学 位 審 査 報 告 書

（ふりがな） 氏　　　名	おかだ　たくぞう 岡　田　拓　三
学位（専攻分野）	博　士　（ 理　学 ）
学 位 記 番 号	理　博　　第　　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科　数学・数理解析　専攻

（学位論文題目）

Nonrational weighted hypersurfaces

（非有理的な重み付き超曲面）

論 文 調 査 委 員	（主査）　森　重文　教授 向井　茂　教授 中山　昇　准教授

理　学　研　究　科

（論文内容の要旨）
　複素数体上定義された正規射影多様体で、その反標準因子が豊富なQカルティエ因子であるものをQファノ多様体という。特異点としては高々端末特異点（または、ログ端末特異点）しかもたないQファノ多様体を端末的Qファノ様体（または、ログ端末的Qファノ多様体）という。
　代数多様体の有理性判定問題は代数幾何学において、重要な難問題の１つである。また、（ログ端末的）Qファノ多様体は（対数的）極小モデルプログラムの最終結果として現れる多様体のクラスの１つであり、興味深い対象である。もともと、Qファノ多様体は有理的でない単有理多様体、つまりLuroth問題の反例、の候補として研究されてきた。
　大きな動きとしては、1971年にIskovskikh-Maninが、また、1972年にClemens-Griffithsが異なる手法を用いて、それぞれ3次元の4次超曲面、3次超曲面が有理的でないことを、全く異なる手法で示した。現在においても、特に4次元以上では、非有理的なQファノ多様体、あるいは単有理多様体の例は、わずかしか知られていない。
　有理性問題を研究する手法としては、上記の２つを含めて本質的には4つしか知られていない。その内の1つである、1995年にKollarにより導入された手法について簡単に言及しておく。
　Kollarは、素数を法とする還元手法を用いて正標数に移行し、ファノ多様体であるにもかかわらず多重正則形式層が巨大な線則を含む場合があるという、正標数に特有な現象を利用することにより、次元と次数に関する所定の数値的条件をみたす超曲面が非線織的であることを示した。特にそれらの超曲面は非有理的であることが従う。
　岡田君は、主論文においては、Kollarによる手法を重み付き超曲面へ適用することにより、次元と重み、そして次数に関する所定の数値的条件をみたす重み付き超曲面が非有理的であることを示した。その結果として、
(1) 12個の非有理的な3次元端末的Qファノ多様体の族、
(2) 4次元以上の各次元において、可算無限個の非有理的なログ端末的Qファノ多様体の族、
が得られた。このうち、(1)の多くは既知の例であったが、(2)は全く新しい例の族である。重み付き超曲面を考察することで、次元を固定しても重みを様々にとりかえることができ、結果として無限個の非有理的なQファノ多様体の例が構成できたわけである。
　参考論文において、主論文で得られた上記の例(2)をさらに詳しく考察することにより、6次元以上の場合、ピカール数が1であるような（Q分解的な）ログ端末的Qファノ多様体のなす族が、双有理同値な物同士を同一視してもなお非有界である（双有理的非有界性）、という結果を得ることに成功した。
　ちなみに、同種の結果としては、3次元におけるものであって、それにはSarkisovプログラムに基づく結果が知られているが、4次元以上では現在までのところ、岡田君の結果のみである。

氏　名	岡田　拓三

（論文審査の結果の要旨）

岡田拓三君は、修士論文において、３次元端末的ファノ多様体の例を構成し、博士課程では、その手法をログ端末的なファノ多様体に拡張し発展させることを目指した。

まず、有理性判定問題と食い違い係数の立場からすれば、ログ端末的というのは自然な条件である：単有理性より弱いが扱いやすい概念で有理連結性というものがあるが、ログ端末的な Q ファノ多様体は有理連結である (Zhang)。しかも、ログ標準的まで広げると有理連結的でない例が容易に見つかる。このように、有理連結な多様体で非有理的なものを構成しようという立場からは、ログ端末的な Q ファノ多様体を扱うのは自然であることがわかる。

また、岡田君の例は、Kollar の手法に基づくものではあるが、様々な重みを許す重み付き射影空間の超曲面を扱う同君の構成には、高度な組合せ論的なセンスも必要である。岡田君は、主論文において、十分にその組合せ論的な能力を発揮して無限個の族を構成することに成功した。

私は、これらの無限個の族は、理論的な基礎は Kollar によるものの、それらの族は非常に重要な例、つまり研究対象を与えている、と判断する。以下、それに触れることにする。

任意の非負数 e に対して、e ログ端末的という概念があるが、これは e=0 の時は通常のログ端末的と一致し、e>0 なら「e だけ」強い制限にしたものである。さて、

Borisov-Alexeeev-Borisov 予想（BAB 予想）：任意の自然数 n と任意の正数 e に対して、n 次元 e ログ端末的な Q ファノ多様体は有界である

という予想は極小モデル理論の中で重要な問題であるが、３次元でも未解決な難問として知られている。

岡田君の無限族の価値は、参考論文により、十分に保証されることになった。岡田君は、Kollar の発見した双有理不変量を活用し、参考論文では、(6 次元以上において）次元ごとのログ端末的な Q ファノ多様体の双有理的非有界性に適用することを得た。これは、e=0 とすると双有理同値を無視しても BAB 予想の類似は成立しないことを意味し、予想の困難さの程度を示してる。また、３次元の場合の結果が、Sarkisov プログラムという大理論と 3 次元特有のよく知られた不変量を用いているのに比べ、岡田君の証明は Kollar の双有理不変量を用いるだけで非常に簡明であることも付記しておく。

このように、岡田君は、主論文の無限族を調べることにより、Kollar の発見から十数年後に、初めて Kollar の双有理不変量の見事な応用を発見し得たわけである。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。