学位審査報告書

新制
理
1493

（ふりがな）	やまだ　ともひろ
氏名	山田　智宏
学位（専攻分野）	博士（理学）
学位記番号	理博　　第 3354 号
学位授与の日付	平成21年3月23日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科・専攻	理学研究科 数学・数理解析専攻

（学位論文題目）

Unitary super perfect numbers
（基準超完全数）

論文調査委員	教授　池田　保 教授　吉田　敬之 教授　齋藤　裕

氏　名	山田　智宏

（論文内容の要旨）

整数論的関数の研究の中で, 一つの領域を構成しているのは、整数論的関数を反復させたときの挙動の研究である.

約数に関連する未解決の問題として特に有名なのが奇数の完全数, すなわち $\sigma(N)=2N$ を満たす奇数 N が存在するか否かという問題である. もちろん、これ以外にも約数に関連する未解決の問題で、初等的かつ単純に定式化できる問題は多数ある. 奇数の完全数が存在するか否かは未解決だが, 部分的な結果は多数得られている. 山田氏自身もある特別な形の素因数分解をもった奇数の完全数に関する結果を得ている.

さて, 整数論的関数の反復としては $\sigma(\sigma(\ldots\sigma(N)\ldots))$ といったものを考えるのだが, 山田氏は今のところ最も単純な, 2回反復を主に考察している. この場合, 完全数に対応するのは $\sigma(\sigma(N))=2N$ を満足する N で, これを超完全数と呼ぶ. 超完全数に関しては, 山田氏は, $\sigma(N)$ の素因数の個数が制限されているときに、$\sigma(\sigma(N))=2N$ を満たす奇数 N が有限個しか存在しないことを示した論文も発表している.

通常の約数の和に代わって, 基準約数の和 $\sigma^*(N)$ を考える。ここで、N の基準約数とは、 N の約数 d で、 $(d,N/d)=1$ を満足するものである. 約数の和に関する問題は、多くの場合、対応して基準約数の和に関する問題が存在する. 超完全数に対応するのは $\sigma^*(\sigma^*(N))=2N$ を満足する N で, これを基準超完全数と呼ぶ.

山田氏は, 主論文において基準超完全数について考察した. 9 と 165 が奇数の基準超完全数であることはすでに知られていたが, 偶数の基準超完全数が多数知られているのに対して, 奇数の基準超完全数はこの 2 つ以外発見されていなかった. 主論文の結果は, 実は 9 と 165 だけが奇数の基準超完全数であることを証明したものである.

証明は次のようにして行われる. N が奇数の基準超完全数ならば, $2N=\sigma^*(\sigma^*(N))$ を満たすことから, $\sigma^*(N)$ は高々2つの相異なる素因数の積 $q_1^{f_1}q_2^{f_2}$ でなければならないことがわかる. $N=\prod_i p_i^{e_i}$ （p_i は相異なる素数）とおくと, $\sigma^*(p_i^{e_i})=p_i^{e_i}+1$ は q_1,q_2 から合成されなければならない. これから, $\prod_i \sigma^*(p_i^{e_i})/p_i^{e_i}=\prod_i(1+p_i^{-e_i})$ が小さくなければならず, それ故に $\sigma^*(\sigma^*(N))/N$ が 2 より小さくなければならない. 以上のような議論により山田氏は上記の結果を証明した.

氏　名	山田　智宏

（論文審査の結果の要旨）

山田智宏氏の研究の中心は整数論的関数、特に約数に関連する整数論的関数にある．約数に関連する未解決の問題として特に有名なのが奇数の完全数，すなわち $\sigma(N)=2N$ を満たす奇数 N が存在するか否かという問題である．もちろん、これ以外にも約数に関連する未解決の問題で、初等的かつ単純に定式化できる問題は多数ある．奇数の完全数が存在するか否かは未解決だが，部分的な結果は多数得られている．

通常の約数の和に代わって，基準約数の和 $\sigma^*(N)$ を考える．ここで，N の基準約数とは、 N の約数 d で、 $(d, N/d)=1$ を満足するものである．約数の和に関する問題は，多くの場合，対応して基準約数の和に関する問題が存在する．超完全数に対応するのは $\sigma^*(\sigma^*(N))=2N$ を満足する N で，これを基準超完全数と呼ぶ．

山田氏の論文　"Unitary super perfect numbers" ではこのような基準超完全数で奇数のものは 9 と 165 だけであることを証明している．証明は奇数の基準超完全数が実は高々２つの素因数しか持たないことを示し，それを用いて各素因数の大きさを評価することにより基準超完全数の大きさを評価することによってなされる．山田氏のこの論文は Math. Pannon 19 (2008) 37–47 に掲載されている．

この論文で使われた議論はそのままでは超完全数（自然数 N で $\sigma(\sigma(N))=2N$ が成り立つもの）には適用できない．$\sigma(\sigma(N))$ が 2 の奇数倍だとしても，$\sigma(N)$ が多くの素因数を持っている可能性があり，$\sigma(N)/N$ の大きさは N の素冪因数ではなく，素因数によって主に決まるからである．しかし，$\sigma(N)$ の素因数の個数が制限されているときには $\sigma(\sigma(N))=2N$ を満たす奇数 N が有限個しか存在しないことを示すことができる．これには対数の一次形式に対する下からの評価を用い，素因数 p が小さいところに密集していないことを示す議論が必要である．この結果を山田氏は別の論文にまとめて発表している．

今後の山田氏の研究では，同様の現象を本来の問題である奇数の完全数について考え、あるいは一般の整数論的関数の値についても研究する，という方向での拡張が期待される．

以上のように本論文は数学的に興味深いものであり、よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また論文内容に関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。