学 位 審 査 報 告 書

（ ふ り が な ） 氏　　　　　名	おおはし　ひさのり 大　橋　　久　範
学位（専攻分野）	博　　士　（　理　学　）
学 位 記 番 号	理　　博　　　第　　　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科　数学・数理解析　専攻

（学位論文題目）

On the number of Enriques quotients of a $K3$ surface

（$K3$ 曲面のエンリケス商の個数について）

論 文 調 査 委 員	（主査）　向井　茂　教授 森　重文　教授 中山　昇　准教授

理　学　研　究　科

（論文内容の要旨）

コンパクト複素曲面で単連結かつ標準束が自明なものは K3 曲面と呼ばれる。エンリケス曲面は K3 曲面を自由対合（位数 2 の自己同型）で割って得られる曲面である。この特徴付けはエンリケス曲面のモジュライを扱う上で基本的である。これらの曲面においては、自己同型群が無限離散群を含み得るところに昔から興味が持たれてきた。従って、1971 年に Piatetskii-Shapiro と Shafarevich のトレリ型定理により自己同型群の具体的計算が可能になるとすぐに、自己同型の特徴付けや分類が数多く研究されるようになった。主論文の主定理はまず次である。これは X の持つ有限性の一つの具現化と言える。

定理1：XをK3曲面とするとき、Aut(X)の有限部分群は共役を除いて有限個である。

さて、ここからはK3曲面を少し限定し、エンリケス曲面を与えるような自己同型即ち自由対合について考えていく。K3曲面上の自由対合の存在については、1983年にNikulin、浪川によって次が知られている：X上に自由対合が存在する必要十分条件は、エンリケス格子MのNS(X)への原始的埋め込みで、直交補格子Kが長さ(-2)の元を持たないものが存在することである。一方1986年に金銅は特別なK3曲面が二つのエンリケス商Y,Zを持ち、これらの自己同型群が非同型である（従ってこれらのエンリケス曲面は同型でない）ことを発見した。その後、1990年の論説では、このように非同型なエンリケス商が現れる現象があまり知られていないことが注意されている。
さて、定理1はすぐに次の系を導く。

系2：Xを固定したとき、これを普遍被覆に持つエンリケス曲面は同型を除き有限個である。

Xの周期が一般の場合には、Xは唯一のエンリケス商を持つ。これは上述のNikulinの結果の帰結である。ところが、Xを特殊なものにするとエンリケス商の個数は不安定に振る舞う。Xのピカール数を11に限定した、余次元1での挙動については完全に分類することができた。主論文においてはそのうちの一つの場合が扱われているが、その計算の結果として次が従う。

定理2：エンリケス商の個数は、Xがピカール数11のK3曲面を動くとき、上界を持たない。

ピカール数11という条件は上述の直交補格子Kの階数が1ということと同じであり、Kの同型類が容易にわかるというのが上の定理の論拠の一つである。一般には、幾何学的に定義されるK3曲面のピカール数は大きい場合が多く、この場合にはKの同型類を決定するのは容易ではない。次の定理においてはまずKの同型類を求め、次にLieberman、金銅-向井によるいくつかの自由対合から現れる特性ベクトルという不変量（今の場合には判別形式の非零元と一致する）が共役類と対応することを示す部分が上記の定理より難しくなる。

定理3：Xを積型クンマー曲面で周期が一般の位置にあるものとする。このとき、X上の任意の自由対合はLieberman型あるいは金銅-向井型に共役である。これらの共役類はそれぞれ9個と6個であり、従ってXは15個のエンリケス商を持つ。これらは自然にNS(X)の判別形式の非零元と一対一に対応する

最後に、これに続く内容として、Xを一般のヤコビアンクンマー曲面とした場合にエンリケス商の個数が31となることを参考論文の中で証明したことを注意しておく。この場合には自由対合はスイッチ、HG対合、HW対合の三種類に分かれ、それぞれ10,15,6個の共役類をなしている。

氏　名	大橋　久範

（論文審査の結果の要旨）

申請者は本論文において、代数曲面、とりわけ、K3 曲面とエンリケス曲面を研究した。代数曲面は 20 世紀初頭にイタリア学派によって分類されたが、その過程において発見された K3 曲面やエンリケス曲面は特に豊かな構造をもつ。これらはトレリ型定理を介して代数幾何学と多くの分野を結び付け、現在にいたるまで活発に研究され続けている。

よく知られているようにエンリケス曲面は K3 曲面を固定点のない位数２の自己同型で割ることによって得られる。申請者は K3 曲面 S を固定したとき、このようにして幾つのエンリケス曲面が得られるかという問題を設定した。ここでは、その個数を S のエンリケス数と呼ぼう。本論文では、トレリ型定理と代数群に関するボレルの定理を用いることによって、K3 曲面の自己同型群の有限部分群の個数は共役を除いて有限個しかないことが証明されている。これの系として K3 曲面のエンリケス数が有限であることが示される（有限性定理）。K3 曲面上の非特異有理曲線や楕円線形束の数に対する同様の定理は知られていたが、上の定理は申請者独自の発見である。

次に申請者は、K3 曲面を動かしたときそのエンリケス数はどう変動するかという問題に進んだ。これは前の問題とは違った着想と技術を要求される問題であったが、申請者は K3 曲面のピカール数が 11 の場合にエンリケス数を計算し、それらを上から一斉に押さえる定数は存在しないことを証明した（非有界性定理）。これは少し常識を覆すような発見で、専門家からも評価されている。

さらに、有限性定理の別の方向への発展として、申請者は具体的な K3 曲面に対してエンリケス数を計算している。本論文で扱われているのは二つの楕円曲線の直積のクンマー曲面の場合で、エンリケス数は 15 に等しい。この内の９個は Lieberman 型と呼ばれて 1980 年代から知られていたもので、6 個は金銅・向井型と呼ばれ 2005 年に発表されたものである。参考論文ではクンマー４次曲面というさらに難度の高い場合にエンリケス数が計算されているが、このような問題を初めて考え解決した点でも申請論文は評価できる。

このように、申請論文は代数曲面論にいくつかの新たな知見を与えるもので、博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。