学　位　審　査　報　告　書

（ふりがな） 氏　　　　名	チョー　チェンホン 卓　建宏
学位（専攻分野）	博　　士　（　理　学　）
学　位　記　番　号	理　　博　　　第　　　　　号
学位授与の日付	平成　　年　　月　　日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研　究　科　・　専　攻	理学研究科　数学・数理解析　専攻
（学位論文題目） A finite difference scheme for blow-up solutions of nonlinear wave equations (爆発解を持つ非線形波動方程式の差分スキーム)	
論　文　調　査　委　員	（主査）　岡本　　久　教授 向井　　茂　教授 山田　道夫　教授

理　学　研　究　科

氏　名	卓　建宏

（論文内容の要旨）

非線形偏微分方程式には解の爆発という不思議な現象が起き得る。方程式のみならず与えられた初期値も境界値もすべて滑らか（＝何回でも微分可能）であるにもかかわらず、微分方程式の解がある有限時刻で滑らかさを失ってしまうことがある。これが解の爆発と呼ばれている現象である。爆発が起きる点を解の特異点と呼ぶ。解の爆発は様々な物理現象を数学的に表すものであることも多いので、多くの科学者の注目するところとなっている。

さて、解の爆発は簡単な放物型微分方程式では解明されていることも多いが、流体力学に関連する方程式の場合、および、双曲型微分方程式では未解明の点が多い。さらに、こうした現象を数値的に再現する数値解析の問題では多くの未解決問題が残されている。卓君は、非線形波動方程式の解の爆発を忠実に再現する差分スキームで、きわめて取り扱いやすいものを開発し、その有効性を証明した。

卓君は第１節で問題の背景を述べ、第２節ではコンスタンチン・ラックス・マイダの方程式を考察する。この方程式は３次元非圧縮非粘性流体の爆発のモデルとして提唱されたものである。これは有限時間で解が爆発することが知られているけれども、スペクトル法で離散化すると、その数値解は爆発しないことを証明した。スペクトル法は乱流の数値実験では好んで用いられるものであるから、上の事実は、解の爆発を数値実験で研究しようとするときには大きな警鐘となる。これは非線形双曲型の難しさを象徴するとともに、安直な数値スキームでは解の爆発は再現できないことを示している。第３節では、非線形波動方程式の解の爆発現象をレビューし、第４節で解を数値計算する差分スキームを提唱している。そして、適当な仮定の下で、①解の爆発が差分スキームでも起こり、②差分のメッシュサイズを小さくしてゆくときに、数値的爆発時刻が元の解の爆発時刻に収束すること、を証明している。コンスタンチン・ラックス・マイダの方程式の例からわかるように、①を検証しておくことは大変重要なことである。第５節では数値実験例をあげて、実際に解の爆発が再現できることを示している。いくつかの具体例を用いて、解が空間の１点で爆発する様子を可視化した。

卓君のスキームでは空間格子は一定とし、時間刻み幅を解の大きさに応じて変えてゆく、という戦略を用いる。これは卓君が修士論文で放物型方程式の場合に用いた戦略と基本は同じであるが、実際の実行方法にはかなりの違いが現れる。解が大きくなるとそのサイズに反比例して時間刻み幅を小さくしてゆかねばならないが、その基本原理が，放物型方程式の場合には既知であるのに対し、双曲型の場合には何がベストなのかがわかっていなかった。これを解決したのも卓君の業績である。また、非線形波動方程式では保存則が存在するのであるが、時間刻みを変化させるとそうした保存則が壊れることを指摘したことも本論文の結果である。

氏　名	卓　建宏

（論文審査の結果の要旨）

本論文は、解の爆発問題という困難な問題の数値解析に大きな寄与をしたものと認めることができる。数値解析の使命は精度よくしかも高速に計算することにあるが、卓君のスキームは収束が保証され、実行も簡単であるという特徴を持っており、本来の使命によく応えているということができる。一般に、微分方程式の解を高精度に計算するためには、解の滑らかさが保証されていなければならなかった。滑らかでないものを数値計算しようとすれば誤差が発生しやすくなるのは当然である。従って、数学的な無限大が現れる解を数値計算で検証しようというのはきわめて野心的なことである。特異点が現れるときその発生場所と特異点の性質がよくわかっていれば、それらを差分スキームに組み込むことによって精度を上げることができる。これはよく知られている戦略である。しかし、非線形波動方程式の問題ではそうした情報は得られない。このときにどうしたらよいかは本論文まではわかっていなかった。

本論文では $u_{tt}=u_{xx}+u^2$ という空間１変数の簡単な非線形波動方程式について理論を展開しているが、卓君のアイデアは、より広範な方程式にも適用することが出来る。たとえば、$u_{tt}=\triangle u + f(u)$として、非線形項を一般の関数にしてもかまわないし、空間変数は２以上でもかまわない。時間刻みについても様々な刻み規則で収束することが示される。この意味で、本論文の適用範囲はかなり広いということができる。これは大きな利点である。さらに、本論文では 3 節において、解が爆発するための十分条件を示しているが、これは既知の結果に含まれない新しいものである。しかも、この十分条件の離散化版は大変使いよいものとなっている。

本論文は、２，３の未解決問題を残している。しかし、これは、これまで認識されていなかった問題を卓君が発掘したものということができ、将来の後続研究を誘引する要素ともなっている。たとえば、時間刻み幅 Δt_n を $\Delta t_n = \tau/H(|u|)$と定義したとき（ここで、$|u|$は解の何らかのノルムである)、関数 H にはかなりの任意性を許すことが出来る。だから、目的に応じて H を取捨選択できる。これは長所であるが、同時に、どの関数がベストなのか、という問題も提起することになる。卓君の数値実験では、$H(s)=s^{1/2}$ がベストになるように思えるが、証明は出来ていない。今後の研究がこれに続くことになろう。解の収束にはある種の仮定をおいているが、その仮定は実際の数値例ではよく満たされているものであり、実際上の問題は生じない。また、境界条件に関する制限はない。数値解の安定性と誤差については、証明は出来ていないけれども、数値実験によって、空間刻み幅の１次のオーダーであることが示唆されている。

以上のように本論文は、非線形偏微分方程式の解の爆発に関する数値解析という困難な問題に大きな貢献をしたものであり、博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について諮問を行った結果、合格と認めた。