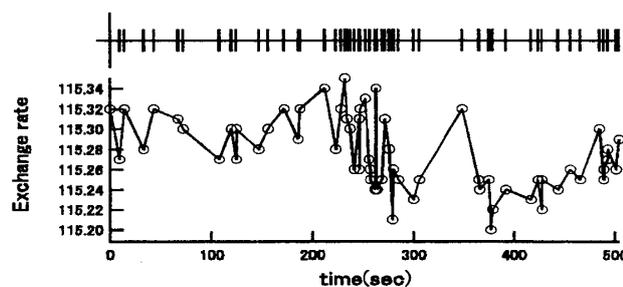


図4 ティックレベルでみた取引間隔のゆらぎ。

このようなクラスター化する傾向を持つようなランダムな事象の発生は、数理的には比較的簡単なモデルで記述することができます。まず、n回目の取引の間隔を Δt_n としたとき、過去T秒間に発生した取引の取引間隔の平均値を次の式で定義します。

$$\langle \Delta t_n \rangle_T = \frac{1}{N_n(T)} \sum_{i=n-N_n(T)}^{n-1} \Delta t_i \quad (1)$$

次に、次式で記述される確率モデルを考えます。

$$\Delta t_{n+1} = \mu_n \langle \Delta t_n \rangle_T + f_n \quad (2)$$

ここで、 μ は平均が 1 の指数分布に従う独立な乱数、 f は非負の値をとる乱数または定数です。最後の項の f は、確率過程を定常にするために必要な項で、本質的な役割は持っていません。このモデルによれば、 f を無視して両辺を Δt の移動平均値で割ってみればわかるように、取引間隔の時系列を過去 T 秒の移動平均で規格化した量に着目すると、無相関で平均が 1 の指数分布にしたがうことが期待されます。図 5 では、実際に、取引間隔を過去 T 秒間の移動平均で規格化した量の分布を、 $T=150$ 秒と 400 秒について片対数でプロットしています。確かに、 $T=150$ 秒のときには、ほぼ完璧な指数分布が観測され、また、このときには、時系列の自己相関関数もほとんど 0 になり、純粋なポアソン過程が抽出されたこととなります。理論的には取引という事象の発生は基本的にポアソン過程になるのではないかと期待されますが、単純なポアソン過程ではなく、移動平均を通してのポアソン過程だったこととなります。このときの最適な移動平均時間 T は 150 秒で、およそ 2, 3 分です。つまり、市場を構成している人たちは、過去 2, 3 分間の取引の頻度を観測し、その平均値に基づいて、自分の時計を速めたり、遅くしたりしている、というわけです[4]。

(2) 式は、私達が自己変調過程と名づけた確率過程の特殊な場合で、とてもおもしろい性質を持っています。元になるランダムさは、純粋なポアソン過程 μ なのですが、そこから自己変調を通して作り出される変動は、自発的にクラスターが形成され、取引間隔の分布はベキ分布になり、また、取引の発生事象のパワースペクトルは、いわゆる、 $1/f$ ノイズになることが厳密に証明することができます[5]。実際の市場の取引間隔のパワースペクトルが $1/f$ で近似できることも、また、もともとの取引間隔の分布もベキ分布に近いこともわかっており、このモデルの妥当性が確認されています。

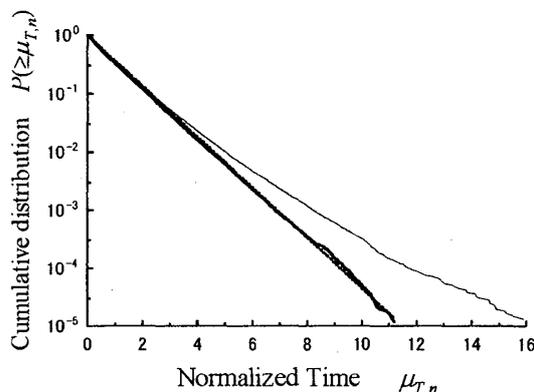


図 5 過去 T 秒間の移動平均で規格化した取引間隔の分布。 $T=150$ 秒のプロットはほぼ平均が 1 の指数分布と一致しているのに対し、 $T=400$ 秒のプロットは、指数関数からのずれが見える。

これらの結果からわかることは、価格の上がり下がりの統計性から見ても、取引間隔の統計性から見ても、市場で取引をしている人たちは、せいぜい直近の過去 2, 3 分の市場の様子を観察し、それに基づいて売買の判断をしているらしい、ということです。上がり下がりの統計性からわかることは、一定回数以上価格が上がり続けると、その傾向が持続するもの

と判断して、買い注文を入れ、さらに、このようなトレンドが持続する傾向を強化するような傾向があることです。これは、市場の価格の上がり下がりを利用して利益を得ようとする投機とよばれる売買行動です。

もしも、市場価格に上がっていくトレンドがあることがわかっているならば、早め買ってしばらく様子を見て、上がりきったところで下がりだす直前に売れば、最大の利益を得ることができます。この読みどおりに価格が動けば大きな儲けを生み出しますが、もしも、予想に反して、上がるはずの価格が下がってしまえば、大きな損失を出します。そういう意味で、投機はギャンブル的な要素の高い取引です。現実の外国為替市場の中では、投機的な取引が中心的な役割を演じているのです。

投機による売買は、直近の過去の市場価格の変動からごく近い未来の価格の上がり下がり予測する形で売買注文を發します。このような効果は、金融工学の基盤になる考え方の中では考慮されていません。というのは、これを認めると、ある確率で市場価格を予測することができることになり、確率論に基盤を置く金融工学の基本的な前提条件が崩れてしまうからです。しかし、経済学の中でもマクロ経済学のインフレの理論では、過去の価格変動から未来の価格を予想するということがごく当たり前のこととして受け入れられています。インフレ理論では次のように考えます。例えば、過去 1 ヶ月の間に物価が 2 倍になったとします。そのとき、多くの人が次の 1 ヶ月にも物価が 2 倍になるだろうと予想して、それを受け入れたような行動をしたとします。すると、現実に物価は 2 倍になり、インフレ状態が持続することになる、というわけです。金融市場においても直近の過去から未来を予測する効果を考慮すると、価格の変位が指数関数的に増大する効果が簡単に導かれます。そして、それを利用すると、自然な形でいわゆるバブルや暴落の発生を説明することもできます。市場の様子をより正しく記述するためには、このような投機的な行動も含めたような理論体系を構築する必要があるのです。

2 市場のポテンシャル

投機による売買行動も前提としたうえで市場価格の変動を記述するモデルとして、私達は、PUCK モデルと名づけた時系列解析手法を開発しました[6]。このモデルでは、リアルタイムで入ってくる市場価格のデータに対し、まず、ごく短時間の相関を打ち消すような最適移動平均とよばれる移動平均を導入します[7]。次に、そのスムージングされた最適移動平均値の運動を考察するのですが、確率的な効果の他に、動力学的な効果として次のようなポテンシャル力を想定します。

$$\bar{P}(t+1) - \bar{P}(t) = - \frac{\partial}{\partial x} \phi(x) \Bigg|_{x = \frac{\bar{P}(t) - P_M(t)}{M-1}} + F(t) \quad (3)$$

ここで、 $\bar{P}(t)$ は最適移動平均をした市場価格、 ϕ はポテンシャル関数、 $f(t)$ はランダムなノイズ項です。ここで想定するポテンシャル力の中心は、下記のように $\bar{P}(t)$ の単純な移動平均値によって与えられるものとします[8]。

$$\bar{P}_M(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \bar{P}(t-k) \quad (4)$$

スーパー移動平均とよばれるこの価格と現在の最適移動平均価格との差の関数によって価格変動の動力学的な効果が記述できる、という仮定を設定するわけです。(3) 式でポテンシャル力が、ちょっと複雑に見える次の量の関数であると考え理由は、この量が、最適移動平均価格の価格差の一般化された移動平均になっているからです。

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{P}(t) - \bar{P}_M(t)}{M-1} \\ &= \frac{1}{M-1} \sum_{k=0}^{M-2} \Omega_k \{ \bar{P}(t-k) - \bar{P}(t-k-1) \} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 Ω_k は足し合わせると 1 になる移動平均の重みで、具体的な形はスーパー移動平均を元の定義にしたがって分解することで得られます。価格差を $\Delta \bar{P}(t) \equiv \bar{P}(t) - \bar{P}(t-1)$ とおき、その (5) 式での移動平均を $\langle \Delta \bar{P}(t) \rangle_M$ と表し、さらに、ポテンシャル関数の自明でない最低次の項だけを取り出すと、(3) 式は、次のような形に書くことができます。

$$\Delta \bar{P}(t+1) = \mu(t) \langle \Delta \bar{P}(t+1) \rangle_M + F(t) \quad (6)$$

これは、(2) 式と全く同じ自己変調の形になっています。つまり、取引間隔と同じような自己変調の効果が価格変動にも適用されると仮定するのです。

(6) 式の仮定の妥当性は、データから検証されます。 $\Delta \bar{P}(t+1)$ を縦軸、 $\langle \Delta \bar{P}(t) \rangle_M$ を横軸にとって、ある区間の市場価格のデータを入れると、グラフの中に点がプロットされます。その結果、図 6 のように自明でない相関が現れ

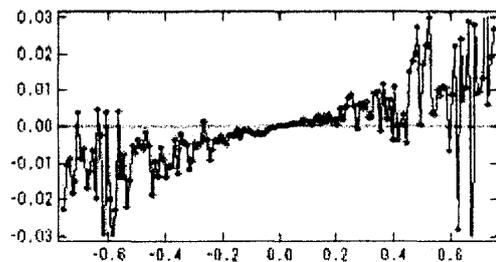


図 6 $\Delta P(t+1)$ と $\langle \Delta P(t) \rangle_M$ の関係

れば、相関係数を求めることによって、(6)式の係数、 $\mu(t)$ が見積もれることになります。このとき、観測する区間が小さすぎると μ の測定値の誤差が大きくなります。一方、観測する区間が大きすぎると、 μ の値は時間変化が平均化されて、0に近い値になってしまいます。ちょうどよい程度の大きさの区間で観測すると、自明でない μ の値が統計的に有為に測定されるのです。

ここで定義される μ の値は、(3)式に戻って考えると、放物型のポテンシャルの係数に対応します。定式化の慣習上、 $b = -2\mu$ 、という係数でポテンシャルを特徴付けると、次のようになります。ポテンシャルが下に凸の場合には、市場価格はスーパー移動平均値に引き寄せられるために、価格は安定です。図7の左のケースがこれに対応します。ポテンシャルが上に凸の場合は、市場価格はスーパー移動平均値から反発力を受けるので、市場価格は激しく大きく変動します。図7の中央のケースが対応します。そして、図7の右のように、ほとんどポテンシャルが平らで力が発生しない場合には、通常のランダムウォークとほぼ同じランダムウォークが実現します。それぞれ、対応する b の値は、正、0、負、です。

ここで観測されたポテンシャル力は、金融工学では想定されていない力学的な場が市場には実在していることを意味しています。 b が正の場合は、売り注文と買い注文が拮抗し、いわゆる需要と供給の力で市場が安定している状態とみなすことができます。それに対して、 b が負の場合は、価格が動くとそれを増強するような投機的な売買が起こる状態に対応します。図7の下段のグラフからわかるように、一日の中でも、市場は b が正の安定な状態と負の不安定な状態を行き来する形で絶えず変化しており、平均的にみると、 $b = 0$ 、になっています。大きなスケールで粗く見ると、ポテンシャルは見えなくなってしまうのです。

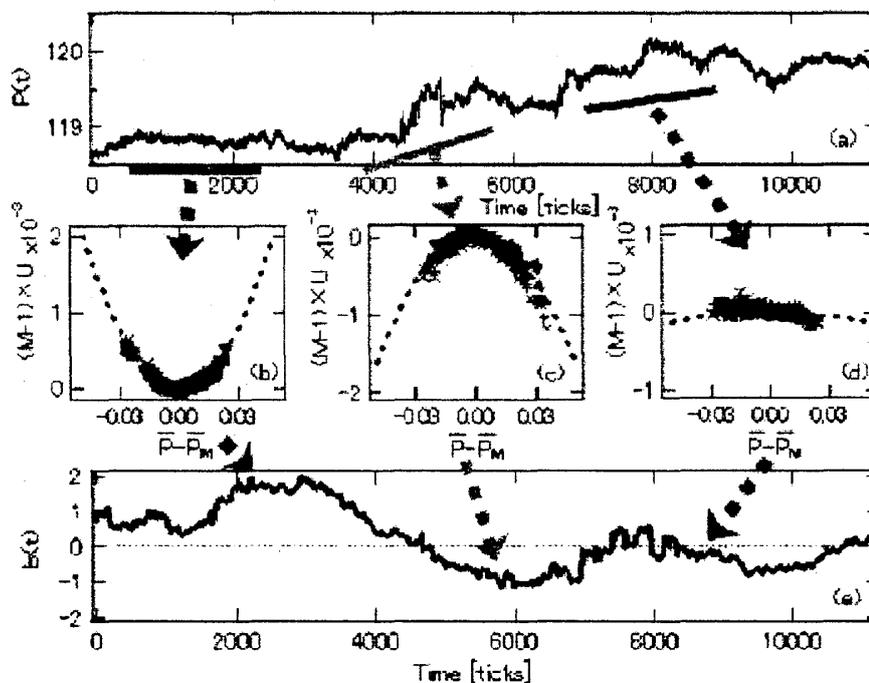


図7 ほぼ1日分の円ドルレートの例。3つの区間のデータに対して、ポテンシャルを求めたのが中段のグラフ。

3 ミクロからマクロへ

これまで見てきたように、市場の価格変動は、大きなスケールで見ると何の味気もないランダムウォークですが、秒単位のデータで見ると、ディーラの集団行動に基づいて安定になったり不安定になったり、速く動いたりゆっくりになったり、多様な振る舞いをしていくことがわかりました。このような秒単位のミクロのデータから定義される市場のポテンシャルを利用すると、大きなスケールでの拡散の様子や、バブル・暴落などの現象にも新たな切り口から解析することができます。

図8は、市場のポテンシャル係数が一定のときに、市場価格の拡散が、ポテンシャルがない場合と比較してどのように変化するかを示したグラフです。ある価格から t ステップ後に期待される標準偏差を $b=0$ の場合の値で割った数値で表現してあります。理論解析の結果は、数値シミュレーションの結果と完全に一致しています。グラフから読み取れるように、例えば、 $b=-1$ の場合には、標準偏差は2倍になりますから、拡散係数なら4倍の値になります[9]。

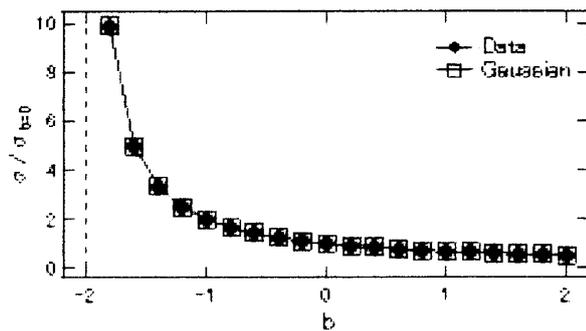


図8 ポテンシャル係数 b の値と拡散の速さの関係。 $b < -2$ では、動力学効果が拡散の効果よりも強くなり、価格は指数関数的に変動することになる。

このグラフで注目すべきことは、 $b=-2$ で拡散係数が発散することです。このとき、不安定なポテンシャルによる力の効果がランダムな加算ノイズの項よりも大きくなり、ノイズ項のために価格変動の方向が変わることがなく、価格は一方向に動きます。 $b < -2$ の場合には、この力学的な価格の動きは時間と共に指数関数的に増大するようになります。おもしろいのは、指数関数的な市場価格の動きは、実際に、いわゆるバブルや暴騰・暴落のときに観測されることです。つまり、このような市場のポテンシャル力の項を付加した(3)式のような価格の確率動力学モデルを用意しておけば、ミクロな市場のランダムに近い振る舞いだけでなく、バブルや暴落のような大きなスケールの力学的な現象も自然に記述することができるのです。さらには、ハイパーインフレのようなマクロなスケールで観測される超指数関数的な価格の発散も、観測事実と矛盾しないような形で体系の中に入れて含めることができます[10]。

4 今後の展望

私達の研究室では、コンピュータネットワークを介してリアルタイムで入ってくる市場のデータから上記の PUCK 解析によってポテンシャルを観測するプログラムを作り、その

実務上での価値を検証する応用研究に入っています。金融工学では単に確率的に未来の価格の拡散を予想していたのに対し、この方法を使うと、市場が安定化したり、あるいは、投機的な行動によって不安定化したりする様子をリアルタイムに定量的に評価できるので、トレーディングの補助として有効なだけでなく、将来的には、自動的に最適な売買オーダーを発するような自動トレーディングシステムにも発展していくものと期待しています。実は、外国為替市場では、この1、2年の間にコンピュータによる自動売買が解禁され、人間の勘と経験の勝負だった金融市場が、コンピュータのプログラムの勝負にかわりつつあるのです。市場の売買注文の大半がコンピュータのプログラムになったらおそらく、市場の特性は今とは違うものになるでしょう。そのような状況でも PUCK 解析の手法がそのまま使えるかどうかはわかりませんが、常にデータと突合せ、必要に応じてモデルを改良していくことによって対応できるものと期待しています。

ここでは、自由市場のひとつとして、円ドル市場のことに限定して具体的な話を紹介してきましたが、世界中では自由市場の数は、100万以上あります。それらの市場が時によって、連動したり(図9)、逆に、反対の動きをしたり(図10)、様々な複雑な応答を見せます[11]。単一の市場を記述することができるようになったら、次に必要になるのは、市場同士の相関関係まで含めたような記述です。無数にある市場全てに目を配ることは人間には不可能ですから、コンピュータによる自動的な評価システムに関するニーズは非常に高くなっています。

また、市場に限らず、例えば、スーパーマーケットやコンビニでの詳細な販売データ、企業同士のつながりのデータなどもアカデミックな研究の対象になってきています。特に、小売商品の販売データに関しては、ほとんどの企業は、POS システムを導入しており、一品一品の詳細なデータが蓄積されています。そのような膨大なデータを解析する研究は、今まさに始まったばかりなのです。

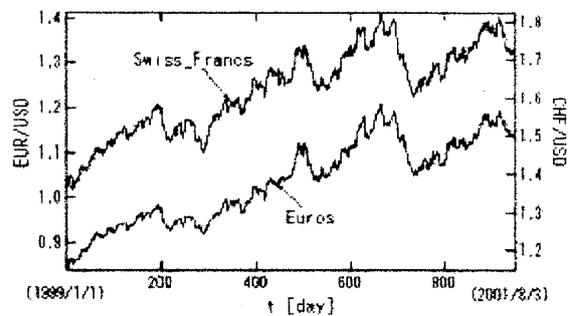


図9 スイスフランとユーロの対ドルレートの変動の例。かなり相関が強いことがわかる。

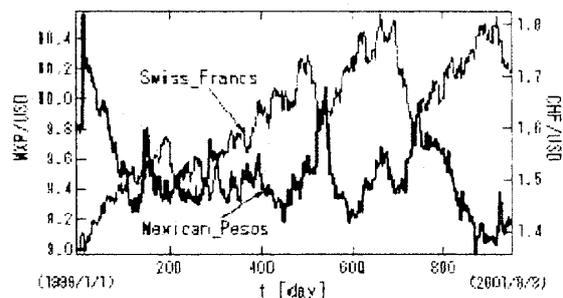


図10 スイスフランとメキシコペソの対ドルレートの関係。図9とは対照的に、かなり強い反相関が見られる。

参考文献

- 1 Takaaki Ohnishi, Hideki Takayasu, Takatoshi Ito, Yuko Hashimoto, Tsutomu Watanabe, Misako Takayasu, in preparation.
- 2 T.Mizuno, S.Kurihara, M.Takayasu, and H. Takayasu
Physica A 324(2003), 296-302
- 3 Takayuki Mizuno, Tohru Nakano, Misako Takayasu and Hideki Takayasu
Physica A 344(2004), 330-334
- 4 高安美佐子, 数理科学, 2002, 10月号, 33-37 "取引数のゆらぎと心理時間"
- 5 Misako Takayasu and Hideki Takayasu
Physica A 324(2003), 101-107
- 6 Misako Takayasu, Takayuki Mizuno and Hideki Takayasu
Physica A 370 (2006), 91-97
- 7 Takaaki Ohnishi, Takayuki Mizuno, Kazuyuki Aihara, Misako Takayasu and Hideki Takayasu
Proceedings of "Practical Fruits of Econophysics" (edited by H. Takayasu, Springer, 62-66, 2005)
- 8 Misako Takayasu, Takayuki Mizuno, Takaaki Ohnishi, and Hideki Takayasu
Proceedings of "Practical Fruits of Econophysics" (edited by H.Takayasu, Springer,29-32, 2005)
- 9 Takayuki Mizuno, Hideki Takayasu, and Misako Takayasu
To appear in **Physica A** [<http://arxiv.org/abs/physics/0608115>]
- 10 T.Mizuno, M.Takayasu, and H.Takayasu
Physica A 308(2002), 411-419 (cond-mat/0112441)
- 11 Takayuki Mizuno, HidekiTakayasu, and Misako Takayasu
Physica A 364 (2006), 336-342

経済物理学全般に関する教科書は、

高安美佐子・高安秀樹、エコノフィジックスー市場に潜む物理法則（日本経済新聞社 2001）

経済物理学に関する一般書としては、

高安秀樹、エコノフィジックスの発見（光文社新書 2004）