学位審査報告書

新制 理 1493

（ふりがな）	まさき　さとし
氏名	眞■崎　聡
学位（専攻分野）	博士（理学）
学位記番号	理博　　第3352　号
学位授与の日付	平成21年3月23日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科・専攻	理学研究科 数学・数理解析専攻

（学位論文題目）

Asymptotic expansion of solutions to the nonlinear Schrödinger equation with power nonlinearity
（べき乗型非線型項をもつ非線型シュレディンガー方程式の解の漸近展開について）

論文調査委員	教授　　堤　誉志雄 教授　　宍倉　光広 教授　　泉　正己

理学研究科

氏　名	眞﨑　聡

（論文内容の要旨）

べき乗型非線形性を持つ非線形シュレディンガー方程式に対しては，解の存在だけでなく，その大域的な振る舞いについても多くの研究がなされている．解の挙動は波の分散性と非線型相互作用との競合により決定され，大雑把には次のように分類される．一つ目は分散性が勝り波の振幅が時間減衰する散乱の場合であり，この場合の非線型相互作用は弱く，線型の方程式の解で時間が十分経過した後の解の漸近挙動を近似することができる．二つ目として，分散性と非線型相互作用が拮抗し一定の空間形状が保たれ続ける場合は，ソリトン解のような空間的に局所化した解が存在する．三つ目は，非線型相互作用が勝り有限時間で解が爆発する場合である．本論文は，最初に挙げた散乱の場合において，解の時刻無限大での漸近挙動をさらに詳しく調べるのが目的である．

解の散乱状態を記述する散乱理論においては，波動作用素及び散乱作用素を構成することが第一義的な目標となる．しかし，非線形シュレディンガー方程式の場合，波動作用素や散乱作用素も非線形であり，完全可積分系でないときは，線形散乱理論のようにスペクトル解析に帰着することはできない．そのため，解の時間無限大の近傍における漸近挙動を解析するためには，精度が高くかつ可能な限り単純な近似解を構成することが重要となる．その一つの方法が，解の漸近展開である．真崎氏は，非線形相互作用が短距離型である場合に，時間無限大の近傍における，2 種類の解の漸近展開を与えた．

一つ目は，常微分方程式における Picard 近似を抽象化して，非線形シュレディンガー方程式の場合に拡張したものである．この手法は，非線形シュレディンガー方程式だけでなく，非線形熱方程式や非線型クライン・ゴルドン方程式にも適用でき，非常には広い範囲の非線形発展方程式に適用できるという利点がある．しかし他方で，漸近展開が抽象的で複雑である．その欠点を補うため二つ目として，いわゆる MDM 分解（位相伸張変換分解）を用いて，漸近展開に現れる各項を線形シュレディンガー方程式の漸近形に近い形で求めた．これは MDM 分解を用いているため，非線形シュレディンガー方程式にしか適用できないが，漸近展開における各項は具体的な形で書くことができ，その解析も容易であるという利点がある．特に，非線形項の次数が奇数次のときは，いくらでも高次の近似を具体的な形で求めることができるため，他の問題への応用も期待される．

従来の結果では，摂動のない線形シュレディンガー方程式の解を第ゼロ近似として取り，線形解の非線形相互作用を表す項を第 1 次近似として選んでいたが，さらに高次の漸近展開を求めることは容易ではなかった．たとえば，第ゼロ近似と第 1 近似の和を非線形項にそのまま代入しても，必ずしも精度の良い第 2 近似は得られない．真崎氏は，函数空間を適切に設定し，解の減衰効果をより精密に解析することにより，精度の良い漸近展開を与える数学的アルゴリズムを作ることに成功した．このような解析は，非線形シュレディンガー方程式の半古典近似解析にも応用できることが期待される．

氏　名	眞﨑　聡

（論文審査の結果の要旨）

非線形シュレディンガー方程式に対し，時間が十分経過したときの解の漸近挙動を研究することは，数学的にも数理物理学的にも興味深い問題である．この問題については，通常非線形散乱理論の枠組みで解析が行われる．しかし，線形散乱理論と異なり，非線形散乱理論では波動作用素や散乱作用素も非線形であり，完全可積分系でなければ，線形のスペクトル解析に帰着することは困難である．そこで，より精密な解析を行うための方法として，解の漸近展開が重要となる．

眞﨑氏は，短距離型非線形相互作用を持つ非線形シュレディンガー方程式に対し，二つの種類の時間無限大における解の漸近展開を与えた．一つは，常微分方程式において古くから知られているPicardの逐次近似法を，抽象的函数空間に拡張したものである．二つ目は，MDM分解を用いた摂動のない線形シュレディンガー方程式の解の漸近形を用いて，具体的な形で漸近展開を求める方法である．前者は漸近展開が抽象的な形で与えられるため必ずしもその解析は容易ではないが，非線形シュレディンガー方程式だけでなく他の非線形発展方程式にも適用でき．他方，後者は短距離が多相互作用を持つ非線形シュレディンガー方程式の特徴を最大限使っているため，非線形シュレディンガー方程式に限れば漸近展開が具体的な形で書けるため他の問題への応用も期待できる．

既知の結果では，摂動のない線形シュレディンガー方程式の解を第ゼロ近似として取り，線形解の非線形相互作用を表す項を第1次近似として選んでいたが，さらに高次の漸近展開を求めることは容易ではなかった．なぜなら，第ゼロ近似と第1近似の和を非線形項にそのまま代入しても，必ずしも精度の良い第2近似は得られないからである．時間無限大での漸近展開を研究するためには，時間無限大で初期値を与え非線形シュレディンガー方程式を解く，いわゆる，終値問題(final state problem)を精密に解析することが鍵となる．そのために，まずPicard逐次近似から得られる項を非線形項の構造を用い，時間減衰のオーダーごとに分解する一般的な枠組みを与えた．さらに，それぞれの項の近似を求めることで，精密な近似を得ることに成功した．

よって，本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，合格と認めた．