京都大学防災研究所年報　第 52 号 B　平成 21 年 6 月
Annuals of Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 52 B, 2009

砂の力学モデルとしての多重せん断モデルの有限ひずみ（大変形）解析の定式化

井合　進・上田恭平・飛田哲男・小堤　治*

＊ 京都大学防災研究所非常勤講師・明窓社（株）

要　旨

本研究では,砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間での多重せん断モデルを基に，大変形解析（有限ひずみ解析）に必要なTotal Lagrangian(TL法)法，および，Updated Langrangian法(UP法)の両者による定式化を示す。大変形解析に必要な定式化においては，圧縮性を考慮した超弾性体の大変形解析理論を基に，これに，多重せん断機構および非線形性（カップリング項としてのダイレイタンシを含む）を盛り込んだ定式化を示す。

キーワード: 構成式，有限ひずみ，大変形，砂

1.　はじめに

本研究では，砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間での多重せん断モデル（Iai & Ozutsumi, 2005）を基に，大変形解析（有限ひずみ解析）に必要な定式化を示すことを目的とする。Total Lagrangian(TL法)法，および，Updated Langrangian法(UP法)の両者による定式化を示す。大変形解析に必要な定式化においては，圧縮性を考慮した超弾性体の大変形解析理論（例えば，Holzapfel, 2000）を参考として，これに，多重せん断機構および非線形性（カップリング項としてのダイレイタンシを含む）を盛り込んだ定式化を行う。

2.　微小変形での構成式（テンソル成分表示）

大変形解析での構成式の定式化に先立ち，まず，微小変形解析での構成式の要点を，以下に，主要な数式の列挙の形式で，簡潔にまとめておく。

2.1　積分形

$$\sigma'_{kl} = -p\delta_{kl} + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} q^{(ij)} \left\langle t_k^{(ij)}, n_l^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{1}$$

$$\left\langle t_k^{(ij)}, n_l^{(ij)} \right\rangle = t_k^{(ij)} n_l^{(ij)} + n_k^{(ij)} t_l^{(ij)} \tag{2}$$

2.2　増分形

(1)　従来法

$$\mathrm{d}\sigma'_{kl} = D_{klmn}\mathrm{d}(\varepsilon_{mn} - \varepsilon_0\delta_{nm}) \tag{3}$$

$$D_{klmn} = K_{\mathrm{L/U}}\delta_{kl}\delta_{mn} + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \left\langle t_k^{(ij)}, n_l^{(ij)} \right\rangle \left\langle t_m^{(ij)}, n_n^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{4}$$

$$\mathrm{d}p = -K_{\mathrm{L/U}}\mathrm{d}\varepsilon \tag{5}$$

$$\mathrm{d}q^{(ij)} = G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\mathrm{d}\gamma^{(ij)} \tag{6}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon = \delta_{mn}\mathrm{d}\varepsilon_{mn} \tag{7}$$

$$\mathrm{d}\gamma^{(ij)} = \left\langle t_m^{(ij)}, n_n^{(ij)} \right\rangle \mathrm{d}\varepsilon_{mn} \tag{8}$$

$$q^{(ij)} = \frac{\dfrac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}}{1 + \left|\dfrac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}\right|} q_{\mathrm{v}} \tag{9}$$

$$G_{\mathrm{L}}^{(ij)} = \frac{1}{\left(1 + \left|\dfrac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}\right|\right)^2} \frac{q_{\mathrm{v}}}{\gamma_{\mathrm{v}}} \tag{10}$$

(2)改良反復法

改良反復法の定式化は，カクテルグラスモデル（井合他, 2008）の場合が最も一般的（複雑）で，以下のとおりとなる。

まず，式(1)の等方成分 p および仮想単純せん断応力 $q^{(ij)}$ は，有効体積ひずみ ε'，仮想有効体積ひずみ ε''，および仮想単純せん断ひずみ $\gamma^{(ij)}$ の関数として，以下で与える。

$$p = p(\varepsilon') \tag{11}$$

$$q^{(ij)} = q^{(ij)}(\gamma^{(ij)},\ \varepsilon',\ \varepsilon'') \tag{12}$$

ここに，有効体積ひずみ ε' は，体積ひずみからダイレイタンシーによる体積ひずみ成分を除去したものであり，以下で与える。

$$\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{d}} \tag{13}$$

同様に，仮想有効体積ひずみ ε'' は，体積ひずみから収縮的ダイレイタンシーによる体積ひずみ成分を除去したものであり，以下で与える。

$$\varepsilon'' = \varepsilon - \varepsilon_d^c \tag{14}$$

ここで，これらのダイレイタンシーによる体積ひずみ成分の増分は，ひずみ増分の線形変換で与えられるものとし，これを以下のとおり書く。

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}} = n_{mn}^{\mathrm{d}} \mathrm{d}\varepsilon_{mn} \tag{15}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} = n_{mn}^{\mathrm{dc}} \mathrm{d}\varepsilon_{mn} \tag{16}$$

以上により，増分形の構成式は，式の両辺の微分をとれば，以下で与えられる。

$$\mathrm{d}\sigma'_{kl} = -\mathrm{d}p\delta_{kl} + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \mathrm{d}q^{(ij)} \left\langle t_k^{(ij)}, n_l^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{17}$$

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}\mathrm{d}\varepsilon' \tag{18}$$

$$\mathrm{d}q^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}}\mathrm{d}\gamma^{(ij)} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'}\mathrm{d}\varepsilon' + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''}\mathrm{d}\varepsilon'' \tag{19}$$

式(18)(19)に，式(7)(8)(13)～(16)を代入すると，

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}\left(\delta_{mn} - n_{mn}^{\mathrm{d}}\right)\mathrm{d}\varepsilon_{mn} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}q^{(ij)} &= \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}}\left\langle t_m^{(ij)}, n_n^{(ij)} \right\rangle \mathrm{d}\varepsilon_{mn} \\ &+ \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'}\left(\delta_{mn} - n_{mn}^{\mathrm{d}}\right)\mathrm{d}\varepsilon_{mn} \\ &+ \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''}\left(\delta_{mn} - n_{mn}^{\mathrm{dc}}\right)\mathrm{d}\varepsilon_{mn}\end{aligned} \tag{21}$$

よって，増分形の構成式が以下のように与えられる。

$$\mathrm{d}\sigma'_{kl} = D_{klmn}\mathrm{d}\varepsilon_{mn} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}D_{klmn} &= K_{\mathrm{L/U}}\delta_{kl}\delta_{mn} \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \left\langle t_k^{(ij)}, n_l^{(ij)} \right\rangle \left\langle t_m^{(ij)}, n_n^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \\ &- K_{\mathrm{L/U}}\delta_{kl} n_{mn}^{\mathrm{d}} \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \left(H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} + L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\right) \left\langle t_k^{(ij)}, n_l^{(ij)} \right\rangle \delta_{mn}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \\ &- \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \left(H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \left\langle t_k^{(ij)}, n_l^{(ij)} \right\rangle n_{mn}^{\mathrm{d}}\right)\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \left(L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \left\langle t_k^{(ij)}, n_l^{(ij)} \right\rangle n_{mn}^{\mathrm{cd}}\right)\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}\end{aligned} \tag{23}$$

ここに，

$$K_{\mathrm{L/U}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'} \tag{24}$$

$$G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \tag{25}$$

$$H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} \tag{26}$$

$$L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} \tag{27}$$

以上の各項の具体的な計算については，カクテルグラスモデルの定式化の資料（井合他， 2008）を参照のこと。

3. 微小変形での構成式（Notationの変更）

以上の構成式を，Holzapfel (2000)の Notation を用い，以下のように表記しておく。

3.1 積分形

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} q^{(ij)} \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{28}$$

$$\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle = \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} + \mathbf{n}^{(ij)} \otimes \mathbf{t}^{(ij)} \tag{29}$$

3.2　増分形

(1) 従来法（FLIP）

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbb{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\varepsilon}_0 \mathbf{I}) \tag{30}$$

$$\mathbb{C} = K_{\mathrm{L/U}}\left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\right) + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \otimes \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{31}$$

$$\dot{p} = -K_{\mathrm{L/U}} \dot{\varepsilon} \tag{32}$$

$$\dot{q}^{(ij)} = G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \dot{\gamma}^{(ij)} \tag{33}$$

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{I} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{34}$$

$$\dot{\gamma}^{(ij)} = \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{35}$$

$$q^{(ij)} = \frac{\dfrac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}}{1 + \left|\dfrac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}\right|} q_{\mathrm{v}} \tag{36}$$

$$G_{\mathrm{L}}^{(ij)} = \frac{1}{\left(1 + \left|\dfrac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}\right|\right)^2} \frac{q_{\mathrm{v}}}{\gamma_{\mathrm{v}}} \tag{37}$$

(2）改良反復法（FLIP）

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = -\dot{p}\mathbf{I} + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \dot{q}^{(ij)} \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{38}$$

$$\dot{p} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'} \dot{\varepsilon}' \tag{39}$$

$$\dot{q}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \dot{\gamma}^{(ij)} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} \dot{\varepsilon}' + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} \dot{\varepsilon}'' \tag{40}$$

ここに，

$$\dot{\varepsilon}' = \left(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{\mathrm{d}}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{41}$$

$$\dot{\varepsilon}'' = \left(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{42}$$

$$\dot{\gamma}^{(ij)} = \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{43}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}} = \mathbf{I}_{\mathrm{d}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{44}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} = \mathbf{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{45}$$

これらの式に，式を代入すると，

$$\dot{p} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}\left(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{\mathrm{d}}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{46}$$

$$\dot{q}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'}\left(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{\mathrm{d}}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''}\left(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{47}$$

以上より，

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} = {} & K_{\mathrm{L/U}}\left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}\right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \otimes \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \\
& - K_{\mathrm{L/U}}\left(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{d}}\right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \left(H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} + L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\right) \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \otimes \mathbf{I}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \\
& - \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \left(H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{d}}\right) \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \\
& + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \left(L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} \left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right) \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}
\end{aligned} \tag{49}$$

ここに，

$$K_{\mathrm{L/U}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'} \tag{50}$$

$$G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \gamma^{(ij)}} \tag{51}$$

$$H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon'} \tag{52}$$

$$L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} \tag{53}$$

その他，大変形解析における応力ひずみ関連の基礎事項を付録にまとめておいた。

4. 大変形解析における物質表示に対する構成式（積分形）

4.1 大変形解析への展開における方向性

多重せん断モデルの基礎概念に，粒状体を構成する粒子構造を特徴づける branch vector や tangential vector などのベクトル類がある。大変形解析では，これらのベクトル類は，物質の変形に則して，その方向とともに大きさを変えるものと考える。

大まかな方向性としては，空間表示に対する積分形の構成式を，Cauchy 有効応力を用いて，以下のとおり与えたい。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} q^{(ij)}\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{54}$$

これを物質表示に pull back すると，Second Piola Kirchhoff の有効応力 $\mathbf{S}'$ を用いて以下のとおり書ける。

$$\begin{aligned}\mathbf{S}' &= \mathbf{F}^{-1} J \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \\ &= -Jp\mathbf{C}^{-1} \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} Jq^{(ij)}\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}\end{aligned} \tag{55}$$

ここに，

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = 2\mathbf{E} + \mathbf{I} \tag{56}$$

ここに，空間表示の branch vector に沿った方向ベクトル類は，物質表示の方向ベクトル類から以下により与えられる。

$$\mathbf{t}^{(ij)} = \mathbf{F}\mathbf{T}^{(ij)} \tag{57}$$

$$\mathbf{n}^{(ij)} = \mathbf{F}\mathbf{N}^{(ij)} \tag{58}$$

ただし，これら物質表示の方向ベクトル類は，いずれも単位ベクトルで，時間に応じて変化しないものとする。

4.2 超弾性体における体積成分と偏差成分への分離

以上のような方向性で定式化したいのだが，実は，この定式化では，式(55)の右辺第２項の $\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} Jq^{(ij)}\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}$ が，物質表示における体積成分を含んでしまっており，（定式化としての理論上の問題はないが），構成式の使い勝手の点で具合が悪い。

この点を解決するため，圧縮性を有する超弾性体（hyper-elastic materials）の有限ひずみ解析の構成式に，等方成分（体積変化成分）および偏差成分（体積一定成分）に分けて定式化するものがある (Holzapfel, 2000)ので，これを参考として構成式を導くことを考える。この物質表示の定式化では，second Piola-Kirchhoff stress tensor $\mathbf{S}$ が以下のように分割される。

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_q \tag{59}$$

ここに，

$$\mathbf{S}_p = -Jp\mathbf{C}^{-1} \tag{60}$$

$$\mathbf{S}_q = J^{-2/3}\mathbb{Q} : \overline{\mathbf{S}} \tag{61}$$

式(61)において，４階テンソル $\mathbb{Q}$ は，２階テンソルの物質表示における偏差成分を抽出する projection tensor であり，$\mathbb{N}$ を 4 階の identity tensor として，以下で与えられる。

$$\mathbb{Q} = \mathbb{N} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \tag{62}$$

実際にこれが物質表示における偏差成分を抽出する projection tensor となっていることは，以下により確認できる。まず，式(59)の両辺と $\mathbf{C}$ との contraction をとると

$$\mathbf{S} : \mathbf{C} = \mathbf{S}_p : \mathbf{C} + \mathbf{S}_q : \mathbf{C} \tag{63}$$

式(60)(61)より，

$$\mathbf{S}_p : \mathbf{C} = -Jp\mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} = -3Jp \tag{64}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_q : \mathbf{C} &= \left(J^{-2/3}\mathbb{Q} : \overline{\mathbf{S}}\right) : \mathbf{C} \\ &= J^{-2/3}\left(\overline{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}\left(\mathbf{C} : \overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right) : \mathbf{C} = 0\end{aligned} \tag{65}$$

となって，上に述べたことが確認できた。

4.3 物質表示での積分型構成式

この結果を用いて，物質表示における構成式を，式(55)に代えて，以下で与える。

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'_p + \mathbf{S}'_q = -Jp\mathbf{C}^{-1} + J^{-2/3}\mathbb{Q} : \overline{\mathbf{S}} \tag{66}$$

ここに，

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} Jq^{(ij)}\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{67}$$

微小変形解析では，$\overline{\mathbf{S}}$ は偏差成分のみで構成されて

いるが，大変形解析における物質表示においては，以下の分（興味深いことにせん断仕事の形をしている）だけ，等方的な成分を含んでいることが分かる。

$$\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}2Jq^{(ij)}\gamma^{(ij)}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{68}$$

この成分を取り除いて，偏差成分のみとするのが，4階テンソル $\mathbb{Q}$ の役割である。

式(66)右辺の第１項の等方応力は，微小変形解析と同様，有効体積ひずみ ε' の関数とする。すなわち，

$$p=p(\varepsilon') \tag{69}$$

ここに，

$$\varepsilon'=\varepsilon-\varepsilon_{\mathrm{d}} \tag{70}$$

$$\varepsilon=\ln J \tag{71}$$

ここに，Jacobian determinant は，変形勾配より，以下で与えられる。

$$J=\det\mathbf{F} \tag{72}$$

Jacobian determinant の初期値を $J_0=1$ とする。

同様に，同式右辺の第２項の単純せん断機構によるせん断応力寄与分 $q^{(ij)}$ は，以下のとおりの関数で与える。

$$q^{(ij)}=q^{(ij)}(\gamma^{(ij)},\ \varepsilon',\ \varepsilon'') \tag{73}$$

ここに，仮想せん断ひずみは，物質表示での応力・ひずみ成分の方向ベクトル類に投影したせん断ひずみ方向成分として，以下で与える。

$$\gamma^{(ij)}=\left\langle\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle:\mathbf{E} \tag{74}$$

また，仮想有効体積ひずみは，以下で与える。

$$\varepsilon''=\varepsilon-\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} \tag{75}$$

5.　大変形解析における物質表示での増分形構成式

FLIP での改良型反復法で用いる増分形に対応する物質表示の増分形を導く。まず，式(66)の両辺の物質時間微分をとって，

$$\dot{\mathbf{S}}'=\dot{\mathbf{S}}'_p+\dot{\mathbf{S}}'_q \tag{76}$$

ここに，

$$\dot{\mathbf{S}}'_p=-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(Jp\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{77}$$

$$\dot{\mathbf{S}}'_q=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(J^{-2/3}\right)\left(\mathbb{Q}:\overline{\mathbf{S}}\right)+J^{-2/3}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbb{Q}:\overline{\mathbf{S}}\right) \tag{78}$$

また，Green Lagrange ひずみの時間微分は，

$$\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{sym}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathrm{Grad}\dot{\mathbf{u}}\right) \tag{79}$$

5.1　体積成分の計算

まず，式(77)の物質時間微分を計算すると，

$$-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(Jp\mathbf{C}^{-1}\right)=-\dot{J}p\mathbf{C}^{-1}-J\dot{p}\mathbf{C}^{-1}-Jp\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\dot{J}&=J\mathrm{tr}\mathbf{d}=J\mathbf{I}:\mathbf{grad}\dot{\mathbf{u}}\\&=J\mathbf{I}:\mathbf{Grad}\dot{\mathbf{u}}\mathbf{F}^{-1}=J\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}\end{aligned} \tag{81}$$

$$\dot{p}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}\dot{\varepsilon}' \tag{82}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbf{C}^{-1}\right)=-\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^{-1}=-2\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{C}^{-1} \tag{83}$$

ダイレイタンシ類は，以下のとおり Green Lagrange ひずみ速度の線形関係で与えられるものとする。

$$\dot{\varepsilon}=\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \tag{84}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}=\mathbf{C}_{\mathrm{dd}}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \tag{85}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}=\mathbf{C}_{\mathrm{dc}}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \tag{86}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}=\mathbf{C}_{\mathrm{d}}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \tag{87}$$

$$\dot{\gamma}^{(ij)}=\left\langle\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle:\dot{\mathbf{E}} \tag{88}$$

$$\mathbf{C}_{\mathrm{d}}^{-1}=\mathbf{C}_{\mathrm{dd}}^{-1}+\mathbf{C}_{\mathrm{dc}}^{-1} \tag{89}$$

よって，式(70)(75)より，有効体積ひずみ，仮想有効体積ひずみ速度は，以下で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}'=\left(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{C}_{\mathrm{d}}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}} \tag{90}$$

$$\dot{\varepsilon}''=\left(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{C}_{\mathrm{dc}}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}} \tag{91}$$

これらを式(80)に代入すると，体積成分の時間微分は，以下のとおり計算される。

$$-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(Jp\mathbf{C}^{-1}\right)$$
$$=-\left(J\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}\right)p\mathbf{C}^{-1}$$
$$-J\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'}\left(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}}\right)\mathbf{C}^{-1}$$
$$+2Jp\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{C}^{-1}$$
$$=J\left(K_{\mathrm{L/U}}-p\right)\mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}\right) \tag{92}$$
$$-JK_{\mathrm{L/U}}\mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}\right)$$
$$+2Jp\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}$$
$$=\left[J\left(K_{\mathrm{L/U}}-p\right)\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right.$$
$$\left.+2Jp\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}-JK_{\mathrm{L/U}}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1}\right]:\dot{\mathbf{E}}$$

ここに,

$$K_{\mathrm{L/U}}=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'} \tag{93}$$

これをまとめて，以下のとおり書く。

$$\dot{\mathbf{S}}'_{p}=\mathbb{C}_{p}:\dot{\mathbf{E}} \tag{94}$$

ここに,

$$\mathbb{C}_{p}=J\left(K_{\mathrm{L/U}}-p\right)\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}$$
$$+2Jp\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}-JK_{\mathrm{L/U}}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1} \tag{95}$$

5.2 偏差成分の計算

(1) 式(78)の第 1 項

偏差成分については，まず，式(81)より

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(J^{-2/3}\right)=-\frac{2}{3}J^{-5/3}\dot{J}=-\frac{2}{3}J^{-2/3}\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \tag{96}$$

よって，式(78)第 1 項は,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(J^{-2/3}\right)\left(\mathbb{Q}:\overline{\mathbf{S}}\right)$$
$$=-\frac{2}{3}J^{-2/3}\left(\mathbb{Q}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \tag{97}$$
$$=-\frac{2}{3}\mathbf{S}'_{q}\otimes\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}$$

(2) 式(78)第 2 項

次に, 式(78)の第 2 項の偏差成分の物質時間微分を計算するにあたり，以下のように書き下しておく。

$$J^{-2/3}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbb{Q}:\overline{\mathbf{S}}\right)$$
$$=J^{-2/3}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\overline{\mathbf{S}}-\frac{1}{3}\left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{98}$$
$$=J^{-2/3}\left(\dot{\overline{\mathbf{S}}}-\frac{1}{3}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right]\right)$$

(3) $\dot{\overline{\mathbf{S}}}$ の計算

まず， $\left\langle\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle$ は時間に依存しないので,

$$\dot{\overline{\mathbf{S}}}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(Jq^{(ij)}\right)\left\langle\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{99}$$

よって，以下の時間微分を計算すればよい。

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(Jq^{(ij)}\right)=\dot{J}q^{(ij)}+J\dot{q}^{(ij)} \tag{100}$$

$$\dot{q}^{(ij)}=\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial\gamma^{(ij)}}\dot{\gamma}^{(ij)}+\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial\varepsilon'}\dot{\varepsilon}'+\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial\varepsilon''}\dot{\varepsilon}'' \tag{101}$$

式(88)～(91)を式(101)に代入すると,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(Jq^{(ij)}\right)=\dot{J}q^{(ij)}+J\dot{q}^{(ij)}$$
$$=Jq^{(ij)}\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}+J\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial\gamma^{(ij)}}\left\langle\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle:\dot{\mathbf{E}}$$
$$+J\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial\varepsilon'}\left(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}}$$
$$+J\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial\varepsilon''}\left(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{C}_{\mathbf{dc}}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}} \tag{102}$$
$$=Jq^{(ij)}\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}+JG_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left\langle\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle:\dot{\mathbf{E}}$$
$$+JH_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}}$$
$$+JL_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left(\mathbf{C}^{-1}-\mathbf{C}_{\mathbf{dc}}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}}$$

ここに,

$$G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}=\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial\gamma^{(ij)}} \tag{103}$$

$$H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}=\frac{\partial q^{(ij)}}{\partial\varepsilon'} \tag{104}$$

$$L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)} = \frac{\partial q^{(ij)}}{\partial \varepsilon''} \quad (105)$$

これをまとめて，以下のとおり書く。

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(Jq^{(ij)}\right) = J\mathbf{C}_q^{(ij)-1} : \dot{\mathbf{E}} \quad (106)$$

ここに，

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_q^{(ij)-1} &= q^{(ij)}\mathbf{C}^{-1} + G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \\ &+ H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1}\right) + L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{\mathbf{dc}}^{-1}\right)\end{aligned} \quad (107)$$

これを式(99)に代入して，

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{S}}} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\left(J\mathbf{C}_q^{(ij)-1} : \dot{\mathbf{E}}\right)\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \\ &= \left(\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} J\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \otimes \mathbf{C}_q^{(ij)-1}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}\right) : \dot{\mathbf{E}}\end{aligned}$$

(108)

これをさらにまとめて，以下のように書く。

$$\dot{\bar{\mathbf{S}}} = \bar{\mathbb{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (109)$$

$$\bar{\mathbb{C}}_q = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} J\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \otimes \mathbf{C}_q^{(ij)-1}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}$$

(110)

(4) $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right]$ の計算

次に，上を計算する。

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right] \\ &= \left(\dot{\mathbf{C}}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1} + \left(\mathbf{C}:\dot{\bar{\mathbf{S}}}\right)\mathbf{C}^{-1} + \left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbf{C}^{-1}\right)\end{aligned}$$

(111)

右辺第１項：

$$\begin{aligned}&\left(\dot{\mathbf{C}}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1} = \left(2\dot{\mathbf{E}}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1} = 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{E}} \\ &= 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right) : \dot{\mathbf{E}} + 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right) : \dot{\mathbf{E}} \\ &= 2\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right) : \dot{\mathbf{E}} + \frac{2}{3}\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right) : \dot{\mathbf{E}}\end{aligned}$$

(112)

第２項：式(109)を代入して，

$$\left(\mathbf{C}:\dot{\bar{\mathbf{S}}}\right)\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \dot{\bar{\mathbf{S}}} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbb{C}}_q : \dot{\mathbf{E}}$$

(113)

第３項：式(83)より，

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbf{C}^{-1}\right) = -2\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{C}^{-1} \\ &= -2\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}\right) : \dot{\mathbf{E}}\end{aligned} \quad (114)$$

以上の結果をまとめると，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right] = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbb{C}}_q : \dot{\mathbf{E}} \\ &-2\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right) : \dot{\mathbf{E}} \\ &+2\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right) : \dot{\mathbf{E}}\end{aligned}$$

(115)

(5)偏差成分のまとめ

以上の(2)から(4)の結果をまとめると，

$$\begin{aligned}&J^{-2/3}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right) \\ &= J^{-2/3}\left(\dot{\bar{\mathbf{S}}} - \frac{1}{3}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right]\right) : \mathbf{E} \\ &= J^{-2/3}\left[\mathbb{Q}:\bar{\mathbb{C}}_q\right. \\ &\left.+\frac{2}{3}\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right)\right] : \mathbf{E} \\ &-\frac{2}{3}\left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}'_q\right) : \mathbf{E}\end{aligned} \quad (116)$$

これと，(1)の結果を式(78)に代入すると，以下が得られる。

$$\dot{\mathbf{S}}'_q = \mathbb{C}_q : \dot{\mathbf{E}} \quad (117)$$

ここに，

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_q &= J^{-2/3}\left[\mathbb{Q}:\bar{\mathbb{C}}_q + \frac{2}{3}\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\tilde{\mathbb{Q}}\right] \\ &-\frac{2}{3}\left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}'_q + \mathbf{S}'_q \otimes \mathbf{C}^{-1}\right)\end{aligned} \quad (118)$$

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \tag{119}$$

5.3 物質表示での増分形の構成式

以上をまとめると，物質表示での増分形の構成式が以下のとおり与えられる。

$$\dot{\mathbf{S}}' = \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} \tag{120}$$

ここに，

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_p + \mathbb{C}_q \tag{121}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_p &= J\left(K_{\mathrm{L/U}} - p\right)\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \\ &+2Jp\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \\ &-JK_{\mathrm{L/U}}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1} \end{aligned} \tag{122}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_q &= J^{-2/3}\left[\mathbb{Q} : \bar{\mathbb{C}}_q + \frac{2}{3}\left(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}\right)\tilde{\mathbb{Q}}\right] \\ &-\frac{2}{3}\left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}'_q + \mathbf{S}'_q \otimes \mathbf{C}^{-1}\right) \end{aligned} \tag{123}$$

$$\bar{\mathbb{C}}_q = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} J\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \otimes \mathbf{C}_q^{(ij)-1} \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{124}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_q^{(ij)-1} &= q^{(ij)}\mathbf{C}^{-1} + G_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \\ &+H_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1}\right) + L_{\mathrm{L/U}}^{(ij)}\left(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{\mathbf{dc}}^{-1}\right) \end{aligned} \tag{125}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{N} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \tag{126}$$

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \tag{127}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} Jq^{(ij)}\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{128}$$

$$\mathbf{S}_q = J^{-2/3}\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}} \tag{129}$$

なお，上のいくつかの項については，計算のため，以下のように，さらに具体的に書いておくとよいであろう。

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} : \bar{\mathbb{C}}_q &= \bar{\mathbb{C}}_q - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} 2J\gamma^{(ij)}\mathbf{C}_q^{(ij)-1}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} J\left(\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle - \frac{2}{3}\gamma^{(ij)}\mathbf{C}^{-1}\right) \otimes \mathbf{C}_q^{(ij)-1}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \end{aligned} \tag{130}$$

$$\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} 2Jq^{(ij)}\gamma^{(ij)}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{131}$$

$$\mathbf{S}_q = J^{-2/3}\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} Jq^{(ij)}\left(\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle - \frac{2}{3}\gamma^{(ij)}\mathbf{C}^{-1}\right)\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{132}$$

以上のとおり，大変形解析で等方成分と偏差成分を分離するタイプの接線剛性テンソルは，微小変形解析での従来法などの形式と比較するとかなり複雑にはなるが，結局のところ，微小変形解析の場合の接線剛性テンソルの一部に応力の項が出現する点，およびテンソルを構成する方向ベクトル類の変化に関して必要となるテンソルの変換および Jacobian determinant の付加が必要となる点を除けば，微小変形解析の場合と同じとなる。

なお，増分形構成式の主な項についてテンソル成分表示すれば，以下のとおり。

$$\left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right)_{ABCD} = C_{AB}^{-1}C_{CD}^{-1} \tag{133}$$

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}\right)_{ABCD} \\ &= \frac{1}{2}\left(C_{AC}^{-1}C_{BD}^{-1} + C_{AD}^{-1}C_{BC}^{-1}\right) \\ &= \frac{\partial C_{AB}^{-1}}{\partial C_{CD}} \end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned} &\left(\left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle \otimes \left\langle \mathbf{T}^{(ij)} \otimes \mathbf{N}^{(ij)} \right\rangle\right)_{ABCD} \\ &= \left(T_A^{(ij)}N_B^{(ij)} + T_B^{(ij)}N_A^{(ij)}\right)\left(T_C^{(ij)}N_D^{(ij)} + T_D^{(ij)}N_C^{(ij)}\right) \end{aligned} \tag{135}$$

6. 大変形解析における空間表示での構成式（積分形）

空間表示に対する積分形の構成式は，式(66)(67)で与えた物質表示に対する積分形の構成式を push forward することにより Cauchy 有効応力を用いて，以下のとおりに与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}'\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{136}$$

その等方成分は，

$$\boldsymbol{\sigma}'_p = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}'_p\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = -J^{-1}\mathbf{F}\left(Jp\mathbf{C}^{-1}\right)\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = -p\mathbf{I} \tag{137}$$

偏差成分は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}'_q &= J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}'_q\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = J^{-1}\mathbf{F}\left(J^{-2/3}\mathbb{Q}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\\ &= J^{-2/3}\mathbf{F}\left(J^{-1}\overline{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}J^{-1}\left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right)\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \\ &= J^{-2/3}\left(J^{-1}\mathbf{F}\overline{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}J^{-1}\left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{I}\right)\end{aligned} \tag{138}$$

ここで，実際に，式(138)で表される項が，空間表示における偏差成分となっているか否かを確認しておくため，$\mathbf{I}$ との contraction をとってみる。

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'_q &= \mathbf{I}:\boldsymbol{\sigma}'_q\\ &= \mathbf{I}:J^{-2/3}\left(J^{-1}\mathbf{F}\overline{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{3}J^{-1}\left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{I}\right)\end{aligned} \tag{139}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\mathbf{I}:\mathbf{F}\overline{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} &= \mathbf{F}:\mathbf{F}\overline{\mathbf{S}} = \mathbf{F}\overline{\mathbf{S}}:\mathbf{F}\\ &= \overline{\mathbf{S}}:\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \overline{\mathbf{S}}:\mathbf{C} = \mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\end{aligned} \tag{140}$$

$$\frac{1}{3}\mathbf{I}:\left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{I} = \left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right) \tag{141}$$

よって，以下のとおり，空間表示における偏差成分であることが確認された。

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I}:\boldsymbol{\sigma}'_q = 0 \tag{142}$$

式(138)の第 1 項は，式(67)より，

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\sigma}} &= J^{-1}\mathbf{F}\overline{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} q^{(ij)}\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle \Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}\end{aligned} \tag{143}$$

ここに，空間表示での方向ベクトルは，物質表示の方向ベクトルから，変形勾配に沿って方向と大きさを変える形で，式(57)(58)で与えられる。これを式(139)に代入して，式(142)を用いると，

$$\mathbf{I}:\boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I}:J^{-2/3}\left(\overline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3}J^{-1}\left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right)\mathbf{I}\right) = 0 \tag{144}$$

よって，

$$\mathbf{I}:\overline{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1}\left(\mathbf{C}:\overline{\mathbf{S}}\right) \tag{145}$$

これを，再び式(138)に代入すれば，

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-2/3}\left(\mathbb{N} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right):\overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{146}$$

これを，物質表示での偏差成分抽出のための 4 階テンソルに準じて，さらに，以下のとおり書くことができる。

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-2/3}\mathbb{Z}:\overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{147}$$

ここに，

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} \tag{148}$$

よって，空間表示における積分形の構成式は，以下のとおり与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'_p + \boldsymbol{\sigma}'_q = -p\mathbf{I} + J^{-2/3}\mathbb{Z}:\overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{149}$$

なお，空間表示での応力・ひずみ成分の方向ベクトル類に Euler Almansi ひずみ $\mathbf{e}$ を投影して得られるせん断ひずみ方向成分

$$\gamma^{(ij)} = \left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle:\mathbf{e} \tag{150}$$

と，物質表示での方向ベクトル類に Green Langrange ひずみを投影して得られるせん断ひずみを比較すると，以下のとおり，両者は同じものであることが分かる。

$$\begin{aligned}\gamma^{(ij)} &= \left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle:\mathbf{e}\\ &= \left\langle \mathbf{F}\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{F}\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle:\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}\\ &= \mathbf{F}\left\langle \mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle\mathbf{F}^{\mathrm{T}}:\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}\\ &= \left\langle \mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle:\mathbf{E}\end{aligned} \tag{151}$$

7. 大変形解析における空間表示での増分形構成式

空間表示での増分形構成式は，Holzapfel(2000)により，Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{\tau}' = J\boldsymbol{\sigma}'$ の Lie 時間微分として与えられる Oldroyd stress rate $\mathrm{Oldr}\left(J\boldsymbol{\sigma}'\right)$，および，deformation rate $\mathbf{d} = \mathbf{sym}(\mathrm{grad}\dot{\mathbf{u}})$（既往の文献の中には，これを stretch と呼んでいるものもある）を用いて，以下のとおり与えられる。

$$\mathrm{Oldr}\left(J\boldsymbol{\sigma}'\right) = J\mathbb{C}:\mathbf{d} \tag{152}$$

ここに，

$$c_{abcd} = J^{-1}F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}C_{ABCD} \tag{153}$$

主な 4 階テンソルの変換は，以下のとおりとなる。そのほかの項もこれに準じて変換する。

$$
\begin{aligned}
&J^{-1}F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)_{ABCD}\\
&=J^{-1}F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}C^{-1}_{AB}C^{-1}_{CD}\\
&=J^{-1}\left(F_{aA}C^{-1}_{AB}F_{bB}\right)\left(F_{cC}C^{-1}_{CD}F_{dD}\right)\\
&=J^{-1}\delta_{ab}\delta_{cd}\\
&=J^{-1}\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right)_{abcd}
\end{aligned}
\tag{154}
$$

$$
\begin{aligned}
&J^{-1}F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}\left(\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}\right)_{ABCD}\\
&=\frac{J^{-1}}{2}\left(F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}C^{-1}_{AC}C^{-1}_{BD}+F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}C^{-1}_{AD}C^{-1}_{BC}\right)\\
&=\frac{J^{-1}}{2}\Big[\left(F_{aA}C^{-1}_{AC}F_{cC}\right)\left(F_{bB}C^{-1}_{BD}F_{dD}\right)\\
&+\left(F_{aA}C^{-1}_{AD}F_{dD}\right)\left(F_{bB}C^{-1}_{BC}F_{cC}\right)\Big]\\
&=\frac{J^{-1}}{2}\left(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}\right)\\
&=\frac{J^{-1}}{2}\left(\mathbb{N}+\overline{\mathbb{N}}\right)_{abcd}
\end{aligned}
\tag{155}
$$

$$
\begin{aligned}
&J^{-1}F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}\left(\left\langle\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle\otimes\left(\left\langle\mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle\right)\right)_{ABCD}\\
&=J^{-1}F_{aA}\left(T^{(ij)}_{A}N^{(ij)}_{B}+T^{(ij)}_{B}N^{(ij)}_{A}\right)F_{bB}\\
&F_{cC}\left(T^{(ij)}_{C}N^{(ij)}_{D}+T^{(ij)}_{D}N^{(ij)}_{C}\right)F_{dD}\\
&=J^{-1}\left(t^{(ij)}_{a}n^{(ij)}_{b}+t^{(ij)}_{b}n^{(ij)}_{a}\right)\left(t^{(ij)}_{c}n^{(ij)}_{d}+t^{(ij)}_{d}n^{(ij)}_{c}\right)\\
&=J^{-1}\left(\left\langle\mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\otimes\left\langle\mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\right)_{abcd}
\end{aligned}
\tag{156}
$$

また, deformation rate の対称性を利用すると, 式(155)の項は $J^{-1}\left(\mathbb{N}+\overline{\mathbb{N}}\right)/2=J^{-1}\mathbb{N}$ としてよくなる。以上の準備のもとに，式(120)～(129)を push forward することにより，空間表示に対する増分形の構成式の接線勾配が以下のとおり与えられる。

$$\mathbb{C}=\mathbb{C}_p+\mathbb{C}_q \tag{157}$$

$$\mathbb{C}_p=\left(K_{\mathrm{L/U}}-p\right)\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+2p\mathbb{N}-K_{\mathrm{L/U}}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{d}} \tag{158}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}_q=J^{-2/3}\left[\mathbb{Z}\!:\overline{\mathbb{C}}_q+\frac{2}{3}\mathrm{tr}\overline{\boldsymbol{\sigma}}\mathbb{Z}\right]\\
&-\frac{2}{3}\left(\mathbf{I}\otimes\boldsymbol{\sigma}'_q+\boldsymbol{\sigma}'_q\otimes\mathbf{I}\right)
\end{aligned}
\tag{159}
$$

$$\overline{\mathbb{C}}_q=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\left\langle\mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\otimes\mathbf{I}^{(ij)}_q\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{160}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I}^{(ij)}_q=q^{(ij)}\mathbf{I}+G^{(ij)}_{\mathrm{L/U}}\left\langle\mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\\
&+H^{(ij)}_{\mathrm{L/U}}\left(\mathbf{I}-\mathbf{I}_{\mathrm{d}}\right)+L^{(ij)}_{\mathrm{L/U}}\left(\mathbf{I}-\mathbf{I}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{d}}\right)
\end{aligned}
\tag{161}
$$

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} \tag{162}$$

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}q^{(ij)}\left\langle\mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{163}$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_q=J^{-2/3}\mathbb{Z}:\overline{\boldsymbol{\sigma}} \tag{164}$$

ここに，

$$\mathbf{I}_{\mathrm{d}}=\mathbf{F}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{d}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{165}$$

$$\mathbf{I}^{\mathrm{c}}_{\mathrm{d}}=\mathbf{F}\mathbf{C}^{-1}_{\mathbf{dc}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{166}$$

なお，上のいくつかの項については，計算のため，以下のように，さらに具体的に書いておくとよいであろう。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Z}\!:\overline{\mathbb{C}}_q=\overline{\mathbb{C}}_q-\frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\left(\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}2\gamma^{(ij)}\mathbf{I}^{(ij)}_q\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}\right)\\
&=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\left(\left\langle\mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle-\frac{2}{3}\gamma^{(ij)}\mathbf{I}\right)\otimes\mathbf{I}^{(ij)}_q\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}
\end{aligned}
\tag{167}
$$

$$\mathrm{tr}\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{I}:\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}2q^{(ij)}\gamma^{(ij)}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{168}$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}'_q=J^{-2/3}\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\\
&q^{(ij)}\left(\left\langle\mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle-\frac{2}{3}\gamma^{(ij)}\mathbf{I}\right)\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)}
\end{aligned}
\tag{169}
$$

8. 空間表示でのダイレタンシの定式化（カクテルグラスモデル）

多重せん断モデルにおけるせん断応力成分は，双曲線型の骨格曲線を基本とする履歴型とする。

$$q^{(ij)} = \frac{\dfrac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}}{1+\left|\dfrac{\gamma^{(ij)}}{\gamma_{\mathrm{v}}}\right|} q_{\mathrm{v}} \tag{170}$$

空間表示での有効応力は，以下のとおり等方成分および偏差成分に分けられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_q{}' \tag{171}$$

ここに，

$$p = -\frac{1}{3}\mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}' \tag{172}$$

また，ひずみ rate については，Euler Almansi ひずみの Lie 時間微分として与えられる deformation rate を用いて，これを以下のとおり等方成分および偏差成分に分ける。

$$\mathbf{d} = \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{d} + \bar{\mathbf{d}} \tag{173}$$

これを微小変形解析にならって，以下のように表記しておく。

$$\mathbf{d} = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}\mathbf{I} + \bar{\mathbf{d}} \tag{174}$$

ここに，体積ひずみ速度は，

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{I} : \mathbf{d} \tag{175}$$

体積ひずみ速度と Jacobian determinant とは，以下の関係がある。

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{J}}{J} \tag{176}$$

ここに，Jacobian determinant は，変形勾配より，以下で与えられる。

$$J = \det \mathbf{F} \tag{177}$$

Jacobian determinant の初期値を $J_0 = 1$ として，これを積分すると，体積ひずみが以下のとおり与えられる。

$$\varepsilon = \ln J \tag{178}$$

式(175)の体積ひずみ速度成分を以下のとおり，三成分に分解する。

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}' + \dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} + \dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \tag{179}$$

ここに，

ε'：等方的圧力の変化による成分（有効体積ひずみ），

$\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}$：収縮的ダイラタンシー成分，

$\varepsilon_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}$：膨張的ダイラタンシー成分。

また，ダイラタンシ成分をまとめたものを，以下のとおり書いておく。

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}} = \dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} + \dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \tag{180}$$

式(179)を式(174)に代入すれば，ひずみは以下のとおりの成分に分解できる。

$$\mathbf{d} = \frac{1}{3}\left(\dot{\varepsilon}' + \dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} + \dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}\right)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{d}} \tag{181}$$

ダイラタンシの膨張的成分と偏差成分で構成されるひずみは，骨格曲線に沿う載荷時には仕事をしない成分であると仮定する。すなわち，

$$\boldsymbol{\sigma}' : \left(\frac{1}{3}\left(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}\right)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{d}}\right) = 0 \tag{182}$$

これより，膨張的ダイラタンシー成分を，以下により求める。

$$\begin{aligned}
&\left(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}'_q\right) : \left(\frac{1}{3}\left(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}\right)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{d}}\right) \\
&= -p\mathbf{I} : \frac{1}{3}\left(\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}\right)\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}'_q : \bar{\mathbf{d}} \\
&= -p\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} + \boldsymbol{\sigma}'_q : \bar{\mathbf{d}} = 0
\end{aligned} \tag{183}$$

よって，

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'_q : \bar{\mathbf{d}}}{p} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'_q : \mathbf{d}}{p} \tag{184}$$

式(169)を代入すると，

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = \left[J^{-2/3} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} \frac{q^{(ij)}}{p} \left(\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle - \frac{2}{3}\gamma^{(ij)}\mathbf{I} \right) \right] : \mathbf{d}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{185}$$

これに骨格曲線の双曲線関係（式(170)）を代入して，

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = \left[J^{-2/3} \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\gamma^{(ij)}/\gamma_{\mathrm{v}}}{1+\left|\gamma^{(ij)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|} \right) m_{1\mathrm{v}} \left(\left\langle \mathbf{t}^{(ij)} \otimes \mathbf{n}^{(ij)} \right\rangle - \frac{2}{3}\gamma^{(ij)}\mathbf{I} \right) \right] : \mathbf{d}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{186}$$

$$m_{1\mathrm{v}}=\frac{q_\mathrm{v}}{p} \tag{187}$$

よって，膨張的ダイレイタンシ速度は，以下のとおり与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_\mathrm{d}^\mathrm{d}=\mathbf{I}_\mathrm{d}^\mathrm{d}:\mathbf{d} \tag{188}$$

ここに，

$$\mathbf{I}_\mathrm{d}^\mathrm{d}=J^{-2/3}\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\gamma^{(ij)}/\gamma_\mathrm{v}}{1+\left|\gamma^{(ij)}/\gamma_\mathrm{v}\right|}\right)m_{1\mathrm{v}}$$
$$\left(\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle-\frac{2}{3}\gamma^{(ij)}\mathbf{I}\right)\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{189}$$

以上を膨張的ダイレイタンシの定式化の基本形とし，後にパラメタを導入し，さらにγ_vの仮想有効体積ひずみ依存性を考慮した項を付加した実用形を与え直す（微小変形解析のカクテルグラスモデルの定式化（井合他，2008）を参照のこと）。

他方，収縮的成分は，従来の FLIP での定式化に代えて，以下のように与える。

$$\dot{\varepsilon}_\mathrm{d}^\mathrm{c}=-\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\mathrm{M}_\mathrm{v}\left|\dot{\gamma}_\mathrm{p}^{(ij)}\right|\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{190}$$

ここに，従来での FLIP パラメタ c_1 に類似のパラメタ c_1 を導入して，

$$\dot{\gamma}_\mathrm{p}^{(ij)}=\dot{\gamma}^{(ij)}-c_1\dot{\gamma}_\mathrm{e}^{(ij)} \tag{191}$$

なお，$\dot{\gamma}^{(ij)}\le c_1\dot{\gamma}_\mathrm{e}^{(ij)}$ の場合には，$\dot{\gamma}_\mathrm{p}^{(ij)}=0$ とする。ここに，仮想単純せん断ひずみ，仮想弾性せん断ひずみは，以下で与える。

$$\dot{\gamma}^{(ij)}=\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle:\mathbf{d}$$
$$=\left\langle \mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle:\dot{\mathbf{E}} \tag{192}$$

$$\dot{\gamma}_\mathrm{e}^{(ij)}=\left\langle \mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle:\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{\sigma}}'/G_\mathrm{m0} \tag{193}$$

仮想弾性せん断ひずみ増分は，別資料のとおり，仮想接線せん断剛性 $G_\mathrm{L/U}^{(ij)}$ を用いて，以下のとおり書ける。

$$\dot{\gamma}_\mathrm{e}^{(ij)}=\left(\frac{G_\mathrm{L/U}^{(ij)}}{G_\mathrm{m0}}\right)\dot{\gamma}^{(ij)} \tag{194}$$

ゆえに，式(191)は以下のとおりとなる。

$$\dot{\gamma}_\mathrm{p}^{(ij)}=\left(1-c_1\left(\frac{G_\mathrm{L/U}^{(ij)}}{G_\mathrm{m0}}\right)\right)\dot{\gamma}^{(ij)} \tag{195}$$

なお，$1<c_1\left(\frac{G_\mathrm{L/U}^{(ij)}}{G_\mathrm{m0}}\right)$ の場合には，$\dot{\gamma}_\mathrm{p}^{(ij)}=0$ とする。

式(190)(192)より，収縮的ダイレイタンシ成分も，膨張的ダイレイタンシ成分と同様に，以下の形式に書くことができる。

$$\dot{\varepsilon}_\mathrm{d}^\mathrm{c}=\mathbf{I}_\mathrm{d}^\mathrm{c}:\mathbf{d} \tag{196}$$

ここに，

$$\mathbf{I}_\mathrm{d}^\mathrm{c}=-\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\mathrm{M}_\mathrm{v}\left|\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\right|^{*}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{197}$$

ただし，

$\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle:\mathbf{d}\ge 0$ の時，

$$\left|\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\right|^{*}=\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle \tag{198}$$

$\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle:\mathbf{d}<0$ の時，

$$\left|\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\right|^{*}=-\left\langle \mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle \tag{199}$$

9. 物質表示でのダイレタンシの定式化（カクテルグラスモデル）

空間表示におけるダイレタンシ式を pull back して，物質表示でのダイレタンシ式を求めると，以下のとおりとなる。

$$\dot{\varepsilon}_\mathrm{d}^\mathrm{d}=\mathbf{C}_\mathrm{dd}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \tag{200}$$

$$\dot{\varepsilon}_\mathrm{d}^\mathrm{c}=\mathbf{C}_\mathrm{dc}^{-1}:\dot{\mathbf{E}} \tag{201}$$

ここに，

$$\mathbf{C}_\mathrm{dd}^{-1}=\mathbf{F}^{-1}\mathbf{I}_\mathrm{d}^\mathrm{d}\mathbf{F}^\mathrm{-T}$$
$$=J^{-2/3}\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\gamma^{(ij)}/\gamma_\mathrm{v}}{1+\left|\gamma^{(ij)}/\gamma_\mathrm{v}\right|}\right)m_{1\mathrm{v}}$$
$$\left(\left\langle \mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle-\frac{2}{3}\gamma^{(ij)}\mathbf{C}^{-1}\right)\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{202}$$

$$\mathbf{C}_\mathrm{dc}^{-1}=\mathbf{F}^{-1}\mathbf{I}_\mathrm{d}^\mathrm{c}\mathbf{F}^\mathrm{-T}$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\mathrm{M}_\mathrm{v}\left|\left\langle \mathbf{T}^{(ij)}\otimes\mathbf{N}^{(ij)}\right\rangle\right|^{*}\Delta\omega\Delta\Omega^{(j)} \tag{203}$$

10. ２次元解析での積分形構成式（物質表示）

２次元解析の場合は，３次元解析の場合に準じて，以下のとおり定式化することができる。なお，３次元解析の場合と異なり，以下のとおり係数などが微妙に異なってくるので，注意が必要である。

まず，超弾性体における体積成分と偏差成分への分離は，以下のとおりとなる。３次元解析では，変形勾配の固有値が３個あるので，偏差成分を表示するためにテンソル $\mathbf{C}$ に掛ける係数が $J^{-2/3}$ であったが，２次元解析では，変形勾配の固有値が２個なので，偏差成分を表示するためのテンソル $\mathbf{C}$ に掛ける係数は，J^{-1} となる。すなわち，

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-1}\mathbf{C} \tag{204}$$

$$\det \bar{\mathbf{C}} = 1 \tag{205}$$

また，２次元解析の Projection tensor を導くため，以下を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{\mathbf{C}}}{\partial\mathbf{C}} &= \frac{\partial\left(J^{-1}\mathbf{C}\right)}{\partial\mathbf{C}} = -\mathbf{C}\otimes\frac{1}{J^2}\frac{\partial J}{\partial\mathbf{C}} + J^{-1}\mathbb{N}\\ &= -\mathbf{C}\otimes\frac{J^{-1}}{2}\mathbf{C}^{-1} + J^{-1}\mathbb{N}\\ &= J^{-1}\left(\mathbb{N} - \frac{1}{2}\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)\end{aligned} \tag{206}$$

これより，Projection tensor として，以下を用いる。

$$\mathbb{Q} = \mathbb{N} - \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C} \tag{207}$$

これを用いて，２次元解析の物質表示の定式化では, second Piola-Kirchhoff stress tensor $\mathbf{S}$ が以下のように分割される。

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_q \tag{208}$$

ここに，

$$\mathbf{S}_p = -Jp\mathbf{C}^{-1} \tag{209}$$

$$\mathbf{S}_q = J^{-1}\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}} \tag{210}$$

実際にこれが物質表示における偏差成分を抽出する projection tensor となっていることは，以下により確認できる。まず，式(208)の両辺と $\mathbf{C}$ との contraction をとると

$$\mathbf{S}:\mathbf{C} = \mathbf{S}_p:\mathbf{C} + \mathbf{S}_q:\mathbf{C} \tag{211}$$

式(209)(210)より，

$$\mathbf{S}_p:\mathbf{C} = -Jp\mathbf{C}^{-1}:\mathbf{C} = -2Jp \tag{212}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}_q:\mathbf{C} = \left(J^{-1}\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right):\mathbf{C}\\ &= J^{-1}\left(\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right):\mathbf{C} = 0\end{aligned} \tag{213}$$

となって，上に述べたことが確認できた。

この結果を用いて，２次元解析での物質表示における構成式を以下で与える。

$$\mathbf{S'} = \mathbf{S'}_p + \mathbf{S'}_q = -Jp\mathbf{C}^{-1} + J^{-1}\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}} \tag{214}$$

ここに，

$$\bar{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{I} Jq^{(i)}\left\langle \mathbf{T}^{(i)}\otimes\mathbf{N}^{(i)}\right\rangle\Delta\omega \tag{215}$$

11. ２次元解析での増分形構成式（物質表示）

次に増分形式の構成式を導く。まず，式(214)の両辺の物質時間微分をとって，

$$\dot{\mathbf{S}}' = \dot{\mathbf{S}}'_p + \dot{\mathbf{S}}'_q \tag{216}$$

ここに，

$$\dot{\mathbf{S}}'_p = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(Jp\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{217}$$

$$\dot{\mathbf{S}}'_q = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(J^{-1}\right)\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right) + J^{-1}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right) \tag{218}$$

よって，体積成分の増分形は，３次元解析と形式的に同じであるので，偏差成分についてのみ，２次元解析のものを導けばよい。まず, 式(218)の第１項は,

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(J^{-1}\right)\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right)\\ &= -J^{-1}\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}\\ &= -\mathbf{S}'_q\otimes\mathbf{C}^{-1}:\dot{\mathbf{E}}\end{aligned} \tag{219}$$

次に，式(218)の第２項の偏差成分の物質時間微分を計算するにあたり, 以下のように書き下しておく。

$$J^{-1}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right)$$
$$=J^{-1}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\bar{\mathbf{S}}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{220}$$
$$=J^{-1}\left(\dot{\bar{\mathbf{S}}}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right]\right)$$

ここで，$\dot{\bar{\mathbf{S}}}$ の計算は，３次元解析の場合と形式的に同じとなり，以下で与えられる。

$$\dot{\bar{\mathbf{S}}}=\bar{\mathbb{C}}_q:\dot{\mathbf{E}} \tag{221}$$

$$\bar{\mathbb{C}}_q=\sum_{i=1}^{I}J\left\langle\mathbf{T}^{(i)}\otimes\mathbf{N}^{(i)}\right\rangle\otimes\mathbf{C}_q^{(i)-1}\Delta\omega \tag{222}$$

次に，

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right]=\left(\dot{\mathbf{C}}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}+\left(\mathbf{C}:\dot{\bar{\mathbf{S}}}\right)\mathbf{C}^{-1}$$
$$+\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{223}$$

右辺第１項：

$$\left(\dot{\mathbf{C}}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}=\left(2\dot{\mathbf{E}}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}=2\mathbf{C}^{-1}\otimes\bar{\mathbf{S}}:\dot{\mathbf{E}}$$
$$=2\mathbf{C}^{-1}\otimes\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right):\dot{\mathbf{E}}+2\mathbf{C}^{-1}\otimes\left(\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right):\dot{\mathbf{E}}$$
$$=2\mathbf{C}^{-1}\otimes\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right):\dot{\mathbf{E}}+\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}} \tag{224}$$

第２項：式(221)を代入して，

$$\left(\mathbf{C}:\dot{\bar{\mathbf{S}}}\right)\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}:\dot{\bar{\mathbf{S}}}$$
$$=\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}:\bar{\mathbb{C}}_q:\dot{\mathbf{E}} \tag{225}$$

第３項：式(83)より，

$$\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbf{C}^{-1}\right)=-2\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{C}^{-1}$$
$$=-2\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\left(\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}} \tag{226}$$

以上の結果をまとめると，

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right]=\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}:\bar{\mathbb{C}}_q:\dot{\mathbf{E}}$$
$$-2\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\left(\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}-\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right):\dot{\mathbf{E}} \tag{227}$$
$$+2\mathbf{C}^{-1}\otimes\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right):\dot{\mathbf{E}}$$

式(221)(227)を式(220)に代入して，

$$J^{-1}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\mathbb{Q}:\bar{\mathbf{S}}\right)=J^{-1}\left(\dot{\bar{\mathbf{S}}}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left[\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1}\right]\right):\mathbf{E}$$
$$=J^{-1}\left[\mathbb{Q}:\bar{\mathbb{C}}_q+\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\left(\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}-\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right)\right]:\mathbf{E}$$
$$-\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{S}'_q\right):\mathbf{E} \tag{228}$$

これと式(219)を式(78)に代入すると，以下が得られる。

$$\dot{\mathbf{S}}'_q=\mathbb{C}_q:\dot{\mathbf{E}} \tag{229}$$

ここに，

$$\mathbb{C}_q=J^{-1}\left[\mathbb{Q}:\bar{\mathbb{C}}_q+\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\tilde{\mathbb{Q}}\right]$$
$$-\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{S}'_q+\mathbf{S}'_q\otimes\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{230}$$

$$\tilde{\mathbb{Q}}=\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}-\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1} \tag{231}$$

以上をまとめると，２次元解析における物質表示での増分形の構成式が以下のとおり与えられる。

$$\dot{\mathbf{S}}'=\frac{\partial\mathbf{S}'}{\partial\mathbf{E}}:\dot{\mathbf{E}}=\mathbb{C}:\dot{\mathbf{E}} \tag{232}$$

ここに，

$$\mathbb{C}=\mathbb{C}_p+\mathbb{C}_q \tag{233}$$

$$\mathbb{C}_p=J\left(K_{\mathrm{L/U}}-p\right)\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1}$$
$$+2Jp\mathbf{C}^{-1}\odot\mathbf{C}^{-1}-JK_{\mathrm{L/U}}\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1} \tag{234}$$

$$\mathbb{C}_q=J^{-1}\left[\mathbb{Q}:\bar{\mathbb{C}}_q+\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\tilde{\mathbb{Q}}\right]$$
$$-\left(\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{S}'_q+\mathbf{S}'_q\otimes\mathbf{C}^{-1}\right) \tag{235}$$

$$\bar{\mathbb{C}}_q=\sum_{i=1}^{I}J\left\langle\mathbf{T}^{(i)}\otimes\mathbf{N}^{(i)}\right\rangle\otimes\mathbf{C}_q^{(i)-1}\Delta\omega \tag{236}$$

$$\mathbf{C}_q^{(i)-1} = q^{(i)}\mathbf{C}^{-1} + G_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle + H_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{\mathbf{d}}^{-1}\right) + L_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_{\mathbf{dc}}^{-1}\right) \tag{237}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{N} - \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \tag{238}$$

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \tag{239}$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{I} Jq^{(i)} \left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle \Delta\omega \tag{240}$$

$$\mathbf{S}_q = J^{-1}\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}} \tag{241}$$

なお，上のいくつかの項については，計算のため，以下のように，さらに具体的に書いておくとよいであろう。

$$\mathbb{Q} : \bar{\mathbb{C}}_q = \bar{\mathbb{C}}_q - \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1} \otimes \left(\sum_{i=1}^{I} 2J\gamma^{(i)}\mathbf{C}_q^{(i)-1}\Delta\omega \right) = \sum_{i=1}^{I} J\left(\left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle - \gamma^{(i)}\mathbf{C}^{-1} \right) \otimes \mathbf{C}_q^{(i)-1}\Delta\omega \tag{242}$$

$$\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{I} 2Jq^{(i)}\gamma^{(i)}\Delta\omega \tag{243}$$

$$\mathbf{S}_q = \sum_{i=1}^{I} q^{(i)} \left(\left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle - \gamma^{(i)}\mathbf{C}^{-1} \right) \Delta\omega \tag{244}$$

また，２次元解析でのカクテルグラスモデルのダイレイタンシは，以下で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = \mathbf{C}_{\mathrm{dd}}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \tag{245}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} = \mathbf{C}_{\mathrm{dc}}^{-1} : \dot{\mathbf{E}} \tag{246}$$

ここに，

$$\mathbf{C}_{\mathrm{dd}}^{-1} = J^{-1}\sum_{i=1}^{I} \left(\frac{\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}}{1 + \left|\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|} \right) m_{1\mathrm{v}} \left(\left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle - \gamma^{(i)}\mathbf{C}^{-1} \right) \Delta\omega \tag{247}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{dc}}^{-1} = -\sum_{i=1}^{I} \mathrm{M}_{\mathrm{v}} \left| \left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle \right|^{*} \Delta\omega \tag{248}$$

12. ２次元解析での積分形構成式（空間表示）

空間表示に対する積分形の構成式は，式(214)(215)で与えた物質表示に対する積分形の構成式を push forward することにより Cauchy 有効応力を用いて，以下のとおりに与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}' = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}'\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{249}$$

その等方成分は，

$$\boldsymbol{\sigma}'_p = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}'_p\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = -J^{-1}\mathbf{F}\left(Jp\mathbf{C}^{-1}\right)\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = -p\mathbf{I} \tag{250}$$

偏差成分は，

$$\boldsymbol{\sigma}'_q = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}'_q\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = J^{-1}\mathbf{F}\left(J^{-1}\mathbb{Q} : \bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = J^{-1}\mathbf{F}\left(J^{-1}\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{2}J^{-1}\left(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{C}^{-1} \right)\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = J^{-1}\left(J^{-1}\mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}J^{-1}\left(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{I} \right) \tag{251}$$

ここで，実際に，式(138)で表される項が，空間表示における偏差成分となっているか否かを確認しておくため，$\mathbf{I}$ との contraction をとってみる。

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : J^{-1}\left(J^{-1}\mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}J^{-1}\left(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{I} \right) \tag{252}$$

ここで，

$$\mathbf{I} : \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F} : \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{F} = \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C} = \mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}} \tag{253}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{I} : \left(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{I} = \left(\mathbf{C} : \bar{\mathbf{S}}\right) \tag{254}$$

よって，以下のとおり，空間表示における偏差成分であることが確認された。

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}'_q = \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}'_q = 0 \tag{255}$$

式(252)の第１項は，式(240)より，

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1}\mathbf{F}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{I} q^{(i)} \left\langle \mathbf{t}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} \right\rangle \Delta\omega \tag{256}$$

ここに，空間表示での方向ベクトルは，物質表示の方向ベクトルから，変形勾配に沿って方向と大きさを変える形で，式(57)(58)で与えられる。これを式(252)に代入して，式(255)を用いると，

$$\mathbf{I}:\boldsymbol{\sigma}'_q=\mathbf{I}:J^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}-\frac{1}{2}J^{-1}\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right)\mathbf{I}\right)=0 \quad (257)$$

よって,

$$\mathbf{I}:\bar{\boldsymbol{\sigma}}=J^{-1}\left(\mathbf{C}:\bar{\mathbf{S}}\right) \quad (258)$$

これを，再び式(252)に代入すれば,

$$\boldsymbol{\sigma}'_q=J^{-1}\left(\mathbb{N}-\frac{1}{2}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right):\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (259)$$

これを，物質表示での偏差成分抽出のための４階テンソルに準じて，さらに，以下のとおり書くことができる。

$$\boldsymbol{\sigma}'_q=J^{-1}\mathbb{Z}:\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (260)$$

ここに,

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}-\frac{1}{2}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} \quad (261)$$

よって，空間表示における積分形の構成式は，以下のとおり与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}'_p+\boldsymbol{\sigma}'_q=-p\mathbf{I}+J^{-1}\mathbb{Z}:\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (262)$$

13. ２次元解析での増分形構成式（空間表示）

空間表示での増分形構成式は, Holzapfel(2000)により，Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{\tau}'=J\boldsymbol{\sigma}'$ の Lie 時間微分として与えられる Oldroyd stress rate $\mathrm{Oldr}\left(J\boldsymbol{\sigma}'\right)$，および, deformation rate $\mathbf{d}=\mathbf{sym}(\mathrm{grad}\dot{\mathbf{u}})$ を用いて，以下のとおり与えられる。

$$\mathrm{Oldr}\left(J\boldsymbol{\sigma}'\right)=J\mathbb{C}:\mathbf{d} \quad (263)$$

ここに,

$$c_{abcd}=J^{-1}F_{aA}F_{bB}F_{cC}F_{dD}C_{ABCD} \quad (264)$$

３次元解析に準じて，物質表示の増分形構成式である式(233)～(241)を push forward することにより，空間表示に対する増分形の構成式の接線勾配が以下のとおり与えられる。

$$\mathbb{C}=\mathbb{C}_p+\mathbb{C}_q \quad (265)$$

$$\mathbb{C}_p=\left(K_{\mathrm{L/U}}-p\right)\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}+2p\mathbb{N}-K_{\mathrm{L/U}}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}_{\mathrm{d}} \quad (266)$$

$$\mathbb{C}_q=J^{-1}\left[\mathbb{Z}:\bar{\mathbb{C}}_q+\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{\sigma}}\mathbb{Z}\right]-\left(\mathbf{I}\otimes\boldsymbol{\sigma}'_q+\boldsymbol{\sigma}'_q\otimes\mathbf{I}\right) \quad (267)$$

$$\bar{\mathbb{C}}_q=\sum_{i=1}^{I}\left\langle\mathbf{t}^{(i)}\otimes\mathbf{n}^{(i)}\right\rangle\otimes\mathbf{I}_q^{(i)}\Delta\omega \quad (268)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_q^{(i)}&=q^{(i)}\mathbf{I}+G_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left\langle\mathbf{t}^{(i)}\otimes\mathbf{n}^{(i)}\right\rangle\\&+H_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left(\mathbf{I}-\mathbf{I}_{\mathrm{d}}\right)+L_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left(\mathbf{I}-\mathbf{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right)\end{aligned} \quad (269)$$

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}-\frac{1}{2}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} \quad (270)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\sum_{i=1}^{I}q^{(i)}\left\langle\mathbf{t}^{(i)}\otimes\mathbf{n}^{(i)}\right\rangle\Delta\omega \quad (271)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_q=J^{-1}\mathbb{Z}:\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (272)$$

なお，上のいくつかの項については，計算のため，以下のように，さらに具体的に書いておくとよいであろう。

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}:\bar{\mathbb{C}}_q&=\bar{\mathbb{C}}_q-\frac{1}{2}\mathbf{I}\otimes\left(\sum_{i=1}^{I}2\gamma^{(i)}\mathbf{I}_q^{(i)}\Delta\omega\right)\\&=\sum_{i=1}^{I}\left(\left\langle\mathbf{t}^{(i)}\otimes\mathbf{n}^{(i)}\right\rangle-\gamma^{(i)}\mathbf{I}\right)\otimes\mathbf{I}_q^{(i)}\Delta\omega\end{aligned} \quad (273)$$

$$\mathrm{tr}\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{I}:\bar{\boldsymbol{\sigma}}=\sum_{i=1}^{I}2q^{(i)}\gamma^{(i)}\Delta\omega \quad (274)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_q=J^{-1}\sum_{i=1}^{I}q^{(i)}\left(\left\langle\mathbf{t}^{(i)}\otimes\mathbf{n}^{(i)}\right\rangle-\gamma^{(i)}\mathbf{I}\right)\Delta\omega \quad (275)$$

また，２次元解析のダイレイタンシ関連テンソルは，以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}}&=J^{-1}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}}{1+\left|\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|}\right)\\&m_{1\mathrm{v}}\left(\left\langle\mathbf{t}^{(i)}\otimes\mathbf{n}^{(i)}\right\rangle-\gamma^{(i)}\mathbf{I}\right)\Delta\omega\end{aligned} \quad (276)$$

$$\mathbf{I}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}=-\sum_{i=1}^{I}\mathrm{M}_{\mathrm{v}}\left|\left\langle\mathbf{t}^{(ij)}\otimes\mathbf{n}^{(ij)}\right\rangle\right|^{*}\Delta\omega \quad (277)$$

14. ２次元解析の場合の構成式のベクトル・マトリクス表示（物質表示：Total Lagrangian Formulation用）

２次元解析の場合，応力ひずみベクトルを，対応するテンソルの成分を用いて，以下で与える。

$$\hat{\mathbf{S}}'^{\mathrm{T}} = \left\{ S'_{11} \quad S'_{22} \quad S'_{12} \right\} \tag{278}$$

$$\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} = \left\{ E_{11} \quad E_{22} \quad 2E_{12} \right\} \tag{279}$$

これらを用いて，多重せん断モデルの積分形を以下で与える。

$$\hat{\mathbf{S}}' = \hat{\mathbf{S}}'_p + \hat{\mathbf{S}}'_q \tag{280}$$

$$\hat{\mathbf{S}}'_p = -Jp\hat{\mathbf{C}}^{-1} \tag{281}$$

$$\hat{\mathbf{S}}'_q = \sum_{i=1}^{I} q^{(i)} \hat{\hat{\mathbf{N}}}^{(i)} \Delta\omega \tag{282}$$

ここに，

$$\left\{\hat{\mathbf{C}}^{-1}\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{ C_{11}^{-1} \quad C_{22}^{-1} \quad C_{12}^{-1} \right\} \tag{283}$$

$$\left\{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{ \cos\omega_i \quad -\cos\omega_i \quad \sin\omega_i \right\} \quad (\text{for } i = 1,\ldots,I) \tag{284}$$

$$\left\{\hat{\hat{\mathbf{N}}}^{(i)}\right\} = \left\{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\right\} - \gamma^{(i)} \left\{\hat{\mathbf{C}}^{-1}\right\} \quad (\text{for } i = 1,\ldots,I) \tag{285}$$

$$\hat{\mathbf{n}}^{(0)\mathrm{T}} = \left\{ 1 \quad 1 \quad 0 \right\} \tag{286}$$

$$\omega_i = (i-1)\Delta\omega \tag{287}$$

$$\Delta\omega = \pi / I \tag{288}$$

ベクトルマトリクス表示の$\left\{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\right\}$は，２階テンソル$\left\langle \mathbf{T}^{(i)} \otimes \mathbf{N}^{(i)} \right\rangle$のテンソル表示成分を一列に並べてベクトル化したものであり，このテンソル表示で用いているベクトル$\mathbf{N}^{(i)}$とは別物である。表記が紛らわしくなっているが混同しないように。

大変形解析における体積ひずみは，Jacobian determinant から，以下のとおり与える。

$$\varepsilon = \ln J \tag{289}$$

なお，これの速度は，

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{J}}{J} \tag{290}$$

有効ひずみ類もこれに基づいて計算する。

また，仮想単純せん断ひずみは，以下で与えられる。

$$\gamma^{(i)} = \left\{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\right\}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{E}} \quad (\text{for } i = 1,\ldots,I) \tag{291}$$

増分形の構成式は，以下で与えられる。

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{S}}' = \mathbf{D}\mathrm{d}\hat{\mathbf{E}} \tag{292}$$

ここに，

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_q \tag{293}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_p &= J\left(K_{\mathrm{L/U}} - p\right)\hat{\mathbf{C}}^{-1}\left\{\hat{\mathbf{C}}^{-1}\right\}^{\mathrm{T}} \\ &+2Jp\left\{\hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1}\right\} - JK_{\mathrm{L/U}}\hat{\mathbf{C}}^{-1}\left\{\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{d}}^{-1}\right\}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{294}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_q &= J^{-1}\left[\tilde{\mathbf{D}}_q + \sum_{i=1}^{I} 2Jq^{(i)}\gamma^{(i)}\Delta\omega\tilde{\mathbf{Q}}\right] \\ &-\left(\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{S}}'^{\mathrm{T}}_q + \hat{\mathbf{S}}'_q\left(\hat{\mathbf{C}}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right)\end{aligned} \tag{295}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_q = \sum_{i=1}^{I} J\hat{\hat{\mathbf{N}}}^{(i)}\left(\hat{\mathbf{C}}_q^{(i)-1}\right)^{\mathrm{T}}\Delta\omega \tag{296}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{C}}_q^{(i)-1} &= q^{(i)}\hat{\mathbf{C}}^{-1} + G_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\hat{\mathbf{N}}^{(i)} \\ &+H_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} - \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{d}}^{-1}\right) + L_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left(\hat{\mathbf{C}}^{-1} - \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{dc}}^{-1}\right)\end{aligned} \tag{297}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \left\{\hat{\mathbf{C}}^{-1} \odot \hat{\mathbf{C}}^{-1}\right\} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{C}}^{-1}\left(\hat{\mathbf{C}}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{298}$$

$$K_{\mathrm{L/U}} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon'} \tag{299}$$

$$G_{\mathrm{L/U}}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \gamma^{(i)}} \tag{300}$$

$$H_{\mathrm{L/U}}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon'} \tag{301}$$

$$L_{\mathrm{L/U}}^{(i)} = \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \varepsilon''} \tag{302}$$

ここに，

$$\left\{\hat{\mathbf{C}}^{-1}\odot\hat{\mathbf{C}}^{-1}\right\}=\begin{bmatrix} C_{11}^{-1} & 0 & C_{12}^{-1} & 0 \\ 0 & C_{12}^{-1} & 0 & C_{22}^{-1} \\ 0 & C_{11}^{-1} & 0 & C_{12}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} C_{11}^{-1} & 0 & \frac{1}{2}C_{12}^{-1} \\ C_{12}^{-1} & 0 & \frac{1}{2}C_{22}^{-1} \\ 0 & C_{12}^{-1} & \frac{1}{2}C_{11}^{-1} \\ 0 & C_{22}^{-1} & \frac{1}{2}C_{12}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \left(C_{11}^{-1}\right)^2 & \left(C_{12}^{-1}\right)^2 & C_{11}^{-1}C_{12}^{-1} \\ \left(C_{12}^{-1}\right)^2 & \left(C_{22}^{-1}\right)^2 & C_{12}^{-1}C_{22}^{-1} \\ C_{11}^{-1}C_{12}^{-1} & C_{12}^{-1}C_{22}^{-1} & \frac{1}{2}C_{11}^{-1}C_{22}^{-1}+\frac{1}{2}\left(C_{12}^{-1}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{303}$$

また，物質表示のダイレイタンシ関連のベクトルは，以下で与えられる。

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{dd}}^{-1}=J^{-1}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}}{1+\left|\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|}\right)m_{1\mathrm{v}}\hat{\hat{\mathbf{N}}}^{(i)}\Delta\omega \tag{304}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{dc}}^{-1}=-\sum_{i=1}^{I}\mathrm{M}_{\mathrm{v}}\left|\mathbf{N}^{(i)}\right|^{*}\Delta\omega \tag{305}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{d}}^{-1}=\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{dd}}^{-1}+\hat{\mathbf{C}}_{\mathrm{dc}}^{-1} \tag{306}$$

$$\left\{\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{dc}}^{-1}\right\}^{\mathrm{T}}=\left\{C_{\mathrm{dc}11}^{-1}\quad C_{\mathrm{dc}22}^{-1}\quad C_{\mathrm{dc}12}^{-1}\right\} \tag{307}$$

その他は，微小ひずみの定式化と同じとなる。

15. ２次元解析の場合の構成式のベクトル・マトリクス表示（空間表示：Updated Lagrangian用）

２次元解析の場合，応力ひずみベクトルを，対応する Cauchy 応力および Euler Almansi ひずみテンソルの成分を用いて，以下で与える。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'^{\mathrm{T}}=\left\{\sigma'_{11}\quad\sigma'_{22}\quad\sigma'_{12}\right\} \tag{308}$$

$$\hat{\mathbf{e}}^{\mathrm{T}}=\left\{e_{11}\quad e_{22}\quad 2e_{12}\right\} \tag{309}$$

これらを用いて，多重せん断モデルの積分形を以下で与える。

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'=\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_p+\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_q \tag{310}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_p=-p\hat{\mathbf{n}}^{(0)} \tag{311}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_q=J^{-1}\sum_{i=1}^{I}q^{(i)}\hat{\hat{\mathbf{n}}}^{(i)}\Delta\omega \tag{312}$$

ここに，

$$\hat{\mathbf{n}}^{(0)\mathrm{T}}=\left\{1\quad 1\quad 0\right\} \tag{313}$$

また，物質表示の仮想単純せん断を表す方向ベクトルの成分を，一度，以下のようにテンソル表示に戻しておく。

$$\left\langle\mathbf{T}^{(i)}\otimes\mathbf{N}^{(i)}\right\rangle=\begin{bmatrix}\cos\omega_i & \sin\omega_i \\ \sin\omega_i & -\cos\omega_i\end{bmatrix} \tag{314}$$

これの空間表示のテンソルを以下により求める。

$$\left\langle\mathbf{t}^{(i)}\otimes\mathbf{n}^{(i)}\right\rangle=\mathbf{F}\left\langle\mathbf{T}^{(i)}\otimes\mathbf{N}^{(i)}\right\rangle\mathbf{F}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}n_{11}^{(i)} & n_{12}^{(i)} \\ n_{21}^{(i)} & n_{22}^{(i)}\end{bmatrix} \tag{315}$$

これの成分を用いて，空間表示の仮想単純せん断の方向ベクトルを，以下で与える。

$$\left\{\hat{\mathbf{n}}^{(i)}\right\}^{\mathrm{T}}=\left\{n_{11}^{(i)}\quad n_{22}^{(i)}\quad n_{12}^{(i)}\right\}\quad(\text{for } i=1,\ldots,I) \tag{316}$$

これを用いて，

$$\hat{\hat{\mathbf{n}}}^{(i)}=\hat{\mathbf{n}}^{(i)}-\gamma^{(i)}\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\quad(\text{for } i=1,\ldots,I) \tag{317}$$

仮想単純せん断ひずみは，以下で与えられる。

$$\gamma^{(i)}=\left\{\hat{\mathbf{n}}^{(i)}\right\}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{e}}=\left\{\hat{\mathbf{N}}^{(i)}\right\}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{E}}\quad(\text{for } i=1,\ldots,I) \tag{318}$$

以上のとおり，仮想単純せん断ひずみは，物質表示，空間表示のいずれも同じものとなる。

増分形の構成式は，以下で与えられる。

$$\widehat{\mathrm{Oldr}}(J\boldsymbol{\sigma}')=J\mathbf{D}\hat{\mathbf{d}} \tag{319}$$

ここに，

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}_p+\mathbf{D}_q \tag{320}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_p&=\left(K_{\mathrm{L/U}}-p\right)\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\mathbf{n}^{(0)\mathrm{T}}\\&+2p\hat{\mathbf{I}}-K_{\mathrm{L/U}}\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{321}$$

$$\mathbf{D}_q = J^{-1}\left[\tilde{\mathbf{D}}_q + \sum_{i=1}^{I} 2q^{(i)}\gamma^{(i)}\Delta\omega\mathbf{Z}\right] - \left(\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\boldsymbol{\sigma}'^{\mathrm{T}}_q + \boldsymbol{\sigma}'_q\hat{\mathbf{n}}^{(0)\mathrm{T}}\right) \tag{322}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_q = \sum_{i=1}^{I} \hat{\mathbf{n}}^{(i)}\hat{\mathbf{n}}_q^{(i)\mathrm{T}}\Delta\omega \tag{323}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_q^{(i)} = q^{(i)}\hat{\mathbf{n}}^{(0)} + G_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\hat{\mathbf{n}}^{(i)} + H_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left(\hat{\mathbf{n}}^{(0)} - \hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{d}}\right) + L_{\mathrm{L/U}}^{(i)}\left(\hat{\mathbf{n}}^{(0)} - \hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}\right) \tag{324}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}^{(0)}\hat{\mathbf{n}}^{(0)\mathrm{T}} \tag{325}$$

また，ダイレイタンシ関連ベクトルは，以下で与えられる。

$$\hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} = J^{-1}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}}{1+\left|\gamma^{(i)}/\gamma_{\mathrm{v}}\right|}\right)m_{1\mathrm{v}}\hat{\hat{\mathbf{n}}}^{(i)}\Delta\omega \tag{326}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} = -\sum_{i=1}^{I}\mathrm{M}_{\mathrm{v}}\left|\hat{\hat{\mathbf{n}}}^{(i)}\right|^{*}\Delta\omega \tag{327}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{d}} = \hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} + \hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}} \tag{328}$$

16. おわりに

本研究では，砂のような粒状体の力学モデルとしてのひずみ空間での多重せん断モデルを基に，大変形解析（有限ひずみ解析）に必要なTotal Lagrangian(TL法)法，および，Updated Langrangian法(UP法)の両者による定式化を示した。定式化は，一般的なテンソル表示に加えて，数値解析で必要となる２次元および３次元空間でのベクトルマトリクス表示によるものを示している。また，増分形のみならず積分形も同時に示している。

参考文献

井合　進・飛田哲男・小堤　治(2008)：砂の繰返し載荷時の挙動モデルとしてのひずみ空間多重モデルにおけるストレスダイレイタンシー関係，京都大学防災研究所年報，第51号，pp.291-304.

Holzapfel, G.A. (2000): Nonlinear Solid Mechanics, John Wiley & Sons

Iai, S. and Ozutsumi, O. (2005): Yield and cyclic behaviour of a strain space multiple mechanism model for granular materials. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.29, No.4, pp.417-442.

付録

A１．大変形解析における応力・ひずみ

以下では，文献１(Holzapfel, 2000)の Notation を用いる。大文字は物質表示（t=0）での値，小文字は空間表示(t=t)での値を表す。

空間表示（t=t）での応力としては Cauchy stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ を用い，これより次式により Kirchhoff stress tensor $\boldsymbol{\tau}$ が与えられる。

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \tag{329}$$

ここに, Jacobian determinant は, 変形勾配 $\mathbf{F} = \dfrac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}$ により以下で与えられる。

$$J = \det\mathbf{F} \tag{330}$$

これを物質表示(t=0)に引戻すことにより，物質表示での応力として，以下の second Piola-Kirchhoff stress tesor $\mathbf{S}$ が与えられる。

$$\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \tag{331}$$

空間表示でのひずみは, 以下の Euler-Almansi strain tensor $\mathbf{e}$ で与えられる。

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}\right) \tag{332}$$

物質表示でのひずみは，以下の Green-Lagrange strain tensor $\mathbf{E}$ で与えられる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) \tag{333}$$

両者には，以下の関係がある。

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\mathbf{F} \tag{334}$$

A２．Work conjugate

Work conjugate を組むペアは, 以下のとおり与えられる（空間表示は最左辺，それ以外は，物質表示）。

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\mathrm{d}v = \int_{\Omega_0}J\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}\mathrm{d}V = \int_{\Omega_0}\boldsymbol{\tau}:\mathbf{d}\mathrm{d}V = \int_{\Omega_0}\mathbf{S}:\dot{\mathbf{E}}\mathrm{d}V = \int_{\Omega_0}\boldsymbol{J\sigma}_{\mathrm{u}}:\mathbf{D}_{\mathrm{R}}\mathrm{d}V \tag{335}$$

$\mathbf{d}$ は速度勾配（＝ひずみ増分）, rotated rate of deformation tensor は以下で定義

$$\mathbf{D}_{\mathrm{R}} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}\mathbf{R} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{U}^{-1} \tag{336}$$

ここに,

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \tag{337}$$

A3. 増分型構成式での応力, ひずみ増分

物質表示（t=0）での応力, ひずみを時間微分（物質時間微分）すると, これらの速度（増分）として $\dot{\mathbf{S}}$, $\dot{\mathbf{E}}$ が得られる。これらを空間表示に押出すと, 空間表示で, 以下の stress rate（増分）と deformation rate（増分）が与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{338}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1} \tag{339}$$

式(338)左辺は, Kirchhoff 応力の Oldroyd stress rate であり, Kirchhoff 応力の Lie 時間微分として以下のとおり与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}=\mathrm{Oldr}(\boldsymbol{\tau})=\dot{\boldsymbol{\tau}}-\mathbf{l}\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\tau}\mathbf{l}^{\mathrm{T}} \tag{340}$$

ここに, $\mathbf{l} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$ は, 空間表示での速度勾配を表し, 以下のとおり。

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \tag{341}$$

ただし,

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} + \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right) \tag{342}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{l} - \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\right) \tag{343}$$

Oldroyd stress rate は, $\mathbf{d} = 0$ の場合には, Jaumann rate

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{\tau}-\mathbf{w}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}\mathbf{w} \tag{344}$$

に還元され, また, $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}$ の場合には, Corotational rate

$$\breve{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{\tau}-\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\tau}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \tag{345}$$

に還元される。

空間表示での速度勾配と物質表示での速度勾配とは, 以下の関係がある。

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \\ &= \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{346}$$

また, 空間表示でのひずみ速度（Euler-Almansi strain tensor の時間微分）と deformation rate の間には, 以下の関係がある。

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} - \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} - \mathbf{e}\mathbf{l} \tag{347}$$

A4. 体積ひずみ

体積変化は, Jacobian determinant で与えられる：

$$\mathrm{d}v = J\mathrm{d}V \tag{348}$$

質量保存則は,

$$\rho_0 = \rho J \tag{349}$$

体積変化の増分は, 以下のとおり, ひずみ速度（増分）の対角項の総和と関係づけられる。

$$\dot{J} = J\mathrm{tr}\mathbf{d} \tag{350}$$

Finite Strain (Large Deformation) Formulation of Sand Based on Multiple Mechanism Model

Susumu IAI, Kyohei UEDA, Tetsuo TOBITA, and Osamu OZUTSUMI*

* Lecturer, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University; Meisosha Co.

Synopsis

Finite strain (large deformation) formulation is presented for a multiple mechanism model for idealizing the behavior of sand. The model is capable of representing non-linear behavior of sand under transient and cyclic loading, including the phenomenon of liquefaction. In the finite strain formulation, isotropic and isochoric components will be separated based on the approach adopted for hyper-elastic materials.

Keywords: constitutive equation, finite strain, large deformation, sand