

## 透水係数の不均質分布構造同定における非適切問題の克服法

浜口 俊雄

### 要 旨

本研究では、区域単位に不均質な透水係数分布下の地下水流動に対して、観測水位から分布を同定する際の非適切性を克服する手法を提案した。数値実験では同条件下の仮想地下水流動に対して、区域毎の分布同定結果と地盤統計モデル化による一括の同定結果とで比較検討した。前者の同定精度は非適切条件のため低下したのに対し、後者は非常に高くなった。以上より、本提案手法は逆問題の非適切性を克服し、同定の精度向上にも寄与するとわかった。

キーワード：透水係数，地盤統計モデル，構造同定，非適切問題，不均質性

### 1. 序論

広域地下水解析では、観測データの量と質に見合うような地下水モデルを構築することが重要であり、そうしたモデルで考察することが望まれる。特に、地下水に関する物性値 (Ex. 透水係数, 産出率/比産出率あるいは間隙率/有効間隙率, といった土中の物理定数) の空間分布設定がモデル再現性の良し悪しを左右する。例えば、少ない観測データ数から局所的な透水特性による局所的な水位変動を再現したり、変動が小さく類似した観測データから不均質な透水特性の空間分布を推定することは困難といえる。しかし、前者のような場合はデータ数を適切な場所に増やすほど局所性が表現しやすくなり、後者のような場合はデータの變動回数が多いほどデータの類似性が解消されてくるため、データの量と質をともにできるだけ向上させるべく上記の方向で実現へ向けて検討するのがよい。その一方で観測に関して地理的・物理的制約が存在することも事実であり、これは予め認識していなければならない。一般的に対象領域内の観測点は、地表の土地利用状態、地層の状況、土地所有者承諾の問題、観測点設置にかかる費用の問題等で物理的・経済的制約を強く受けることが多く、これが観測データの量や質の向上を妨げる主要因となり得るのである。

それらを踏まえつつ、地下水モデルを解析で扱う場合、

透水特性の分布や境界条件を単純化することで地下水モデル自身を単純化し、それにより生じた全体のモデル誤差と観測データからのモデルの残差 (すなわち、観測点でのモデル誤差+観測誤差) との間のバランスを考慮した最適な透水特性の分布または境界条件を同定することで最終的な地下水モデルを定めることになる。それ故に、たとえ地下水の挙動が複雑であっても、その観測データが不十分であればそれだけ地下水モデルの単純化の必然性が増してくるのである。

本稿では地下水モデルが不圧・被圧どちらの状態でも、また平面二次元でも三次元でも検討可能であるが、ここでは不圧平面地下水モデルを採用して検討していくことにする。その非定常透水特性としては、先に挙げたような土中の物理定数に言及して考えると、透水係数を有効間隙率で除した値、またはその逆数、のいずれかで検討を進めることができる。いずれであってもひとまとめで扱えることから、透水係数または有効間隙率の一方が一様分布であっても本稿の議論内容において一般性は失われない。そこで本稿では有効間隙率を一様な一定値の分布として扱うことで議論の焦点を透水係数に絞り、地下水解析時に透水係数分布の離散化や区域化などといった分布簡素化方法の相違からくる地下水位算定結果の違い、すなわち地下水位変分量を厳密に考える。つまり、透水

係数分布に関するモデル誤差との関係から同誤差の厳密解を算出し、それを出来るだけ埋め得る地盤統計的手法の適用性を検討する。これにより、モデル誤差が小さくなる事が期待される。

また、所与の観測条件(数量・質・配置など)に対して求める透水係数の区域数が多い場合、非適切な(ill-posed)逆問題となる。例えば不均質な透水係数分布を対象として、その分布値を同定しようとしても、観測点の存在する区域あるいは近い区域では観測値に対する修正感度も鋭いが、観測点から遠い区域ではその感度も鈍く、その区域の結果が原因となって全体では一意な同定値に至らないことも多い。本研究はこうした問題に対処し克服するため、透水係数分布の統計モデル化を行い、解の一意性を確保した上に、領域全体に観測更新感度を広げて、同じ観測条件下であっても従来のモデル化より修正感度が向上するような平面地下水モデルを提案する。さらにモデルパラメータの観測更新感度についても、感度行列を表す数式を用いて上述の分布モデル化に対する有利性を確認しながら考察する。

## 2. 水位変分量とモデル誤差

### 2.1 有限要素法による水位解

平面地下水モデルの基礎式は、Boussinesq方程式

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ k(h-s) \frac{\partial h}{\partial x_i} \right\} + \varepsilon \quad (1)$$

で表される。ここに $\lambda$ :有効間隙率、 $h$ :地下水位、 $k$ :透水係数、 $s$ :基盤高、 $\varepsilon$ :地下水涵養量を表す。

実際の数値計算では式(1)を用いるが、ここでは厳密解を導出する際の読者の理解を容易にするため、式(1)を線形化した方程式とその境界条件は

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( kd_0 \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + \varepsilon \quad (2)$$

$$\text{境界条件: } h = \hat{h} \quad \text{on } S_h$$

$$q = -\hat{q} = kd_0 \frac{\partial h}{\partial n} \quad \text{on } S_q$$

(ただし、 $S_h$ :水位境界、 $S_q$ :流量境界)

で考察を進めるものとする。ここに、 $d_0$ :平均水深(要素毎の定数)であり、 $h-s$ の線形近似部である。本研究では数値計算に有限要素法(Finite Element Method; FEM)の利用を考える。この弱形式を求め、空間的に離散化して、 $\Delta t$ による時間差分や $\theta$ 法によって時間展開する。最後に両辺を上記境界水位 $\hat{h}$ の縮約処理を施して得られる有限要素方程式は

$$\mathbf{A} \mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{B} \mathbf{h}_t + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \quad (3)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \theta \mathbf{S}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} - (1-\theta) \mathbf{S} \quad (4)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \lambda \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} dV, \quad \mathbf{S} = \int_V kd_0 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial x_i} dV \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \boldsymbol{\phi}^T dS + \int_V \varepsilon \boldsymbol{\phi}^T dV \quad (6)$$

となる。本来 $\det(\mathbf{A})=0$ であるが、境界条件の縮約により $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ になっているため、式(3)が解けて、水位の数値解

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{h}_t + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}) \quad (7)$$

を得る。

### 2.2 透水係数を変量とした水位変分量

本節では、式(7)を基にして、透水係数を変量とした水位変分量を導出する。ここでは、 $\|\mathbf{M}\|$ と $\theta \Delta t \|\mathbf{S}\|$ の大小関係で場合分けして検討を進める(浜口(2004))。

#### a) $\|\mathbf{M}\| > \theta \Delta t \|\mathbf{S}\|$ の場合

まず、 $\mathbf{A}^{-1}$ を級数展開する。

$$\mathbf{A}^{-1} = \Delta t \left( \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^i \right) \mathbf{M}^{-1} \quad (8)$$

上式を式(7)に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{t+1} = & \left( \mathbf{I} - \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} (\Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^i \right) \mathbf{h}_t \\ & + \Delta t \left( \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^i \right) \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。

式(4)の $\mathbf{M}$ は貯留行列、 $\mathbf{S}$ は透水行列と呼ばれ、後者は透水係数 $k$ を含むことから同行列が間接的に水位変分量を考える上での変量となっている。上記とは異なる空間分布を示す透水係数 $k'$ (そのときの透水行列を $\mathbf{S}'$ とする)のモデルで、式(9)の様に解 $\mathbf{h}'_{t+1}$ を求める。続いて透水係数の空間分布に関する時刻 $t+1$ の水位変分量 $\delta \mathbf{h}_{t+1} = (\mathbf{h}_{t+1} - \mathbf{h}'_{t+1})$ を求める。いま1時刻分の水位変分量を考察するために、分布の異なる両者の水位を時刻 $t$ で同じ( $\mathbf{h}_t = \mathbf{h}'_t$ )とにおいて考える。 $k$ と $k'$ がそれほどかけ離れていない分布( $\|\mathbf{S}\| \approx \|\mathbf{S}'\|$ の成立程度)であれば、 $\|\mathbf{M}\| > \theta \Delta t \|\mathbf{S}'\|$ と考えてもよいと言える。よって、この場合の水位変分量は比較的容易に

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{h}_{t+1} = & - \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} (\Delta t)^i \\ & \times \mathbf{L}_{i-1} \mathbf{M}^{-1} \delta \mathbf{S} (\mathbf{h}_t + \theta \Delta t \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに $\mathbf{I}$ :単位行列、

$$\mathbf{L}_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})^{i-j-1} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}')^j \quad (11)$$

と求まる。 $\mathbf{S}$ の変分量 $\delta \mathbf{S} (= \mathbf{S} - \mathbf{S}')$ が変量となっているために、透水係数の空間分布の違いが各時刻 $\delta \mathbf{h}_{t+1}$ ずつ解に累積的な影響を及ぼすことがわかる。

b)  $\|M\| \leq \theta \Delta t \|S\|$  の場合

前場合と同様に算出していく。  $A^{-1}$  を級数展開した結果とそれを式 (7) に代入して整理した結果は

$$A^{-1} = \frac{1}{\theta} \left( I + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\theta \Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) S^{-1} \quad (12)$$

$$h_{t+1} = \left( I + \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{\theta} \right)^{i+1} \left( \frac{1}{\Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) h_t + \frac{1}{\theta} \left( I + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\theta \Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) S^{-1} \omega_{t+\theta} \quad (13)$$

と書ける。同様に透水係数  $k'$  (透水行列を  $S'$ ) のモデルに対して、式 (13) の様に解  $h'_{t+1}$  を求める。続いて透水係数の空間分布に関する時刻  $t+1$  の水位変分量  $\delta h_{t+1}$  を求める。  $\|M\| \leq \theta \Delta t \|S'\|$  の仮定も成立しているとして、この場合の水位変分量は比較的容易に

$$\delta h_{t+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\theta} \right)^{i+1} \left( \frac{1}{\Delta t} \right)^i \times (N_{i-1} \delta S^{-1} M h_t - N_i \delta S^{-1} \omega_{t+\theta}) + \frac{1}{\theta} \delta S^{-1} \omega_{t+\theta} \quad (14)$$

$$\text{ここに } N_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (S^{-1} M)^{i-j-1} (S'^{-1} M)^j \quad (15)$$

と求まる。先の場合と同じく、  $S^{-1}$  の変分量  $\delta S^{-1} (= S^{-1} - S'^{-1})$  が変量となっているために、透水係数の空間分布の違いが各時刻  $\delta h_{t+1}$  ずつ解に累積的な影響を及ぼすことがわかる。

### 2.3 水位変分量と地盤統計学的モデル補完量

いま上述の議論において、真の地下水挙動が本研究で与えたモデルで完全に表せると仮定した上で、  $k$  が真の透水係数の分布状態、  $k'$  が所与の解析モデル分布を当てはめて考えた場合、  $\delta h_{t+1}$  は逐次的ではあるがモデル誤差を表すことになる。しかしながら、各時刻毎に式 (10) または式 (14) を用いてモデル誤差を厳密に計算することはかなりの計算労力が必要となって現実的ではない。ここではその代替手法として、比較的容易に計算できる後述のような地盤統計学的手法を考える。

有限要素法では導出の過程で計算残差の総和をゼロにする条件を与えているだけであり、任意点での計算残差をゼロにする解 (厳密解) が得られるかどうかは保証の限りではない点 (‘弱形式’ と呼ばれる条件) が特徴の 1 つである。地盤統計学的手法にもこれと類似した特徴があり、同手法は、観測点において計算値と観測値が一致する条件 (条件付確率場の確定条件) を与えているだけで、任意点での計算値と真値との残差をゼロにする解 (厳密解) が得られるかどうかは保証されていない方法である。また、そこには計算値が観測値を基にして統計的な空間特性から

求められているために物理的検討も生まれにくい。したがって、同手法では、本来、モデル誤差の検討もできない状況が普通であった。そこで筆者は、物理モデルと地盤統計モデルの融合によるモデル誤差の補完手法の確立を目指してきた。成果の詳細は、浜口 (2002) および浜口 (2003) に譲るとして要点だけを列挙すると、

- [1] 既往の研究ではモデル全体を統計モデル (トレンド成分+ランダム成分) で表現していたが、筆者はトレンド成分に物理モデルの数値解を採用することで物理特性を組み込んだモデルにすると同時にモデル誤差をランダム成分で考慮できるようにし、その観点からモデル誤差を補完するようにした。
- [2] トレンド成分として物理モデル数値解の他に不確定的な定数を導入し、その定数をモデル誤差の一部と捉えることで、モデル誤差補完の推定量を空間相関性から算出したランダム成分にばかり依存するのではなく、領域に様な傾向量も考慮したかたちでモデル誤差を求めて補完精度を向上させた。
- [3] 地下水モデルに限らず一般の物理モデルで適用可能なかたちに理論展開されているため、汎用性が高く、他モデルへの応用が利きやすい。

となる。数式で示すと一般的には、真値  $\phi(\mathbf{x}, t)$  を多項式関数で表されたトレンド成分  $m(\mathbf{x}, t)$  とランダム成分  $w(\mathbf{x}, t)$  に分解して考え、

$$\phi(\mathbf{x}, t) = m(\mathbf{x}, t) + w(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

とし、ランダム成分が時間に独立と仮定した上で、推定値  $\phi^*(\mathbf{x}, t)$  が

$$\phi^*(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\phi} \quad (17)$$

によって算出できるように考える手法が地盤統計学 (Wackernagel, 1995 ; Chilés and Delfiner, 1999) の一手法として最も知られた universal kriging(UK) である。ここに、観測数を  $n$  個として、  $\boldsymbol{\nu}$ : 観測値への重み係数ベクトル [ $n \times 1$ ]、  $\boldsymbol{\phi}$ : 観測値ベクトル [ $n \times 1$ ] を表す。ここで用いる kriging 推定の手順と式導出に関する詳細は浜口 (2002) を参照されたい。導出結果は以下の様になる。

$$\phi^*(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{c}(\mathbf{x})^T \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{w}} \quad (18)$$

ただし、

$$\hat{\mathbf{b}} = \left( \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi} \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\phi} - \mathbf{G} \left( \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi} \quad (20)$$

ここに、トレンド関数の項数を  $\ell$  個として、  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ : トレンド関数の基底関数ベクトル [ $\ell \times 1$ ]、  $\hat{\mathbf{b}}$ : トレンド関数の係数ベクトル [ $\ell \times 1$ ]、  $\mathbf{w}$ : 観測点でのランダム成分ベクトル [ $n \times 1$ ]、  $\mathbf{G}$ : 観測点での  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$  の集合転置行列

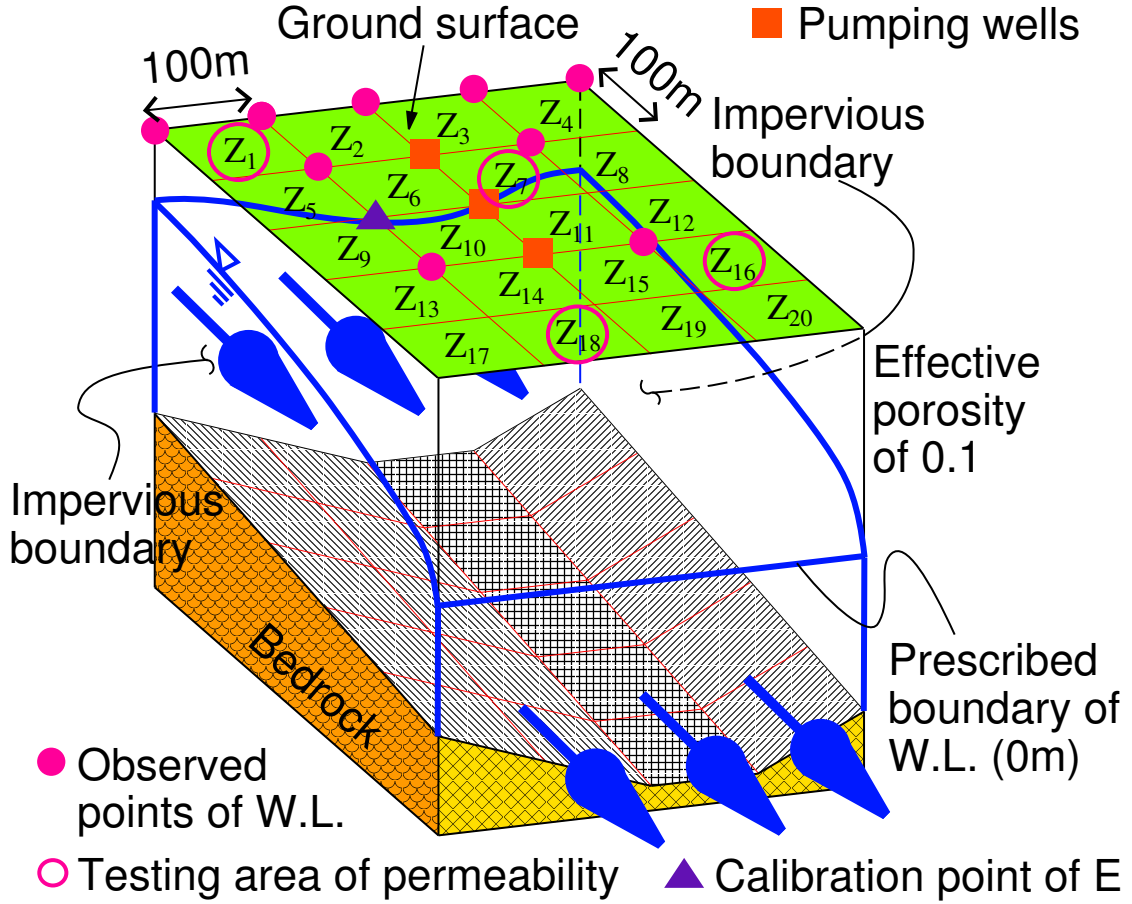


Fig.1 Hypothetical aquifer in three dimensions

$[n \times l]$ ,  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ : 求める推定点  $\mathbf{x}$  と各観測点間の共分散ベクトル  $[n \times 1]$ ,  $\mathbf{C}$ : 各観測点間の  $w(\mathbf{x})$  の共分散行列  $[n \times n]$  である. 実際の算出には  $\nu$  を求めた後, 式(17)に代入してやればよい.

本研究ではトレンド成分にモデル数値解と空間不確定的偏りとなる定数(浜口, 2002)とのスカラー和を考えるため, UKを最も単純化した ordinary kriging(OK)の場合, すなわち,  $l = 1$  の場合に合致する. 数式で記述すると以下の様に見える.

$$h^*(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{c}(\mathbf{x})^T \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{w}} \quad (21)$$

$$\text{ただし, } \hat{\mathbf{b}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}'}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\phi}' - \boldsymbol{\alpha} \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}'}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \quad (23)$$

ここに,  $h^*(\mathbf{x}, t)$ : 補完された水位の数値解[スカラー],  $f(\mathbf{x}, t)$ : 地下水モデルによる水位の数値解[スカラー],  $\hat{\mathbf{b}}$ : 空間不確定的偏り[定数],  $\boldsymbol{\phi}'$ : 地下水モデル数値解成分を差し引いた観測値ベクトル,  $\boldsymbol{\alpha}$ : 成分が全て1の定数ベクトル  $[n \times 1]$  である. 本研究では  $w(\mathbf{x})$  の共分散関数  $C(d)$  として, 既往の研究成果(浜口, 2001) から当てはまりの

良い一次元球型関数

$$C(d) = \begin{cases} \sigma^2 \left\{ 1 - 1.5 \left( \frac{d}{a} \right) + 0.5 \left( \frac{d}{a} \right)^3 \right\} & (0 \leq d \leq a) \\ 0 & (d > a) \end{cases} \quad (24a)$$

を採用している. ここに,  $d$ : 2点間の空間距離,  $\sigma^2$ : ランダム成分の分散値,  $a$ : 相間距離を表す.

### 3. モデル誤差補完の数値実験

#### 3.1 実験モデル

本研究では, 領域下流斜方からの立体的視点で描くと Fig.1となるような不圧状態の仮想帯水層を数値実験の考察対象とした. この帯水層の不透水基盤面は, 流れ断面が谷状になっており, 流下方向に一定傾斜している. 図中の○印は水位観測位置(9点), ●印は水位境界(5点), □印は揚水位置(3点)である. また図の左端(地下水集水域)と上方(地表面)から地下水涵養があるものと設定して, 有限要素法を用いた非定常平面地下水モデルの数値実験を試みた. 基礎式ならびにその有限要素方程式は, 先述の2. 2.1節を参照されたい. 実験では均質/不均質な

透水係数分布の2ケースを想定し、その透水係数分布同定後のモデル解析で得られた地下水位解と観測値との残差から地盤統計学的に水位の空間不確定量を評価し、それをモデル解に補完的に加えて得られる水位解の算出を目的とする。ただし、観測値には真のモデルを順解析で予め算出しておいた模擬観測値を用意する。

### 3.2 透水係数の同定

平面地下水モデルを最適化するため、透水係数の最尤同定値が必要である。その場合、モデル誤差に相当するランダム成分ならびに $\hat{b}$ の値を各観測値から取り除いて物理モデルだけが反映された観測値を上記係数の同定計算に使わねばならないという問題がある。そこで本研究では、逆解析手法に拡張Kalmanフィルタ有限要素法(長谷川ら, 1994; 浜口ら, 1997)を採用する。同手法はモデル誤差や異常値をフィルタしながら観測値を使ってパラメータを同定する処理機構であるため、本モデルに対する逆解析としては極めて理に適った方策である。同手法のアルゴリズムをFig.2に示す。いま状態変数 $\mathbf{x}_t$ を式(25)のように与える。

$$\mathbf{x}_t = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_t^1 \\ \mathbf{L}_t \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここに、 $\mathbf{h}_t^1$ は未知水量(式(7)の境界水位成分を除いた水位解ベクトル)、 $\mathbf{L}_t (= \log \mathbf{k}_t)$ は常用対数透水係数を表す。

### 3.3 数値実験における透水係数分布

まず真の地下水挙動を得るための地下水モデルに諸元を設定し、これに対して順解析を行ってFig.1で示した9点の観測点での模擬観測値を作成した。実際の透水係数分布は空間的に複雑な様相を呈していると思われるが、解析モデルの要素毎では要素内の平均透水量から得られる等価な透水係数として表現される。ここで用いた透水係数の空間分布はFig.3に簡略的に設定している。

次に、数値実験に用いるためのモデルの透水係数分布の空間構造を同定する。本実験のモデル透水係数分布は、予め設定した真の透水係数分布に対し、下記の2つの場合を想定する。

ケース1: 全域 $\{Z_1 \sim Z_{20}\}$ が均質区域の分布

ケース2: 真に同じく各区域 $Z_1 \sim Z_{20}$ 毎に異なる分布

Fig.4はケース毎の区域化設定ならびに各区域での透水係数の最尤同定結果を簡略に示している。ただし、同図に描かれた分布はFig.1やFig.3と方向等が対応しているものとする。また、その透水係数同定計算には前節に記載の逆解析手法を用いている。これらの結果から各ケース

毎のモデル解析解(水位)を算出し、その後、各ケース毎の空間不確定量を地盤統計学的に評価して観測点での任意時刻の水位残差が0になる推定を行った。上記手法によって、観測点以外の各節点の誤差もモデル解析解に比べて小さくなると期待される。

モデル誤差を空間補完する本手法に基づいて再現推定した水位を各ケース毎に各点で検証した。その結果、どの節点においてもほぼ同様の傾向を示したため、ここでは代表的な検証点としてFig.1の△印のE点に着目することとした。ここでは誤差補完の効果を見るために、両ケースのモデル解析解と提案モデル解を取り上げてFig.5に表した。ここに、実線は真の変動、+、×印はそれぞれケース1,2のモデル解析解を、▽、○印はそれぞれケース1,2の提案手法解を表している。この図では+と▽、×と○という記号間の差異が各ケースの誤差補完量を示しているが、任意の時間においても、▽印の方が+印よりも、また、○印の方が×印よりもそれぞれ実線(真値)に近いことが見て取れる。これは筆者の手法によって再現性の精度が向上していると言え、モデル誤差を空間補完した効果の程が窺える。特にモデル誤差の大きなケース1の方が顕著に現れている。また任意点でのモデル誤差の補完量が先に議論した水位変分量と等しければ、この解は必要十分な解(厳密解と同値)となるが、本実験ではE点で既に残差があることから解の必要十分性を満たしていない。しかしこの解が再現性がよくないというわけではない。真の地下水挙動がモデル解に完全に一致しない場合、透水特性分布の解析設定のどこかに不備があつて、そこからモデル誤差が生じていても、その場所と誤差状況を特定できないため、モデル誤差の厳密解を算出することは困難で、モデル誤差を埋められないままになる。これに対して本方法ではモデル誤差を観測データから空間的に算定し解析解に加えて必要十分な解に近づけるため、本手法が従来の手法より汎用性は高いと言える。以上の実験から、本提案手法によるモデル誤差の空間補完能力の高さと有効性が確認できる。

## 4. 透水係数分布モデル構築とモデル誤差

### 4.1 一般同定解の分類

非適切な逆問題を解くことは、相当幸運な観測データや先験情報の入手がない限り、一般的に大変困難であるのは周知の事実である。ここではまず一般的な同定解について整理分類する。

数学的に厳密に言えば、同定解は未知数(パラメータ数)と観測数の関係から、

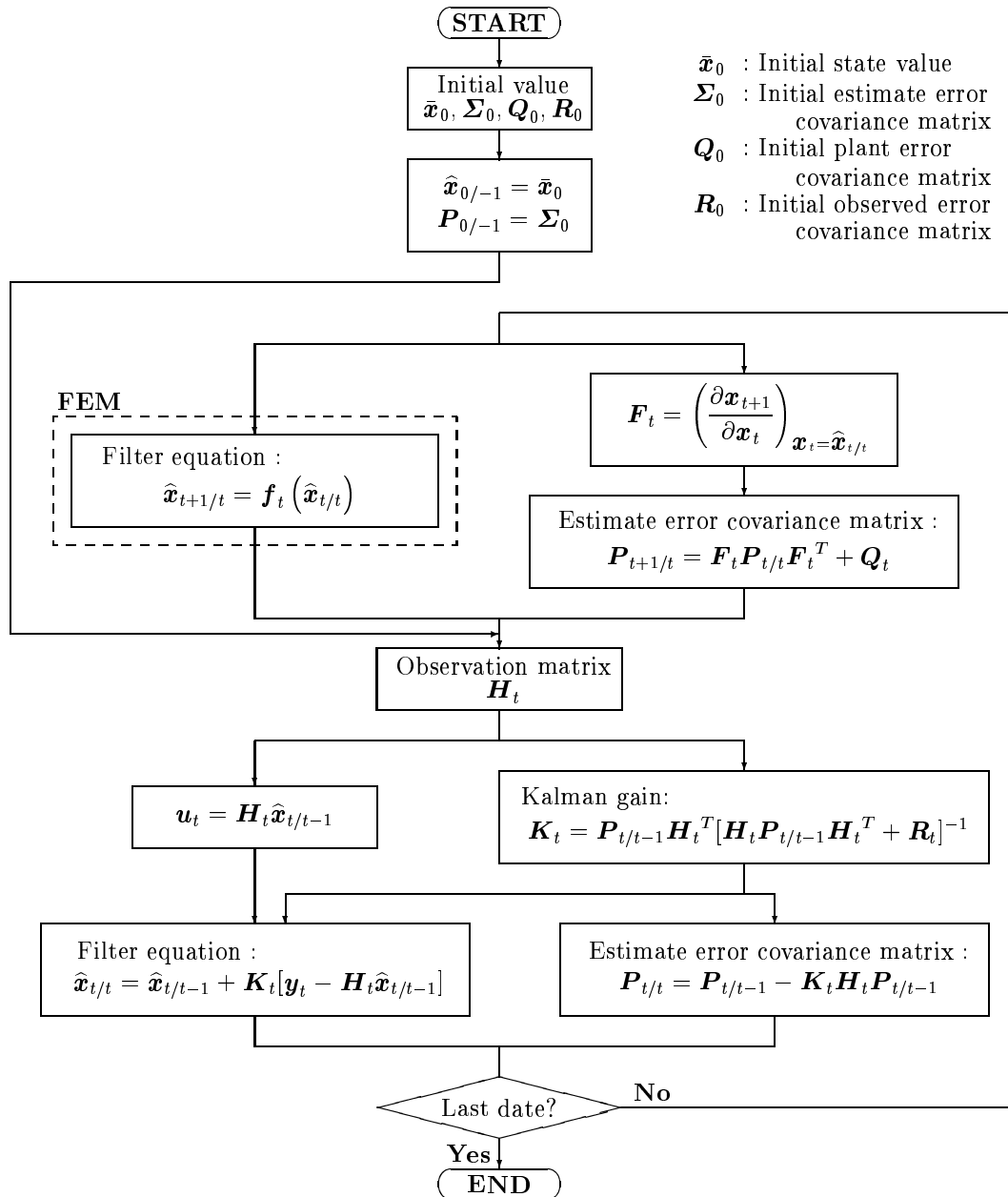


Fig.2 Algorithm of Extended Kalman filter-FEM

(a) 不能解：観測数  $\geq$  未知数であっても「解なし」  
 (b) 一意解：観測数  $\geq$  未知数であって「解が唯一」  
 (c) 不定解：観測数  $<$  未知数であって「解が不特定多数」に分類される。項目 (a) は全ての観測データを満たすような解がないだけであって、少なくとも2個以上の観測データを満たす解は数多に存在する。数学的には「解なし」に分類されてしまうが、実験や観測を行った場合には当たり前のような状態である。そこでは、各観測条件からの(重み付きの)誤差評価規準が最小となるパラメータ値を探り出せばよいとされている。最も単純なものは先述の2個以上のデータを満たす複数の解の平均を取る方法であり、最もよく使われているものは最小2乗法で

ある。項目 (b) は各観測データを全て同時に満たす解になっているのである。これは厳密解であると言える。項目 (c) は工学的に非適切な逆問題と呼ばれ、我々がよく実務で直面する問題である。観測データ数に対して、求めるべき未知数が多すぎて解が定まらない状態に陥っている。その中で比較的処理しやすいのは有限個の解に絞れている場合である。これは真の解と局所解との判別がつかないだけなので、各同定解を本問題に戻して解析を行い、どこかに矛盾した挙動が出てないかを調べてみて十分性を確かめてみる、ないしは、それをやる前に十分性を見出す不等式的条件を与えて、局所解と真の解を識別すればよい。そうでなく無限個の解になる(解空間で

Exact	215.3322 (Z <sub>4</sub> )	255.5558 (Z <sub>8</sub> )	321.1791 (Z <sub>12</sub> )	400.0000 (Z <sub>16</sub> )	383.3276 (Z <sub>20</sub> )
	173.9983 (Z <sub>3</sub> )	200.0000 (Z <sub>7</sub> )	272.5400 (Z <sub>11</sub> )	329.4123 (Z <sub>15</sub> )	346.6049 (Z <sub>19</sub> )
	136.6654 (Z <sub>2</sub> )	171.4817 (Z <sub>6</sub> )	226.1393 (Z <sub>10</sub> )	273.9904 (Z <sub>14</sub> )	300.0000 (Z <sub>18</sub> )
	100.0000 (Z <sub>1</sub> )	146.4934 (Z <sub>5</sub> )	194.3980 (Z <sub>9</sub> )	235.9593 (Z <sub>13</sub> )	265.2360 (Z <sub>17</sub> )

Unit: m/day

Fig.3 Exact distribution of imhomogeneous permeabilities

Case 1	221.5426 (Z <sub>1</sub> ~Z <sub>20</sub> )				
Case 2	219.3408 (Z <sub>4</sub> )	263.1140 (Z <sub>8</sub> )	289.9044 (Z <sub>12</sub> )	382.6352 (Z <sub>16</sub> )	380.4207 (Z <sub>20</sub> )
	168.8113 (Z <sub>3</sub> )	224.7142 (Z <sub>7</sub> )	254.9413 (Z <sub>11</sub> )	348.1349 (Z <sub>15</sub> )	352.3683 (Z <sub>19</sub> )
	135.8332 (Z <sub>2</sub> )	185.8441 (Z <sub>6</sub> )	215.4022 (Z <sub>10</sub> )	273.9089 (Z <sub>14</sub> )	295.5448 (Z <sub>18</sub> )
	101.7502 (Z <sub>1</sub> )	144.2885 (Z <sub>5</sub> )	180.1621 (Z <sub>9</sub> )	237.3977 (Z <sub>13</sub> )	260.8399 (Z <sub>17</sub> )

Unit: m/day

Fig.4 Identification result of uniform/piecewise permeabilities

直線や曲線，平面や曲面といった幾何的な形状の集合になる) 場合は最適解を定める必要が出てくる。上述のように個々の解に対して十分性を確かめることは不可能である。結果的には，多数の解から唯一に定めなければならないことになるので，観測以外の情報を使わなければならない。現在有力な1つとして活用される頻度の高いものが先験/事前情報を利用した方法である。最も典型的な使い方としては，「各観測データからの(重み付き)誤差」+「先験/事前情報による推定誤差」の規準が(この後者の推定誤差に重みを付けて)最小となることを考える。これで得られる解を最適解とする方法である。

一例として，パラメータが  $p, q$  であったときの解空間を Fig.6~8 に示す。観測の1データが1つの観測方程式として機能し，解空間上の1曲線に相当する。その曲線の交点が解となる。Fig.6では，観測方程式からの距離の和が最小となる点を最適解として扱った図になっている。Fig.7では，全ての観測方程式が1点で交差した図である。Fig.8では，観測方程式はその上の点全てが全ての解になり得ると考えられる解集合なので，そこから1点の解を定める必要がある。先験/事前情報の推定誤差の等高線を描いた上で，観測方程式の中で最も小さくなる点を求めて，その点を最適解と考える場合が多い。しかし，それでは先験/事前情報の重みがゼロになり，次時刻に反映されないものとなるため，ここではさらにその点と先験/事前情報で最適と推定された点との重み付けによる折衷的な内分

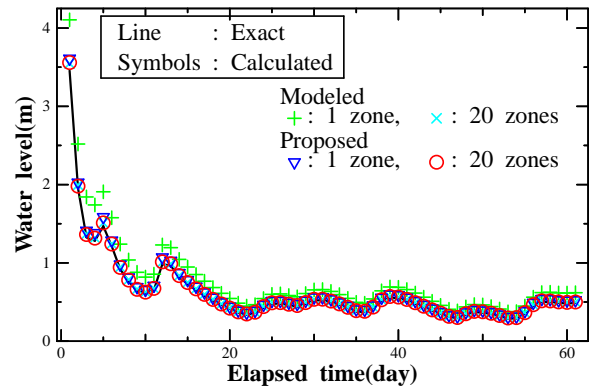


Fig.5 Variation in water levels at point E

点を最適解とした図を示した。これを続けて，次時刻での観測データから最適解を逐次更新していき，最終的には収束に向かわせるのが目的となる。

#### 4.2 分布同定の一意解を得る条件

実務では，パラメータ同定の非適切な問題，特に「観測数<未知数」となるケースに頻繁に遭遇する。そこで同ケースに直面しても観測データから安定した一意の同定解を得る策を講じる。

いま前節の解の分類項目 (a) の最適解も連立解として認めた上で同定解を考察すると，少なくとも

**条件 1** : 観測数  $\geq$  未知数

**条件 2** : 共線性のあるデータを除いても条件1を満たしているような観測データの採取と確認

**条件 3** : パラメータの区域化に伴う各区域での観測更新感度の確保

に掲げた3条件が満たされていなければならない。**条件 1** は方程式の可解性，つまり「連立方程式の数」と「未知パラメータの数」の関係から自明である。**条件 2** は類似性データを除いても，パラメータ同定のためのデータ数は充足しているという条件を意味する。一般に類似した観測データは，近接した観測点や空間周期的変動場で同じ位相にある観測点に多く見受けられるが，その場合，それらは同一のデータとして処理せざるを得ない。それ故，実質の観測数はその分だけ減ってしまっていることになるので，独立したデータとして扱える数を確認するのである。結果的に最後まで残った時系列観測データは全て互いに類似性はないということになる。**条件 3** は観測データからパラメータ同定値を更新する際の，データの影響圏とパラメータ区域化(分布化)との関係を述べたものである。1つの均一区域の透水係数を求めるには，その値が直接的に反映された高感度の水位の観測点とその区域内に1点以上必要なのである。各区域で観測からの更新感度を向上する方策としては，局所的な変動(モデル

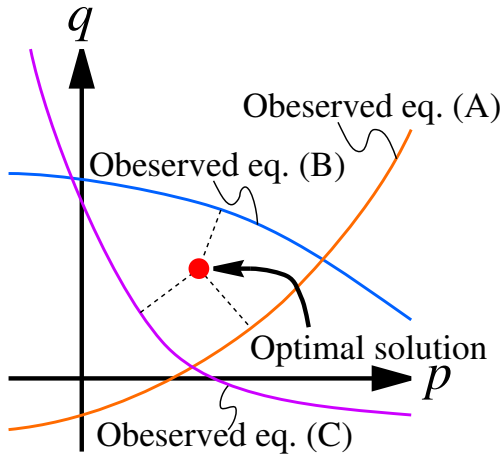


Fig.6 Example of solution space in pattern (a) : unsolvable

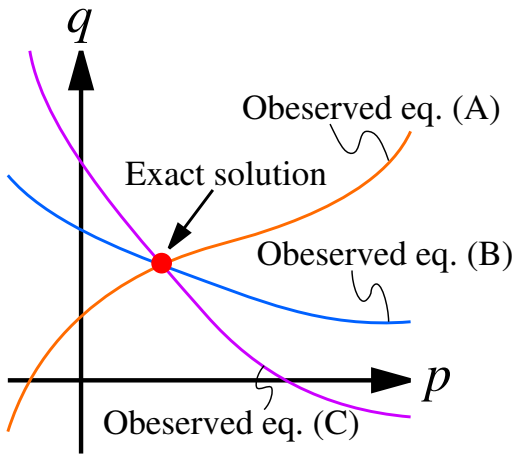


Fig.7 Example of solution space in pattern (b) : unique and exact

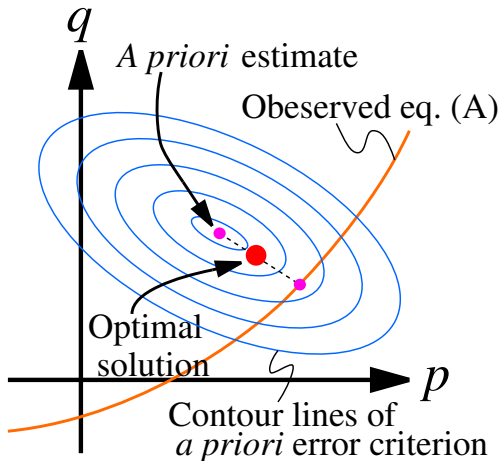


Fig.8 Example of solution space in pattern (c) : variable

の緻密さ)を犠牲にしつつ、透水係数分布を粗く再区域化した上で、その新たな分布で同定するのが既往の妥協策である。一方、区域化の変更なく求める策は、先験/事前

情報の利用で局所解と正解とが区別し易くなる反面、区域透水係数は変わらず互いに独立なため観測更新感度も変化なく鈍いという短所はそのまま維持されてしまうのである。

#### 4.3 透水係数分布モデル

3.3節に述べたとおり、実際の透水係数分布は空間的に複雑な様相を呈しているため、解析時の同分布設定がモデル誤差発生の一役を担う可能性がある。特に3.3節ケース2のように各要素毎に未知な透水係数区域を設けても、観測方程式に入れる観測データ数の不足や、観測点配置の拙さによる類似観測データ発生などの不適切条件下では、パラメータ同定の状態方程式が不定になって高精度の同定解が一意的に求まりにくくなる。Fig.3に対するケース2の解がFig.4のようになってしまうことからその事実が窺い知れる。

これらは4.2節条件3に対処する必要がある。そこで、透水係数値、ないしは、その常用対数値が空間連続的に分布しているという仮定の下で、同分布モデルとしてOrdinary block kriging(OBK)による地盤統計モデルを当てはめる。この利点は透水係数の空間不均質性をひとまとめで扱うことで、未知数が同一透水係数の区域数(=要素数)からOBKのパラメータ数まで減らし、観測数>未知数を実現させて、条件1,3を同時に満す状態にする点にある。ただし、上述したように観測データに類似性があれば実質的に観測数が減少していることになるために解が求まらない場合もある。OBKによる推定式は基本的に式(21)と同じで、

$$k^*(\mathbf{x}) = \hat{k}_0 + \mathbf{c}(\mathbf{x})^T \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{w}} \quad (26)$$

$$\text{ただし、} \quad \hat{k}_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\alpha} \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi}}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \quad (28)$$

と書ける。ここに、 $\hat{k}_0$ :トレンドのドリフト[定数]である。なお、常用対数透水係数の分布を推定するならば、 $k^*(\mathbf{x})$ を $\log k^*(\mathbf{x})$ 、 $\hat{k}_0$ を $\log \hat{k}_0$ と置き換えて対応すればよく、本手法の一般性は失われない。

#### 4.4 状態変数の変更と観測更新感度行列

同定時に用いる式(25)の状態変数 $\mathbf{x}_t$ の透水係数に関する成分を共分散関数の未知定数ベクトルに変更し、

$$\mathbf{x}_t = \begin{Bmatrix} h_t^1 \\ \boldsymbol{\zeta}_t \end{Bmatrix} \quad (29)$$

とする。ここに、 $\boldsymbol{\zeta}_t = \{(\zeta_1)_t, (\zeta_2)_t\}^T = \{(\sigma^2)_t, a_t\}^T$ と定義した部分変数ベクトルを表す。なお $\hat{k}_0$ は $\boldsymbol{\zeta}$ が定ま



ると式(27)により決まる従属変数のため、状態変数に含めない。これに伴い、Fig.2の状態遷移行列 $\mathbf{F}_t$ も以下の4つの感度行列から構成される。

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{h}_{t+1}^1}{\partial \mathbf{h}_t^1} \right) \mathbf{h}_t^1 = \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 & \left( \frac{\partial \mathbf{h}_{t+1}^1}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \right) \boldsymbol{\zeta}_t = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{t/t} \\ \left( \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_{t+1}}{\partial \mathbf{h}_t^1} \right) \mathbf{h}_t^1 = \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 & \left( \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_{t+1}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \right) \boldsymbol{\zeta}_t = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{t/t} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{hh} & \mathbf{J}_{h\zeta} \\ \mathbf{J}_{\zeta h} & \mathbf{J}_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (31)$$

いま、 $\mathbf{h}_t^2$ を既知境界水位量(式(7)の境界水位成分を抽出した水位ベクトル)とし、これに呼応して、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{t+\theta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}^1 \\ \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}^2 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

の様に小行列/小ベクトルに分解する。式(7)を $\mathbf{h}_{t+1}^1$ について書き下せば、

$$\mathbf{h}_{t+1}^1 = \mathbf{A}_{11}^{-1} [\mathbf{B}_{11} \mathbf{h}_t^1 + \mathbf{B}_{12} \mathbf{h}_t^2 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{h}_{t+1}^2 + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta}^1] \quad (35)$$

であるので、各感度行列は

$$\mathbf{J}_{hh} = \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{11} \quad (36)$$

$$\mathbf{J}_{h\zeta} = \mathbf{A}_{11}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_{11}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 + \frac{\partial \mathbf{B}_{12}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \mathbf{h}_t^2 - \frac{\partial \mathbf{A}_{11}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t}^1 - \frac{\partial \mathbf{A}_{12}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \mathbf{h}_{t+1}^2 \right] \quad (37)$$

$$\mathbf{J}_{\zeta h} = \mathbf{0} \quad (38)$$

$$\mathbf{J}_{\zeta\zeta} = \mathbf{I}_2 \quad (39)$$

となる。なお、上記の $\mathbf{J}_{h\zeta}$ において、

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} = \theta \frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \mathbf{T}_{ij} \quad \left[ \mathbf{T}_{ij} \equiv \frac{\partial \mathbf{S}_{ij}}{\partial \mathbf{k}_t} \text{ と定義} \right] \quad (40)$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{k}}_0}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} (\mathbf{c}(\mathbf{x})^T \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{w}}) \\ &= \left\{ \left( \frac{\mathbf{c}(\mathbf{x})^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha} - 1}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\alpha}^T - \mathbf{c}(\mathbf{x})^T \right) \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} + \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \right\} \left\{ \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{C}^{-1} \right\} \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (41)$$

と書ける。同様に、

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{ij}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} = -(1-\theta) \frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \mathbf{T}_{ij} \quad (43)$$

と記述でき、最終的に

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{h\zeta} &= -\mathbf{A}_{11}^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \boldsymbol{\zeta}_t} \left[ (1-\theta) \left\{ \mathbf{T}_{11} \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 + \mathbf{T}_{12} \mathbf{h}_t^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \theta \left\{ \mathbf{T}_{11} \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t}^1 + \mathbf{T}_{12} \mathbf{h}_{t+1}^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (44)$$

を得る。拡張Kalmanフィルタの観測更新感度は、カルマンゲイン行列 $\mathbf{K}_t$ と時間更新後の推定誤差共分散行列 $\mathbf{P}_{t/t-1}$ が

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T \left[ \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t \right]^{-1} \quad (45)$$

$$\mathbf{P}_{t/t-1} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t-1/t-1} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{Q}_t \quad (46)$$

で求まることを踏まえ、観測行列 $\mathbf{H}_t$ やプロセス誤差共分散行列 $\mathbf{Q}_t$ がほとんど変動しないならば、状態遷移行列 $\mathbf{F}_t$ の変動が支配的となって $\mathbf{K}_t$ は変動することになるため、この $\mathbf{F}_t$ を間接的に評価すればよい。

一方、区域で同定している時の $\mathbf{F}_t$ は、式(25)の様に常用対数透水係数を用いた場合、先の結果で式(36)~(39)の異なる箇所だけ抜き出すと、

$$\mathbf{J}_{Lh} = \mathbf{0} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{hL} &= \mathbf{A}_{11}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_{11}}{\partial \mathbf{L}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 + \frac{\partial \mathbf{B}_{12}}{\partial \mathbf{L}_t} \mathbf{h}_t^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{A}_{11}}{\partial \mathbf{L}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t}^1 - \frac{\partial \mathbf{A}_{12}}{\partial \mathbf{L}_t} \mathbf{h}_{t+1}^2 \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\mathbf{J}_{LL} = \mathbf{I}_{20} \quad (49)$$

であり、 $\mathbf{J}_{hL}$ は、対角行列 $\mathbf{D}_t \equiv \text{Diag}(\mathbf{k}_t)$ を用いて、

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial \mathbf{L}_t} = \theta (\ln 10) \mathbf{D}_t \mathbf{U}_{ij} \quad \left[ \mathbf{U}_{ij} \equiv \frac{\partial \mathbf{S}_{ij}}{\partial \mathbf{k}_t} \text{ と定義} \right] \quad (50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{ij}}{\partial \mathbf{L}_t} = -(1-\theta) (\ln 10) \mathbf{D}_t \mathbf{U}_{ij} \quad (51)$$

と表記すると、最終的には

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{hL} &= -(\ln 10) \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{D}_t \left[ (1-\theta) \left\{ \mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 + \mathbf{U}_{12} \mathbf{h}_t^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \theta \left\{ \mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t}^1 + \mathbf{U}_{12} \mathbf{h}_{t+1}^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

が得られる。

また、本稿では扱っていないが、通常の透水係数を変数成分に用いた状態変数

$$\mathbf{x}_t = \begin{Bmatrix} \mathbf{h}_t^1 \\ \mathbf{k}_t \end{Bmatrix} \quad (53)$$

に変更した場合は、同様に異なる箇所だけを抜き出すと、

$$\mathbf{J}_{kh} = \mathbf{0} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{hk} &= \mathbf{A}_{11}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}_{11}}{\partial \mathbf{k}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 + \frac{\partial \mathbf{B}_{12}}{\partial \mathbf{k}_t} \mathbf{h}_t^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{A}_{11}}{\partial \mathbf{k}_t} \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t}^1 - \frac{\partial \mathbf{A}_{12}}{\partial \mathbf{k}_t} \mathbf{h}_{t+1}^2 \right] \end{aligned} \quad (55)$$

$$\mathbf{J}_{kk} = \mathbf{I}_{20} \quad (56)$$

となり、 $\mathbf{J}_{hk}$ は

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial \mathbf{k}_t} = \theta \mathbf{U}_{ij} \quad (57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{ij}}{\partial \mathbf{k}_t} = -(1-\theta) \mathbf{U}_{ij} \quad (58)$$

と表記することで、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{hk} &= -\mathbf{A}_{11}^{-1} \left[ (1-\theta) \left\{ \mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{h}}_{t/t}^1 + \mathbf{U}_{12} \mathbf{h}_t^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \theta \left\{ \mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{h}}_{t+1/t}^1 + \mathbf{U}_{12} \mathbf{h}_{t+1}^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (59)$$

と書ける。

これら各場合の結果を総じて比較検討する。まず式(44)と式(59)との比較から、 $\mathbf{J}_{h\zeta}$ と $\mathbf{J}_{hk}$ の両者は類似した感度行列の構造であることがわかる。後者に比べて前者は一見複雑そうであるが、前者はゼロ成分がなく領域全体に感度がある $\mathbf{T}_{ij}$ が利用されているため、 $\mathbf{T}_{ij}\mathbf{h}$ の成分も全てゼロでなく感度が高い。これに対して、後者は区域単位でしか感度を持たず、ほとんどの成分がゼロの $\mathbf{U}_{ij}$ が利用されていて、 $\mathbf{U}_{ij}\mathbf{h}$ も感度のない点での成分がゼロであるために、これに $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ を左方から乗じてもその影響が大きくなってしまふ。前者はまた $\partial k_t/\partial \zeta_t$ と $\mathbf{T}_{ij}\mathbf{h}$ とで構成される2階テンソルが効いていて、感度行列の成分数を大きく減らすことに寄与している。つまり、前者では状態変数に対するパラメータの更新感度ノルムが大きくなることで修正感度が大きくなり、かつ、パラメータ1つ当たりの修正感度範囲が広く領域全体に渡っていることがわかる。これに対して後者は3階テンソル $\mathbf{U}_{ij}$ やそれに $\mathbf{h}$ を乗じた後の2階テンソルにも多量のゼロ成分を有するため、感度行列の成分数を膨れあがらせている。状態変数に対するパラメータの更新感度も大きい成分とそうでない成分が明瞭に分かれてしまい、かつ、パラメータ1つ当たりの修正感度範囲が狭く(ほぼ区域単位)なることがわかる。

次に式(52)と式(59)との比較によって、 $\mathbf{J}_{hL}$ と $\mathbf{J}_{hk}$ の両者は基本的にかなり類似した感度行列の構造であることが見て取れる。透水係数を状態変数に組み込む際に常用対数化したか否かの違いが $\mathbf{A}_{11}^{-1}$ に乗じるテンソル $\mathbf{D}_t$ や定数係数( $\ln 10$ )となって現れているのみである。

最後に、式(44)と式(52)との比較に関しては、 $\mathbf{J}_{hz}$ と $\mathbf{J}_{hL}$ の両者は比較的類似した感度行列の構造であることがわかる。この比較検討は最初の $\mathbf{J}_{hz}$ と $\mathbf{J}_{hk}$ の検討とほとんど同じであるので以降は省略する。

#### 4.5 モデル分布同定とモデル誤差の数値実験

ここで提案した分布モデルに対しての同定精度、モデル誤差、観測更新感度について検討すべく、4.4節の変更を反映して、数値実験を行った。このときの場合を3.3節に掲げたケースに続いて、**ケース3**とする。透水係数の観測は、 $Z_1, Z_7, Z_{16}, Z_{18}$ にて、本稿での一要素以上に大きくならない影響圏での原位置試験ないしは室内要素試験で観測値が得られたと考える。その他の境界条件や観測条件は3.1節の数値実験と同じとする。その同定実験を行ったところ、 $\sigma^2=20.0(\text{m}^2/\text{day}^2)$ 、 $a=1000.0(\text{m})$ 、 $\hat{k}_0=243.7905(\text{m}/\text{day})$ が得られた。それをOBKによるモデル分布を推定した結果がFig.9である。これはFig.3と比

Case 3	215.3322 ( $Z_4$ )	255.5558 ( $Z_8$ )	321.1791 ( $Z_{12}$ )	400.0000 ( $Z_{16}$ )	383.3276 ( $Z_{20}$ )
	173.9983 ( $Z_3$ )	200.0000 ( $Z_7$ )	272.5400 ( $Z_{11}$ )	329.4123 ( $Z_{15}$ )	346.6049 ( $Z_{19}$ )
	136.6654 ( $Z_2$ )	171.4817 ( $Z_6$ )	226.1393 ( $Z_{10}$ )	273.9904 ( $Z_{14}$ )	300.0000 ( $Z_{18}$ )
	100.0000 ( $Z_1$ )	146.4934 ( $Z_5$ )	194.3980 ( $Z_9$ )	235.9593 ( $Z_{13}$ )	265.2360 ( $Z_{17}$ )

Unit: m/day

Fig.9 Identification result of OBK-based permeabilities

較しても同じものが得られていることがわかる。当然ながら、この場合のモデル誤差は明らかにゼロである。このように空間相関性が強い場合、本手法で行うことで物理性を考慮しつつもその特性分布を地盤統計学に基づいてモデル化してやれば、不均質な透水係数分布を比較的容易に同定できるようになると言える。またこのモデルの利用は一意性もある同定解を求めるにも有用であるとわかる。

#### 5. 結論

本研究では、平面地下水モデルに対して空間分布の異なる透水係数を変数とした水位変分量の厳密解を有限要素法を基にして求めた。特に、一方が厳密な透水係数分布を完全に表せていた場合に、その水位変分量はモデル誤差に等しくなると言える。そこで、本研究はそのモデル誤差を補完するために、物理モデルと地盤統計モデルが融合したモデルを導入し、透水係数によるモデル誤差発生を出来る限り軽減する方向で検討した。数値実験を通して、筆者の方法が有効に働き、モデル誤差は全体的に軽減されたことが示された。

しかしながら、観測数が透水係数の未知数に対して不足する条件下であるために物理モデルの構造同定解として高精度な一意性のものが得られず、この条件下ではモデル誤差の完全なる解消には至れない。したがって透水係数の空間不均質性もまた地盤統計学の一手法であるOBKによってモデル化し、地下水モデルの透水係数分布として与え、そのパラメータを物理モデル上で直接的に同定する数値実験を試みた。このモデル化は観測更新感度も広がった良好な状態と同定精度のかなり良好な一意解をもたらした。そのときのモデル誤差は明らかにゼロであった。以上より、本手法は不均質な透水係数分布の同定解の一意性確保、同定解の精度向上、その分布を用いたモデル解析の再現精度の向上、モデル誤差の解消には非常に有効な手段であることが分かった。

## 参考文献

- 長谷川高士, 村上 章, 浜口俊雄 (1994): 拡張 Kalman フィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/III-29.
- 浜口俊雄 (2001): 地下水流況推定における地盤統計学的アプローチの効用, 京都大学防災研究所年報, 第 44 号 B-2, pp.455-463.
- 浜口俊雄 (2002): 統計学的に評価した空間不確定量の地下水流動モデルへの適用, 京都大学防災研究所年報, 第 45 号 B-2, pp.677-685.
- 浜口俊雄 (2003): 地下水流動に対するモデル誤差の地盤統計学的改善策と最適モデルの選択法, 水工学論文集, 第 47 巻, pp.295-300.
- 浜口俊雄 (2004): 透水係数を変量とした地下水位変分量の厳密解と透水係数の不均一分布構造の同定, 水工学論文集, 第 48 巻, pp.361-366.
- 浜口俊雄, 村上 章, 長谷川高士 (1997): 平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/III-39, pp.133-145.
- Chilés, J. and Delfiner, P. (1999): *Geostatistics Modeling Spatial Uncertainty*, John Wiley & Sons, Inc..
- Wackernagel, H. (1995): *Multivariate Geostatistics*, Springer.

# Geostatistical Countermeasures for Solving the Ill-posed Problem of Identifying a distributed Model Structure of Inhomogeneous Permeabilities

Toshio HAMAGUCHI

## Synopsis

This study shows that the distributed parameter modeled herein can improve the effectiveness of solving inverse and ill-posed problems through the numerical experiments. A model structure of distributed permeability to be identified is formed with a geostatistical-based model. A hypothetical aquifer divided into twenty constant-permeability zones is designed. The attempts that twenty permeabilities are piecewisely identified, and that geostatistical-based parameters are identified, are carried out. The former solution is described with part inaccuracy. The latter one is accurately represented. It can be proven that the proposed approach to overcome an ill-posed problem is highly successful in identifying a distributed permeability.

**Keywords :** permeability, geostatistical-based model, model structure, ill-posed problem, inhomogeneity