学 位 審 査 報 告 書

（ ふ り が な ） 氏 名	やまかわ　だいすけ 山川　大亮
学位（専攻分野）	博　士　（　理　学　）
学 位 記 番 号	理　博　第　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科　数学・数理解析専攻

（学位論文題目）

Geometry of Multiplicative Preprojective Algebra

（ 乗法的箙多様体）

論 文 調 査 委 員	（主査）　中島　啓　教授 深谷賢治　教授 河野　明　教授

理 学 研 究 科

氏　名	山川　大亮

（論文内容の要旨）

乗法的箙多様体は、（主査の）中島が導入した箙多様体の定義方程式を、`加法的’なものから`乗法的’に置き換えたものである。定義関係式自体は、すでに Crawley-Boevey と Shaw が導入していたが、さらに幾何学的不変式論の立場による安定性の条件を考えることによって、代数多様体として正しい定義を与えたのは、本博士論文の山川によるものが始めてである。これは、通常の箙多様体の単純な拡張ではなく、例えばリーマン面上のフィルター付き局所系のモジュライ空間、すなわちリーマン面から有限個の点を除いた多様体の基本群の表現のモジュライ空間を例に含むものであり、きわめて興味深い一般化である。たとえば、この空間は、いわゆるリーマン・ヒルベルト対応を通じて複素常微分方程式と関係しており、特にモジュライの次元が低いときには、パンルベ方程式と関係して､解析的な立場からの多くの研究や､最近の稲場･岩崎・斎藤による代数幾何からの研究があったが、乗法的箙多様体の立場から取り扱うことにより、より精密な性質が調べられるようになった。

乗法的な箙多様体について本論文で示されたいくつかの結果を説明する。まずは、乗法的箙多様体が Weyl 群の対称性をもつことを、reflection functor とよばれる同型写像を導入することで証明した。これは、上の Crawley-Boevey と Shaw による研究において、安定性を考えないときにはすでに導入されていたものであるが、それを安定性を考えた場合に自然に拡張したものになる。また、パンルベ方程式の研究において現れたベックルンド変換を、はるかに一般の状況で考えたものになっている。第二に乗法的箙多様体の上の構成可能関数の空間に、Kac-Moody リー環の表現の可積分表現の構造が入ることを示した。この結果は通常の箙多様体の場合に知られていた結果の類似である。

第三の結果が、上にあげたリーマン面上のフィルター付き局所系のモジュライ空間との対応と並んで、本論分のもっとも深い結果である。箙多様体の定義に用いられる安定性はパラメータに依存して決まるが、それが generic であるものをθとし、一方、一番複雑な特異点を許すもっとも基本的なパラメータを 0 であらわすことにすると、安定性θを持つ乗法的箙多様体M_θとし、0 に対応するものをM_0とすると、射影射$M_\theta \to M_0$が定義される。これは、一般的な点の周りであれば、同型になるがM_0の特異点の逆像が、乗法的箙多様体のもっとも重要な情報を含んでいる部分であると思われる。本論文では、これが、通常の箙多様体について同様に定義される写像の、逆像に同型であることが証明された。端的に言えば、乗法的箙多様体は、通常の箙多様体と同じだけかそれ以上の複雑さをもっているということを現している。

氏　名	山川　大亮

（論文審査の結果の要旨）

リーマン面上のフィルター付き局所系のモジュライ空間は、論文内容の紹介で述べたように複素常微分方程式と関係する重要な対象である。たとえばガウスの超幾何関数は３点に極をもつ常微分方程式の解として捉えられることに現れるように、歴史的に重要な役割を果たしていた関数の影に常微分方程式があることは多々あることである。そのような関数、すなわち常微分方程式の解を調べるときに重要な性質となるのが、特異点の周りを一周する曲線にそって解析接続したときに解が、どのようにモノドロミー変換を受けるかということである。これが、すなわち、リーマン・ヒルベルト対応として局所系と微分方程式が対応する、という主張に他ならない。

申請者の博士論文で研究されているのは、このような古典的なテーマからさらに一段階進み、ひとつの常微分方程式、ひとつの解について着目するのではなく、それがパラメータを持つときに、解の全体がもつ空間＝モジュライ空間の幾何学的な構造を研究する、というテーマである。このテーマは、単に常微分方程式の解だけにとどまらず、より高い次元の多様体上の微分方程式系などでも考えられてきており、近年の幾何学の研究においてもっとも重要なテーマのひとつとなっている。

申請者は、このモジュライ空間を乗法的箙多様体の例であると捉え、研究を行った。はじめにガイドラインとなったのは通常の箙多様体で知られている結果を乗法的箙多様体の場合に拡張するという結果であり、論文内容の要旨で説明した最初の二つの結果である。しかし、この結果にとどまっていたのでは、通常の箙多様体の単なる人工的な拡張でしかないのではないか、と捉えられる恐れもあったが、これに続き、乗法的箙多様体が通常の箙多様体と同じだけかそれ以上の複雑さをもっているという、論文内容の要旨で説明した第三の結果を証明した。Hausel は、数年前にリーマン面上のフィルター付き局所系のモジュライ空間の混合ホッジ数について驚くべき予想を提出したが、雑にいえば、ある次数の部分が、通常の箙多様体のベッチ数と等しい、という主張であり、今回の結果は Hausel の予想となんらかの関係があると思われ、今後の進展が期待されるところである。

また本論文は海外の一流誌（International Mathematics Research Papers）にすでに掲載されている。

以上の理由により、大学院在学５年未満であるが、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また、論文内容とそれに関連した試問の結果、合格と認めた。