学 位 審 査 報 告 書

新制
経
232

（ ふ り が な ） 氏 名	いわき ひでき 岩 城 秀 樹
学位（専攻分野）	博 士 （ 経 済 学 ）
学 位 記 番 号	論経博 第 339 号
学位授与の日付	平 成 20 年 7 月 28 日
学位授与の要件	学位規則 第４条第２項該当

（ 学 位 論 文 題目 ）

確率解析とファイナンス

論文調査委員	主 査	准教授	江 上 雅 彦
		教 授	森 棟 公 夫
		教 授	川 北 英 隆

経 済 学 研 究 科

氏名	岩城　秀樹

(論文内容の要旨)

本論文は，確率解析手法を駆使した連続時間経済における市場均衡に基づく資産価格評価方法の主要アプローチの 1 つであるマルチンゲール法について詳細にレビューした後に，最近のファイナンスと保険理論の融合の潮流を受けて，マルチンゲール法による新たな保険料計算原理を示したものである。

伝統的リスク理論では，保険料は物理確率の下での期待損失に基づいて計算されていた。しかしながら，保険商品やその派生商品が市場で取り引きされ，ファイナンシャル・リスクに曝されているのであれば，保険料にファイナンシャル・リスクを反映させる必要がある。その一つの方法が市場均衡に基づく保険料計算原理である。市場均衡に基づく保険料計算原理は，従来，単一期間ないしは，2 期間モデルに限定されていたが，本論文では，市場均衡に基づく保険料計算原理を連続時間経済モデルへ一般的な拡張を行っている。

本論文の主たる結論は「市場均衡における状態価格密度が代表的経済主体の Arrow-Pratt 型絶対的危険回避度を用いて表現される」という Bühlmann(1980, 1983)と同様の結論を，より現実的に妥当な経済モデルの下で導出したこと。それに加えて，各経済主体が冪型もしくは指数型の効用関数を有する場合において状態価格密度を解析的に閉じた形で導出することによって，均衡において内生的に決定される保険料計算原理を陽に導出したことである。以下，本論文の具体的な内容について述べていく。

本論文は，３部構成で全１５章からなっている。第 I 部（第１章－第４章）では，本論文で展開される数理ファイナンス及び保険数理アプローチに必要不可欠な，測度，積分（Lebesgue 積分)，確率論の要点を詳細かつ包括的に本論文において首尾一貫的となるようにしてまとめている。第１章では，数理ファイナンスの価格付けで最も基礎をなす測度の定義とその性質について議論を行っている。第 2 章では，可測関数とその(Lebesgue での意味での)積分の定義とその性質について議論を行っている。第 3 章では，第 III 部で展開される価格変動モデルに用いられる確率過程の定義に必要な直積測度と確率過程の積分に必要な関数空間の定義とその性質について議論している。第 I 部最後の第 4 章では，確率過程の積分をはじめとする解析に必要な種々の収束概念の定義とその性質について議論している。

第 II 部（第 5 章－第 11 章）では，第 I 部での議論を踏まえて，本論文で展開される数理ファイナンス及び保険数理アプローチに必要不可欠な，確率積分の要点を詳細かつ包括的に本論文において首尾一貫的となるようにしてまとめている。具体的には，第 5 章で，第 III 部で展開される価格変動モデルに用いられる確率過程の定義と性質について一般的に議論するとともに，証券価格変動のモデルとして数理ファイナンスで最も頻繁に用いられる Brown 運動の性質について議論している。続く，第 6 章では，第 III 部で用いられるマルチンゲール法の基本ツールとなるマルチンゲールについて，その定義と性質について議論している。第 7 章では，Brown 運動の確率積分である伊藤積分とその性質について議論している。第 8 章では，価値過程の変動の記述に必要な確率微分方程式の定義とそ

の解について議論し，第 III 部での議論に必要な解に関するいくつかの主要公式についてまとめている。本論文では，一般的なリスクの変動過程として，跳躍過程を採用し，資産価格の変動に伊藤過程を用いている。これらの確率過程は一般に半マルチンゲールであるが，第 9 章と第 10 章では，半マルチンゲールについて議論を行っており，第 9 章では，連続な半マルチンゲールについての確率積分を基軸にして，主とし第 III 部で展開される証券価格変動モデルの解析上の主要なツールとなる表現定理や測度変換といった確率率解析上の主要な概念と結論をまとめている。一方，第 10 章では，不連続部分を含む一般的な半マルチンゲールの積分と伊藤積分について議論している。第 II 部最後の第 11 章では，第 10 章の一般的な議論を受けて，半マルチンゲールを，本論文においてリスク変動過程として用いられる点過程に特定した場合について資産価格の導出とポートフォリオ選択に必要となる表現定理と測度変換といった確率解析上のツールについて焦点を絞って議論を展開している。

第 III 部(第 12 章－第 15 章)は，本論文の中核をなし，本論文の最もオリジナルな部分をなす。ここでは，第 I 部，第 II 部で準備した数理解析手法を駆使して現代の数理ファイナンス及び保険数理での主要テーマである連続時間経済モデルでのリスク評価と資産価値評価の議論を一般的に展開した後で，数理ファイナンスにおける資産価格評価方法の主要アプローチの 1 つであるマルチンゲール法によって新たな保険料計算原理を導出している。具体的には，第 12 章で後の証券市場モデルでの基礎を与える Black-Scholes モデルの下に証券価格の評価に必要な，裁定の議論を展開し，無裁定とマルチンゲール法による条件付請求権の価格評価法についてまとめている。第 13 章は，第 12 章での証券市場を一般化し，証券価格が伊藤過程にしたがう場合に，個々の経済主体の最適消費・ポートフォリオ問題のマルチンゲール法による解法を展開している。続く，第 14 章では，第 13 章で展開した個々の経済主体の最適消費・ポートフォリオ問題の中で導出された解を基に，有限数の経済主体が存在する場合の純粋交換経済での一般均衡問題を定式化し，その下での均衡を導出することによって，均衡資産価格を導出し，それが，存在し，かつ一意であることを示している。最後の第 15 章では，前章の経済モデルに 2 重確率ポアソン過程で表されるリスクを導入し，そのリスクに対する保険を取引する市場を導入し，前章で展開した均衡を，保険を含むものに拡張することによって，均衡での一般的な状態価格密度価格過程を導出した上で，均衡での資産価格と保険料計算原理を導出している。さらには，当該経済における代表的主体を導入することによって，保険料計算原理を代表的経済主体の危険回避度による表現を行っている。これによって，個々の経済主体が特定の効用関数，指数型及び冪型効用関数にしたがう場合に，内生的に決定される保険料計算原理を陽に閉じた形で求めるとともに，従来，保険分野で実務的にも受け入れられ用いられていた保険料計算原理である Esscher 原理との関係を明確に示すとともに，どのような条件において Esscher 原理が成立するのかという前提条件を明確に示している。

氏名	岩城　秀樹

(論文審査の結果の要旨)

本論文は，数理ファイナンス分野において，連続時間経済での市場均衡に基づく資産価格評価方法の主要アプローチの１つとされるマルチンゲール法について詳細にレビューした後に，最近のファイナンスと保険理論の融合の潮流を受けて，マルチンゲール法に基づく新たな保険料計算原理を初めて示した，真に意欲的な学術的成果である。

本論文でも指摘されているように，伝統的リスク理論では，保険料は物理的確率の下での期待損失に基づいて計算されていた。しかしながら，保険商品やその派生商品が市場で取り引きされ，ファイナンシャル・リスクに曝されているのであれば，保険料にファイナンシャル・リスクを反映させる必要がある。その一つの方法が市場均衡に基づく保険料計算原理である。既存の文献としては，Bühlmann(1980)の単一期間純粋交換市場均衡の下での保険料計算原理が先駆的であり，その後，単一期間保険料計算を多期間期間へ拡張する試みがいくつか行われてきたが，連続時間経済の下での市場均衡に基づく保険料計算原理の導出は行われていなかった。本論文では，連続時間経済モデルを用いることの利点を説明した上で，連続時間経済の下での保険料計算原理の導出し，従来の市場均衡での保険料計算原理との関係を明確に指摘した．このことの学術的貢献は極めて大きい。

本論文は，Bühlmann 流の市場均衡に基づく保険料計算原理を連続時間経済モデルへ一般的な拡張を行った最初の文献と位置付けられるが，本論文の分析対象は，ファイナンス及び保険分野の研究者にとって本質的な問題であり，本論文で示された結果は，極めて示唆に富んだ内容を持っていると言える。以下では，本論文がファイナンス及び保険分野の研究において成し得た貢献のうち，特に重要と考えられる点に絞って評価することにしたい。

本論文は，通常の連続時間経済でのファイナンス・モデルを保険リスクを組み込む形で拡張したものと捉えることができる。ファイナンス理論のメインストリームでは，Merton(1973)をはじめとして均衡証券価格を導出するために連続時間消費/ポートフォリオ選択モデルが用いられている。1980 年代終盤，最適消費/ポートフォリオ選択問題を解く効率的方法として，Karatzas et al. (1987)などによってマルチンゲール法が提唱されたが，従来の動的計画法の HJB 最適方程式を解くことに代えて，マルチンゲール法を用いることの利点は，連続時間ないし多期間経済における最適消費/ポートフォリオ選択問題をあたかも単一期間における問題であるかのように扱うことが可能となり，そのことによって，導出される解の経済学的解釈が容易かつ明確なものとなることにある。しかしながら，従来，ファイナンスにおける連続時間消費/ポートフォリオ選択モデルは，保険リスクを明示的に扱っておらず，保険リスクの評価においては，マルチンゲール法は用いられていなかった。一方，保険商品やその派生商品が市場で取り引きされ，ファ

イナンシャル・リスクに曝されているのであれば，保険料にファイナンシャル・リスクを反映させる必要があるはずであるが，伝統的リスク理論では，保険料は物理的確率の下での期待損失に基づいて計算されていており，ファイナンシャル・リスクは保険料に明示的に反映されていなかった。ファイナンシャル・リスクを保険料に反映させる一つの方法が市場均衡に基づく保険料計算原理であるが，従来の市場均衡に基づく保険料計算原理は，単一期間ないしは2期間の純粋交換市場均衡モデルにとどまっていた。

被保険者の曝されているリスクは，非連続的に生起する希少事象であるから，ポアソン過程のような連続時間/離散状態確率過程を用いてモデル化するのが妥当である。一方，ファイナンス理論では，証券価格は，連続時間/連続状態確率過程によって近似してモデル化するのが通常である。したがって，保険リスクと証券価格変動リスクを両方考慮する経済モデルとしては，保険リスクと証券価格変動リスクの差異が曖昧となってしまう離散多期間モデルよりも，連続時間経済モデルの方が優位と言える。

本論文では，保険を含む連続時間消費/ポートフォリオ選択モデルを用いることによって解析的に一般的に保険料計算原理を導出した上で，各経済主体が冪型もしくは指数型の効用関数を有する場合おいて，閉じた形の保険料計算原理を内生的に導出した。さらに，指数型効用関数を持つ場合には，従来から保険料計算原理として実務的に多用されてきた Esscher 変換に一致することを示した。このことは，Esscher 原理を用いることの経済合理的な前提条件を与えるものとして，経済学的に大きな意義を持っており，高く評価できると言えよう。

以上のように，本論文は非常に水準が高く，しかもオリジナリティーに溢れたものであるが，もちろん，本論文にも，不足している点ないし今後に克服すべき課題がないわけではない。まず第１に，本論文では，保険市場が完備市場であるとの仮定の下に分析がなされているが，現実的には，保険の対象としているリスクを既存の取引可能な資産によって完全リスク・ヘッジできるとは想定し難く，保険市場は非完備市場とする方が，より現実的である。第２に保険の対象としているリスクの変動過程を２重確率ポアソン過程として外生的に与えているが，このことの理由が，希少事象の生起を表す連続時間過程の数学的な理想型が２重確率ポアソン過程であるとの指摘にとどまっており，このことの現実的妥当性の検証がなされていない。第３に，本論文の保険の対象は，１つのリスク過程としているが，生命保険と損害保険では，対象としているリスクが異なり，当然リスク過程も異なると考えられる。このことの考察については触れられていない。

しかしながら，本論文の貢献は，明らかに，これらの不足を補って余りあるものである。実際，今述べた３点の不足点については，それらを考慮した分析を行うことは，本来，保険分野において最新の数理ファイナンスの成果を駆使して「保険料計算原理」の導出を初めて行った本論文の続編においてなされるべきことであろう。よって，本論文は博士（経済学）の学位論文として価値あるものと認められる。なお，平成２０年４月４日，論文内容とそれに関する試問を行った結果，合格と認めた。