京都帝國大學經濟學會

經濟論叢

第十七巻　第二號

大正十二年八月一日發行

照應計算の一方法

蜷川虎三

照應（Correlation）の研究は、遺傳學殊に生物測定學（Biometrics）の研究者に依り、其理論的方面のみならず、應用的方面も開拓されたが啻に生物學の範圍に止らず、社會諸現象の統計的研究にも利用せらるゝに至つて益々其用途を擴大したのである。我國に於ても夙に學者の紹介論評せられた處であるが*、然し社會乃至經濟統計研究上、其利用せらるゝ事の少いのは、一面之が計算の複雑にして、手數を要する事極めて多い事に原因しておるとも考へられるのである。

此處に照應の觀念を明にする遑はないが、要するに照應の研究は相關聯する二變數の相互關

* 財部博士、社會統計論綱五三七頁以下

比 率 計 算 表

F_Y	Y	F_YY	F_YY^2	$\sum' F_{XY}X$	$Y\sum' F_{XY}$	$(\sum' F_{XY}X)^2$	$\frac{(\sum F_{XY}X)^2}{F_Y}$
17.5	−3	−52.5	157.5	−18.5	52.5	242.25	19.55
45.5	−2	−91	182	−41.5	83.	1722.25	37.85
48	−1	−48	48	−7	7	49	1.02
44	0	—	—	0.5	—	0.25	0.01
28	1	28	28	2.5	2.5	6.25	0.22
13	2	26	52	5	10	25	1.92
11	3	33	99	9	27	81	7.36
5.5	4	22	88	1	4	1	0.18
7.5	5	37.5	187.5	7	35	49	6.53
7	6	42	252	2	12	4	0.57
—	7	—	—	—	—	—	—
2	8	16	128	2	16	4	2
1	9	9	81	−1	−9	1	1
1	10	10	100	−2	−20	4	4
—	11	—	—	—	—	—	—
2	12	24	288	2	24	4	2
—	13	—	—	—	—	—	—
1	14	14	196	2	28	4	4
1	15	15	225	1	15	1	1
235	N	85	2112	(−36)	290		89.21
		$\sum F_YY$	$\sum F_YY^2$	$\sum F_XX$	$\sum F_{XY}XY$		$\sum\left[\frac{(\sum' F_{XY}X)^2}{F_Y}\right]$

Corrections

−36	$\sum F_XX$
396	$\sum F_XX^2$
(+85)	$\sum F_YY$
290	$F_{XY}XY$

354.97	$\sum\left[\frac{(\sum' F_{XY}Y)^2}{F_X}\right]$

$$\frac{(\sum F_XX)(\sum F_YY)}{N} = -13.01$$

$$\frac{(\sum F_XX)^2}{N} = 5.51$$

$$\frac{(\sum F_YY)^2}{N} = 30.75$$

$$\gamma_{XY} = \frac{a}{\sqrt{bc}}$$

$$\eta_{XY} = \sqrt{\frac{d}{b}}$$

$$\eta_{YX} = \sqrt{\frac{e}{c}}$$

$$a = \sum F_{XY}XY - \frac{(\sum F_XX)(\sum F_YY)}{N} = 303.01$$

$$b = \sum F_XX^2 - \frac{(\sum F_YX)^2}{N} = 3.90.48$$

$$c = \sum F_YY^2 - \frac{(\sum F_YY)^2}{N} = 2081.3$$

$$d = \sum\left[\frac{(\sum' F_{XY}X)^2}{F_Y}\right] - \frac{(\sum F_XX)^2}{N} = 83.70$$

$$e = \sum\left[\frac{(\sum' F_{XY}Y)^2}{F_X}\right] - \frac{(\sum F_YY)^2}{N}$$

$$= 324,22$$

$\log b = 2.59161$
$\log c = 3.51833$
$\log_{prod} = 5.90994$
$\log \sqrt{p} = 2.95497$
$\log a = 2.48146$
$\log \sqrt{p} = 2.95497$
$\log r = 9.52649$
$\gamma_{XY} = +0.536 \pm 0.039$

$\log d = 1.92273$
$\log b = 2.59161$
$\log \frac{d}{b} = 9.33112$
$\frac{1}{2}\log \frac{d}{b} = 9.66556$
$\eta_{XY} = +0.463 \pm 0.035$

$\log e = 2.51084$
$\log c = 3.31833$
$\log \frac{e}{c} = 9.19251$
$\frac{1}{2}\log \frac{e}{c} = 9.59626$
$\eta_{YX} = +0.395 \pm 0.037.$

照　應　係　數　及

Pauperism.

0　5　10　15　20　25　30　35　40

Out. Relief.								
0—1	-1.5 0.5 -1.5	-12 6 -18	-9 9 -27	0 1 -3				4 1 -3
1—2	-10.5 3.5 -7	-26 13 -26	-10 10 -20	0 14 -28	5 5 -10			
2—3	-3 1 -1	-9 4.5 -4.3	-13 13 -13	0 13.5 -13.5	14 14 -14	4 2 -2		
3—4	-3 1 0	-9 4.5 0	-7.5 7.5 0	0 14 0	14 14 0	6 3 0		
4 5		-2 1 1	-6 6 6	0 11.5 11.5	8.5 8.5 8.5	2 1 1		
5—6			-3.5 3.5 7	0 3 6	4.5 4.5 9	4 2 6		
6—7		-2 1 3	-2 2 6	0 1 3	2 2 6	8 4 12	3 1 3	
7—8		-1 0.5 2	-1 1 4	0 1 4	3 3 12			
8—9		-1 0.5 1.5	-1 1 5	0 1 5	1 1 5	8 4 20		
9—10		-2 1 6		0 2 10	4 4 24			
10—11								
11—12					2 2 16			
12—13			-1 1 9					
13—14		-2 1 10						
14—15								
15—16				0 1 12		2 1 12		
16—17								
17—18						2 1 14		
18—19					1 1 15			
Fx	6	33	54	63	59	18	1	1
X	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
FxX	−18	−66	−54	—	59	36	3	4
F_xX^2	54	132	54	—	59	72	9	16
$\sum' F_{XY}Y$	−9.5	−2.4	−2 3	+9	+71.5	+61	+3	−3
$X\sum' F_{XY}Y$	28.5	48	23	—	71.5	122	9	−12
$(\sum' F_{XY}Y)^2$	90.25	576	529	81	511.25	3721	9	9
$\frac{(\sum' F_{XY}Y)^2}{F_X}$	15.04	17.47	9.80	1.29	86.65	20672	9	9

係を論ずるものであつて、之がためには照應係數（Correlation coefficient）及び照應比率（Correlation ratio）を算出する必要がある。然し照應係數を算出するだけでも、二變數各に就て、少くとも各計數の偏差、標準偏差、二變數各の偏差の相乘積等が求められなければならないから前述の如く計算は容易でないが、尚進んで照應比率の算出を必要とする場合には一層複雜を重ねる事になる。

斯くの如き計算上の手數を省かんとして、種々の方法、表等が考へられたのであるが、此處に紹介するシカゴ大學のホルチンガー氏の方法**も其一つである。氏の方法に依れば、一表を作る事に依つて、照應係數のみならず、二個の照應比率も同時に算出する事を得且つ其計算も自乘の場合に於ては整數の計算に止り、小數を含まないと云ふが如く全てが簡易な方法に依つて仕組まれてゐる。

以下、表に從つて其方法の概要を説明する事***とするが、之が計數材料はユールに依つたもの

で若し比較されたならば、此處に述ぶる方法の簡易にして便利なることを何人も之を認むるであらう。現に私は、此の方法に依つて、生物の年齢と體長の照應係數の算出を試みたが、僅の時間で確實な結果を得る事を確めたのである。

ホルチンガー氏の計算表は、先づ係數及び比率を次の如く書き改め、此の公式中の各記號に該當する項目及び欄を表中に定め、其所要の計數を算出するのである。而てその計算は、表の欄外に於て之を行ひ、一葉の表にして所要計數を一覽の下に集め且つ全ての計算を之に附屬せしめ得る事は又此の表の一特徴と云はなければならない。公式は次の通りである。

$$照應係數\ \gamma_{XY}=\frac{\Sigma F_{xy}XY-(\Sigma F_xX)(\Sigma F_yY)/N}{\sqrt{(\Sigma F_xX^2-(\Sigma F_xX)^2/N)(\Sigma F_yY^2-(\Sigma F_yY)^2/N)}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{bc}}\quad（ト置ク）$$

$$照應比率\ \gamma_{YX}=\sqrt{\frac{\Sigma[(\Sigma' F_{xy}Y)^2/F_x]-\Sigma F_yY^2/N}{\Sigma F_yY^2-(\Sigma F_yY)^2/N}}=$$

$$=\sqrt{\frac{e}{c}}\quad（ト置ク）$$

** Karl J. Holzinger, A Combination Form for Calculating the Correlation Coefficient and Ratios (Journal of the American Statistical Association March 1923.

*** G. U. Yule. An Introduction to the Theory of Statistcs p183.

$$\eta_{YX} = \sqrt{\frac{\Sigma\{(\Sigma' F_{xy}X)^2/F_y\} - (\Sigma F_xX)^2/N}{\Sigma F_xX^2 - (\Sigma F_xX)^2/N}}$$

$$= \sqrt{\frac{d}{b}} \quad (\text{ト置ク})$$

右公式に依る計算表記載及計算の順序は次の如くである。

(一)各目に頻繁數 (F_{xy}) を記し、各列の頻繁數 F_x, F_y 及全頻繁數を記入する。

(二)頻繁數の分布の中央近く基準（Origin）を定め、その基準から各目 (cell) の偏差 X, Y を 1 2 3 、-1 -2 -3 の如く示す。之はユールに於ても同である。

(三) F_y と之に對應する Y とを相乘して、F_yY の値を得るが之の全量は、ΣF_yY である。同樣にして、F_x 及 ΣF_xX を求める。F_yY の項と之に對する。

(四) F_yY の項と之に對するYとを乘じて、F_yY^2 を得、其總量は、ΣF_yY^2 であるが又同樣にして、F_xX^2 及び ΣF_xX^2 が得られる。

(五)各目の頻繁數 F_{xy} と之に對應するYとを乘じ之等の値 $F_{xy}Y$ を、各目の右下に記し（印刷の便宜上並記するが、右側のものである）其列に依る總量が $\Sigma' F_{xy}Y$ であり、X との積は $F_{xy}X$ で（卽ち各目の頻繁數の左側の數字）其總量は $\Sigma' F_{xy}X$ である。之等の合計に就て、前者には X を乘じ、後者には Y を乘じて $X\Sigma' F_{xy}Y$ 及 $Y\Sigma' {}_{xy}Y$ を得、之等の總計は、各 $\Sigma' F_{xy}XY$ である。

右の如くにして、表中各項の所要の計數を求めたらば、直に之を公式中に代入し、得たる値に就て殘餘の計算は對數に依つて簡易に之をなす事が出來る。

(六)次に照應比率 η_{yx} の計算に就ては、ΣF_{xy} Y を自乘して、$\Sigma F_{xy}Y^2$ の項の値を得、之に對應する F_x にて除し、總量 $\Sigma(\Sigma' F_{xy}Y)^2/F_x)$ を得る、之より、誤差の修正 $(\Sigma F_yY/N)$ を引けば e が得られ、同樣にして、d が得られる。

以上の諸計算は、既述の如く、之を表の欄外に見る事が出來る。かくして求め得た照應係數及比率の蓋然誤差は次の式より得られる。

$$P.E\gamma = 0{,}6745\ \frac{1-\gamma^2}{\sqrt{N}},$$

$$P.E\eta = 0{,}6745\ \frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}}$$

次に、照應比率を算出する必要ある場合は、復歸線（累退線 line of regression）が（non-linearity）であるから linearity に對する實際上の規準を知る必要がある。之は卽ち

$$\frac{\sqrt{n}}{1.35}\ \sqrt{\eta^2-\gamma^2} < 2.5$$

の關係より知る事が出來る。言ふ迄もなく、$(\eta^2-\gamma^2)$ はXのYに對する又はYのXに對する、復歸(又は累退)の linearity よりの、へだゝり（divergence）を表すものである。

表の記入方法、計算の順序は大體右の如くであるから、調査資料に就て、照應表（Correlation-table）を作る勞さへ惜まなかつたならば、他は、此の方法に依り極めて容易に達し得るのである。私は二變數の關係の硏究、例之ば、卸賣相場と小賣相場の關係と云ふ様な事實に就て、單に、両者を箇別的に見て、その變化の狀況を窺ひ、曲線の傾向、形狀等により、両者の關係を推知せんよりは、照應の硏究に依り、相互關係を確實に表示する方が便利なるを信ずる者であつて此の硏究の利用の廣からん事を願ふ一端として、此處に其一計算法を紹介したのである。