

會學濟經學大國帝都京

叢論經濟

號二第卷六十五第
月二年八十和昭

論叢

計畫の經濟理論……………

經濟學博士 柴田敬

總力戰體制に於ける企業者……………

經濟學士 大塚一朗

生産理論に於ける商品群の觀點……………

經濟學士 青山秀夫

時論

公債の國民負擔を輕易ならしむる方法……………

法學博士 神戸正雄

研究

支那工業に於ける労働場所の諸條件……………

經濟學士 岡部利良

說苑

支那における繭の流通費用……………

經濟學士 堀江英一

附錄

彙報

生産理論に於ける商品群の観點

青山秀夫

順序として先づ企業を生産計畫の靜學的理論について敍べねばならぬ。消費者は欲望満足の極大を目指して行動し、企業者は利潤の極大を目指して行動すると假定する限り、企業者の均衡従つてその生産計畫の分析が消費者均衡の理論と同様の構造をもつことは明かである。消費者の選擇の理論が既に明瞭である場合企業者の選擇について論ずべきことは乏しいと云はねばならぬ。とは云へ、ヒツクスの生産計畫の靜學的分析は、その問題の構成に於て、在來のもの若干趣を異にする。豫め簡單に此の問題構成の特徴について説明して置きたい。

先づ、ヒツクスの生産理論の問題構成に於ける特徴は、生産物と生産要素とを謂はゞ對稱的に待遇する點に存する。即ち、ヒツクスに於ては生産物と生産要素とは平等無差別なる位置を占める。此のためにヒツクスは、先づ第一に、生産要素と生産物との違ひはたゞ符號の差 (only a difference in sign) に過ぎずとして、生産要素を「負の生産物」(negative products) として取扱ふ。詳言すればかうである。——今企業が m 種類の生産要素を y_1, y_2, \dots, y_m だけ p_1, p_2, \dots, p_m の價格を支持つて買ひ、これを投下して或る生産物を x だけ生産し、これを價格 p で賣る場合それより得られる剩餘乃至利潤 V は

$$(1) \quad V = px - p_1 y_1 - p_2 y_2 - \dots - p_m y_m$$

1) 本稿は拙稿「商品群に對する需要」(本誌第五卷第五號昭和十七年十一月號所掲)に續いて、ヒツクスに於ける商品群觀點の生産理論への適用を論評することを目的とする。但し本稿では生産計畫の動學的分析に於ける此の觀點の適用を論ずるを得なかつた。

乃至

$$= -p_1y_1 - p_2y_2 \dots - p_m y_m + p_x$$

で與へられるであらう。明かに此の場合生産要素と生産物とは對稱的ではない。記號の文字が異なるのみでなく、符號が異つてゐる。ところで今、上記の如く、生産要素は「負の生産物」であるといふ觀點から、

$$(2) \quad x_i = -y_i \quad (i=1, 2, \dots, m); \quad p = p_{x+i}, \quad x = x_{x+i}$$

なる置換を行へば(1)は書改められて、

$$(1) \quad V = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_{x+m}x_{x+m} + p_{x+i}x_{x+i}$$

となる。これに於ては、生産要素も生産物も最早對稱的である。兩者は、 x_i の値の正負によつて區別されるだけである。此の點を除けば、生産要素も生産物も平等の地位に立つてゐる。此の意味に於て以下、生産要素たると生産物たるとに拘りなく、第 i 番目の財を財 i と略稱する。財 i は ∇ ならば生産要素であり、 ∇ で生産要素需要量が表はされ、 p_i で生産要素の價格が表はされることとなる。之に反して ∇ ならば、財 i は生産物であり、 ∇ で該生産物の生産高が、 p_i を以て該生産物の價格が表はされることとなる。——然し、生産要素と生産物とを對稱的に取扱ふためのヒツタスの工夫は單にそれだけではない。第二にヒツタスは生産函數を陰伏的に定義することによつて、此の二者を對稱的ならしめる。生産要素數量とそれを用ひて生産される生産高數量との間の關係、即ち生産函數は、上記の記號を用ひると、通常、

$$(3) \quad x = \phi(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

或は

$$= \phi(-x_1, -x_2, \dots, -x_m)$$

なる形で定義されてゐる。即ち陽表的に定義されてゐる。これに於て生産用役數量は獨立變數であり、生産高は

2) 以下については J. R. Hicks: Value and Capital, 1939, p. 319 et suiv. を参照されたい。

從屬變數であり、明かに兩者の位置は對稱的ではない。これに對してヒックスは

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \equiv x - \phi(-x_1, -x_2, \dots, -x_m)$$

で定義された函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1})$ を考へる。(3)によつて

$$(4) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) = 0$$

である。明かにこれを x_{m+1} について解けば、上記の生産函数(3)が得られ、此の意味に於て方程式(4)は生産函数を隱伏的に定義するが、これに於ても、(3)に見られたやうな、生産要素と生産物との間の非對象性は存在しない。生産要素と生産物との間の差異は消えてゐる。

ヒックスは上記の如く生産物と生産要素とを對稱的に取扱ふが、以上は單に、多種類の生産要素を用ひて生産物をただ一種だけ生産する場合に關するに止まつた。これは從來の生産理論が主として對象として來たところである。ところで、かくの如く、生産物と生産要素とを對稱的に取扱ふことゝなると、理論を更に擴張して、多種類の生産要素を使用して、一種類でなく多種類の生産物を生産する場合、即ち結合生産物 (Joint products) の場合に進むことが容易に可能となる。上記の餘剰の方程式(1)にせよ、生産函数を與へる方程式(4)にせよ、生産物の種類が一種類に限られる場合にしか妥當し得ぬものではない。若しその數値が正である如き獨立變數 m が二個以上存在するとしても、方程式(4)は使用される生産要素數量と生産物數量との間の關係、從つて生産函数を與へ、方程式(1)は、かゝる生産活動から得られる剩餘を與へる筈である。即ち結合生産の場合が取扱へることゝなる。

かくの如く剩餘の方程式並びに生産函数を、上記の如く、(1)及び(4)で與へる場合は、結合生産の問題をも處理することができ、今此の目的を以て、剩餘の方程式並びに生産函数を與へる方程式に書改めを行ふ。即ち、

3) Hicks: *ibid.* p. 85.

m 種類の生産要素を x_1, x_2, \dots, x_m だけ投下して m 種類の生産物を $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ だけ生産するとし、且、夫々の財の價格を p_i とする。(勿論價格に附せられる添字は財の番號に應ずる。)従つて、剩餘乃至利潤 V は

$$(5) \quad V = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m$$

で與へられ、生産函数は方程式

$$(6) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

で定義される。

II

ヒックスの生産の靜學的理論の問題構成上の特徴は以上の如くである。ところで企業者が利潤を極大ならしめる如く、上記の n 個の x_i の數値の組を決定するとすれば、此の如き最有利なカームビナチオンは如何なる性質を有するであらうか。企業の均衡の問題がこれであるか、此の問題は消費者の均衡の問題と同様に次の如くにして解決される。

企業者は、技術的條件(6)に拘束されつゝ、剩餘 V の極大を求める。即ち、條件付きの極大が問題である。従つて問題は、ラグランジュの未定係數法により、 μ をラグランジュの未定係數として

$$(7) \quad \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) = V - \mu f$$

で定義された補助函数 Φ を考へ、此の Φ に何の制限もなしに極値を與へる如き $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ の値の組を求めることに歸着する。即ち最有利なカームビナチオンは、 f の x_i に關する偏導函数を f_i とするととき

$$(8) \quad \mu f_i = p_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

1) 以下論ずる企業の均衡並びにその安定の條件は、Hicks: Value and Capital. では第六章 (p. 78—88) で概念的並びに幾何的に取扱はれ、數學附錄 第18節 (p. 319—320) に於て解析的に論ぜられてゐる。

と(6)とを満足する如きものでなければならぬ。

此の(6)と(8)とが企業の均衡の方程式である。即ち最有利なエーコムピナチオンは十個の聯立方程式

$$\begin{cases} (6) & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ (8) & Mf_i = p_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

の解でなければならぬ。然し此の十個の聯立方程式を十個の未知數 $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ について解いて得られる解が直ちに最有利なエーコムピナチオンであるとは、云へない。換言すれば利潤の極大を與へるとは直ぐには云へない。それが利潤の極大を與へるためには、更に充分條件が満足されねばならぬが、此の充分條件は今の場合、次の如きものである。——いま上記の補助函數 ϕ について、 x_1, x_2, \dots, x_n の間に何らの依存關係も存しないものとじて、その第二次全微分をつくる。若し、(6)(8)の解たるエーコムピナチオンに於て、

$$(9) \quad d^2\phi = f_{11}dx_1^2 + f_{22}dx_2^2 + \dots + f_{nn}dx_n^2 = 0$$

なる條件の下に、此の第二次全微分が negativdefinit であるならば、(即ち、 dx_1, dx_2, \dots, dx_n が(9)の條件に従ふ他、全く任意の實數値を取るとき、此の第二次全微分が常に負となるならば) 此のエーコムピナチオンに於て V は極大となる。

これが今の場合の充分條件である。従つて、最有利のエーコムピナチオンに於ては、(9)なる條件の下に於て、 ϕ の(諸 x_i の間に何ら依存關係がないとした場合の)第二次全微分、即ち

$$(10) \quad -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} dx_i dx_j \quad \left[f_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ji} \right]$$

が negativdefinit であると考へられる。即ち條件(9)の下に dx_1, dx_2, \dots, dx_n の二次形式

2) 此の均衡の概念的法制化については、Hicks: *ibid.* p. 86 を見よ。 i を生産物、 j を生産要素とすると、 f_i, F_j は “the marginal product of the factor j in terms of the product i ” であり、通常「限界生産力」と呼ばれるものに相當するが、Hicks はこれを “marginal rate of transformation” と呼んで

$$(10) \quad \sum \sum f_{ij} dx_i dx_j$$

が positive definite である。このことは、行列式

$$(11) \quad \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{1n} & f_{2n} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

が凡て負であることに他ならない。これが企業の均衡の安定条件である。以下便宜上此の行列式の最後のものを F で表はし、 F に於ける f_{ij} の餘因數を F_{ij} で表はすこととする。

さて方程式(6)(8)は十個の方程式を含み、此等の十個の方程式は互に獨立であると看做される。従つてこれを(1)個の變數 x_1, x_2, \dots, x_n 及び μ について解くことができる。今かくの如くにして(6)(8)を解いた結果を

$$(12) \quad \begin{cases} x_i = x_i(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ \mu = \mu(p_1, p_2, \dots, p_n) \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

とする。明かに(12)で定義された x_i 及び μ は(6)(8)を満足するものであるが、このことから、(12)の函數の經濟的意味が明かにされる。市場で一定の價格系列 p_1, p_2, \dots, p_n が與へられれば、(12)によつてこれに應じた諸々の x_i 及び μ の値が定まるが、此の x_i 及び μ は上記の利潤極大の必要條件(6)(8)を満足するものである。即ち、利潤の極大を目指して行動する場合の企業の生産要素需要量乃至生産物生産高に他ならない。此の意味に於て、(12)は企業の生産要

3) 此の條件の經濟的意味については、Hicks: *ibid.* pp. 86—87. を見られたい。

素に對する需要函數及び生産物の供給函數を與へるものである。以下便宜上此の兩者を一括して企業の市場活動函數と呼ぶことゝしよう。

然らば此の企業の市場活動函數は如何なる構造をもつか。此の問題に答へるものがかのスルウツキイ方程式である。今上記の(6)(8)に於て諸々の x_i 及び μ を、(12)に示す如く、價格系列 p_1, p_2, \dots, p_n の函數と看做して、價格 p_i の變動に對する x_i の變動の比率を求めれば、微積分學に於ける陰函數の微分法の教ふる手續きによつて、

$$(13) \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{F_i}{\mu F} \quad [F_i = \text{cofactor of } f_{ij} \text{ in } F]$$

を得る。便宜上此の式の右邊を $-x_{ij}$ と置けば、

$$(14) \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -x_{ij}$$

となる。ヒックスは消費者の市場活動に關して現はれた同様のものを「代用效果」(substitution effect)の表現と解したのに對して、こゝに現はれる諸々の x が意味するところを「生産效果」(production effect)と呼ぶが、こゝでは簡單のため、前と同様に x_{ij} を「財 i と財 j との間の代用の項」と呼ぶことゝしよう。⁴⁾

此の x_{ij} は、消費者選擇の理論に於けると同様に、全く同様の六個の性質を有する。然し、此の性質、並びにその經濟的意味については、既に敘べたからこゝには繰返さない。⁵⁾ 此の場合特に注意を要するのは、寧ろ x_{ij} の正負が有する經濟的意味である。⁶⁾ x_{ij} に於て財 i は生産要素でもあり得るし、又生産物でもあり得る。又財 j も同様である。然も生産要素の場合は、例へば、財 j が生産要素の場合をとつて云へば、 p_i の變化に對する生産要素 j の需要の變化を見るためには、 x_{ij} ではなく、 $-x_{ij}$ がどう變動するかを考へねばならぬ。(吾々は生産要素を「負の生産物」と見たから)。此の結果、 x_{ij} のもつ經濟的意味は著るしく錯綜すること次表に示す通りであるが、然しそれにも拘は

4) 以下については Hicks: *ibid.* pp. 320—322. 並びに安井琢磨教授「企業の動學理論」(日本經濟學會年報 第二輯) p. 164. 以下を參照されたい。

5) Hicks: *ibid.* p. 90. 此の點については尙前掲拙稿、p. 536 參照。

6) Hicks: *ibid.* p. 321. 前掲拙稿、p. 537.

らず、此等の複雑な事態を一貫する原理が存在する。

x_{ij} の經濟的意味 (財 i の價格 p_i の騰量の效果)						
	財 i は	生産物	生産要素	生産物	生産要素	
	財 j は	生産物	生産要素	生産要素	生産物	
$x_{ii} < 0$ (財 i に及ぶ影響)		生産物 i の生産増	生産要素 j の使用減	生産物 i の生産増	生産要素 i の使用減	
財 j に及ぶ影響	$x_{ij} < 0$	Complementarity		Regression		
		$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} > 0$ 生産物 j の生産増	$\frac{\partial(-x_j)}{\partial p_i} < 0$ 要素 j の使用減	$\frac{\partial(-x_j)}{\partial p_i} < 0$ 要素 j の使用減	$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} > 0$ 生産物 j の生産増	
	要素 j と他の要素 k との間に代用關係 要素 k と生産物との間に補完關係					
	$x_{ij} > 0$	Substitutability		Covariancy		
$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} < 0$ 生産物 j の生産減		$\frac{\partial(-x_j)}{\partial p_i} > 0$ 要素 j の使用増	$\frac{\partial(-x_j)}{\partial p_i} > 0$ 要素 j の使用増	$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} < 0$ 生産物 j の生産減		
$x_{ij} < 0$ dominant			$x_{ij} > 0$ dominant			

それはからである。今 x_{ij} が正の場合をとり、價格 p_i が騰貴した場合を考へる。此の場合財 j が生産要素なら

生産理論に於ける商品群の觀點

第五十六卷 一六九 第二號 五三

7) 此の點に關する詳細なる概念的説明については、Hicks: *ibid.* pp. 89-98. を見られたい。

ばその需要は増大し、財 i が生産物ならばその供給が減少する。しかし、何れにしてもそれが價格 p_i の變動傾向に及す効果は同一である。即ち、價格 p_i の騰貴を誘發する傾向を持つ。即ち、 x_{ij} が正の場合、 p_i と p_j とは共通の價格變動傾向を含み、此の意味に於て此の二つの價格は「共變的」であると云へる。これと恰度逆に、 x_{ij} が負の場合には、 p_i と p_j とは「反變的」であり、一方の價格騰貴は他方の價格下落を誘發する傾向を生む。ヒックスが消費者選擇に關して、「價格共變的」の場合を「代用的」と云ひ、「價格反變的」の場合を「補完的」と呼んだことは既述の如くであるが、ヒックスは同一の觀點を今の場合にも貫徹して、 x_{ij} が正の場合財 i と財 j とは「代用的」(substitutive, rival)であると云ひ、 x_{ij} が負の場合、財 i と財 j とは「補完的」(complementary)であると呼んでゐる。

(註) ここで私の充分條件の取扱ひは、それがもたらす結果は同一であるとは云へ、その導き出し方に於てヒックスのそれと異つてゐる。ヒックスの充分條件の敘述(Hicks: *ibid.*, p. 380)は不精確であり、同様のことがまた消費者均衡の安定條件(*cf.* Hicks: *ibid.*, p. 306)についても云はれ得るが、此の點については岡正造教授の示教に負ふ。尙、條件附の極大極小の問題に於てラゲフンジユの未定係數法を用ひた場合の充分條件の取扱ひについては、藤原松三郎博士「微分積分學」第二卷一〇〇頁以下にも詳細な説明がある。

三

商品群内部に於て相對價格が不變であるならば、該商品群と任意の商品(或は商品群)との間の代用の項を適當に定義する限り、該商品群を單一商品であるかの如くに看做してスルウツキ方程式を構成することが出來、此の意味に於てその内部で相對價格が不變なる商品群は單一商品と同様に取扱つて差支へない。—此の如きがヒックスの「價值と資本」を一貫する考察原理の一つであるが、此の觀點が如何なる内容を有するかは、既に前稿に

於て詳論した通りである。従つて吾々は此の商品群の觀點を既知と看做して生産計畫の分析へのその適用に考察を進めることも出来るが、こゝでは此の商品群觀點の内容について前稿とは稍異つた方面から若干の説明を附加へ、尙前稿で省略した説明を補つて置き度いと思ふ。

さて吾々がこゝに證明を要求される命題はかうである。—今財1, 2, …, mが商品群を形成し、此等の諸商品相互間の相對價格が不變であるとする。(勿論 $m \geq 2$ とする。尙此のmは上記の生産要素の種類の數のmと無關係である。) 即ち w_1, w_2, \dots, w_m なる常數を適當に取ると

$$(15) \quad p_1 : p_2 : \dots : p_m = w_1 : w_2 : \dots : w_m$$

或は (15') $p_i = \gamma w_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$

なる關係が成立つ。今、

$$(16) \quad G = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_m x_m$$

と置いて此のGを以て此の商品群の數量を測ると同時に此の商品群そのものをも表すこととする。上記の(1')に(15)をもちこめば、

$$(17) \quad V = rG + p_{n+1}x_{n+1} + \dots + p_{n+k}x_{n+k}$$

を得るか、此の式はrをGの價格と看做し得べきことを示す。此の意味でrをGの價格と呼ぶこととする。さて次に、今、又はjを任意の商品又は商品群として

$$(18) \quad x_{Gj} \equiv w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + \dots + w_m x_{mj}$$

$$(18') \quad x_{Gj} \equiv w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + \dots + w_m x_{mj}$$

1) 「商品群に對する需要」(本誌 第五十五卷 第五號所掲)。

と置く。(19) $K_j = K_{jg}$ であるから當然 $K_{ig} = K_{ig}$ 然らば G を單一商品であるかの如く看做してスルウツキイ方程式を書き下すことが出来る。

$$(19) \quad \frac{\partial K_j}{\partial T} = -K_{Gj}$$

$$(19') \quad \frac{\partial G}{\partial p_i} = -K_{ig}$$

となる。(19) (19') に於て i, j は 1 から n までの何れでの商品でもよいが、亦、何らかの任意の商品群であつてもよい。特に

$$(20) \quad \frac{\partial G}{\partial T} = -K_{GG} = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r_{ij} w_j K_{Gj}$$

である。次に此の命題を證明しよう。

此の命題の證明の出發點となるのは上記の市場活動函數(12)である。尙これに關して注意を要するのは、此の市場活動函數は、

$$(14) \quad \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = -K_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n)$$

を聯立一階偏微分方程式と看做すとき、此の偏微分方程式を満足する函數のシステムであるといふことである。これだけの豫備的注意の上に證明を進めよう。假定によつて今の場合財 1, 2, …, m の間では相對價格比が不變であり、此の意味で(15)が成立するが、今此の(15)を市場活動函數(12)にもちこめば、

$$(21) \quad x_i = x_i(r_{w_1}, r_{w_2}, \dots, r_{w_m}, p_{m+1}, \dots, p_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

となる。これに於て w_2, w_1, \dots, w_m は常數である。即ち、商品群 G 内部に於て相對價格が不變である場合、 w_i は(21)

$m+1$ 個の価格 p_{m+1}, \dots, p_n の函数となる。更に此の x_1, x_2, \dots, x_m を (16) にもちこめば、

$$(22) \quad G = \sum_{i=1}^m u_i(x_i, r, u_1, r, u_2, \dots, r, u_m, p_{m+1}, \dots, p_n)$$

となり、これまた $(m+1)$ 個の価格 p_{m+1}, \dots, p_n の函数であることがわかる。即ち、

$$(22') \quad G = G(r, p_{m+1}, \dots, p_n)$$

である。

以上のことが明かとなれば、(19)(20)の証明は容易である。——今(21)について x_i を r について偏微分すれば、函数の偏微分法により、

$$\frac{\partial G}{\partial r} = u_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + u_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_2} + \dots + u_m \frac{\partial x_m}{\partial p_m}$$

を得るが、先に注意した通り、市場活動函数(12)及(21)は偏微分方程式(14)を満足するから、これは書改められて

$$= -u_1 X_{1j} - u_2 X_{2j} - \dots - u_m X_{mj}$$

となり、更に X_{ij} の定義(18)によつて

$$= -X_{Gj}$$

となる。これによつて X_{Gj} を(18)の如く定義すれば、(19)が成立することが示される。全く同様にして(22')の左右兩邊を p_i について偏微分すれば(19)が得られるし、 r について偏微分すれば(20)が得られる。

以上は商品群が一個しか存在しない場合であるが、商品群が一個以上存在する場合についても同様の取扱ひが可能である。今、上記の如く1から m までの商品が群を形成する他、更に1から $m+1$ までの商品が今一つの群を形成し、その内部で相対価格が不変であり、従つて

$$p_i = r' u_i' \quad (i = m+1, m+2, \dots, m+l)$$

であるとしよう。(勿論 $m+1 \leq n$ とする。)上記によつて

$$G' = w'_{m+1} x_{m+1} + w'_{m+2} x_{m+2} + \dots + w'_{m+l} x_{m+l}$$

と置き、 G' を以て此の商品群の數量と名稱とを同時に表はし、 r' を以て商品群 G' の價格とする。次に(18)の定義によつて

$$(23) \quad \begin{aligned} X_{G'G'} &\equiv \sum_{i=1}^m u_i X_i G' = \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=m+1}^{m+l} w_j' X_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=m+1}^{m+l} u_i w_j' X_{ij} \equiv X_{G'G'} \end{aligned}$$

を得る。ところで前と同様にして、諸々の w_i 及び G_i は $(m+1) \dots (m+l)$ 個の價格 r', r', \dots, r_n の函數であるが、 G' をかくの如きものと看做して、 r' 及び r' について偏微分すれば、全く同様の手續きによつて

$$\frac{\partial G'}{\partial r'} = -X_{G'G} = -X_{G'G} = \frac{\partial G'}{\partial r'}$$

を得る。即ち、上記の(18)は i, j が商品群であつても成立つのであり、此の意味に於て吾々はその内部で相對價格の不變な商品群を單一商品と同様に取扱ふことが出来るのである。

四

以上によつて吾々が證明しようとした命題は證明された。即ち、その内部で相對價格比が不變なる商品群が與へられた場合、該商品群の數量、價格、及びそれと他の商品(又は商品群)との間の代用の項を適當に定義する場合、スルウツキイ方程式の形成に關する限り、該商品群を單一商品と同様に取扱ふことができる。換言すれば、

單一商品と同様の構造を有する市場活動函數を考へることが出来る。

さてこれまで吾々は商品群と單一商品、或は商品群と商品群との間の代用の項を單一商品相互間の代用の項を表す記號、即ち諸々の x を以て表はして來た。今迄は、商品群が單一商品と同様に取扱はれ得ることの説明が主眼であつたし、亦そこで取扱はれる商品群も少數であつたから、それでよかつた。然し、これから吾々が取扱はうとする場合は、商品群の數が増大し、且、此等多數の商品群と單一商品との間の、或は商品群相互間の代用が主役を演ずる場合である。従つてかういふ場合を處理するためには、商品群と單一商品との間の代用の項及び商品群相互間の代用の項を表はすために特別の記號を用ふるのが便宜と思ふ。此の意味に於て商品群 G と單一商品 J との間の代用の項を s_{GJ} で表はし、更に、單一商品 J と商品群 G との間の代用の項も s_{GJ} で表はすこととする。即ち、今迄 x_{GJ} 或は x_{JG} と記したものを凡て s_{GJ} と記することとする。従つて上記の (18) によつて

$$(24) \quad s_{GJ} = \sum_{j=1}^m u_j x_{GJ} = \sum_{j=1}^m u_j x_{JG}$$

であり、(19) (19') によつて

$$(25) \quad \frac{\partial x_j}{\partial r} = -s_{GJ}; \quad \frac{\partial G}{\partial r} = -s_{GJ}$$

である。(此の場合 s に附する添字のうち第一の添字が商品群に關し、第二の添字が單一商品に關することに注意されたい。) 更に同様にして商品群と商品群との間の代用の項を表はすために S を用ひることとする。即ち、前に $x_{GG'}$ で表はしたものを、即ち $\sum_{j=1}^m \sum_{j'=1}^m u_j u_{j'} x_{GG'}$ を表はすに S を以てしようとするのである。従つて此の記法を用ひると、

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -S_{GG}; \quad \frac{\partial G'}{\partial r} = \frac{\partial G}{\partial r'} = -S_{GG'}$$

である。

かくの如く吾々は、商品群と單一商品との間の、また商品群相互間の代用の項を表すために、便宜上新しい記號 s 並び S を導入する。ところで、吾々は諸々の x に關してかの六個の法則が成立することを知つてゐるが、此の x について成立する法則は、またそのまま s 及び S についても成立する。以下二三の代表的な場合を例にとつて、このことを説明しよう。

今上記の n 個の財が任意の分ち方によつて r 個の商品群に分たれたとし、商品群 I の單一商品 f に對する代用の項を s_{if} とし、商品群 I の價格を p_I とする。(かくの如く、商品群の番號を示す添字として大文字を利用し、單一商品の番號を示す小文字の添字に對照せしめる。) 然るとき、適當に定められたる n 個の常數 w_1, w_2, \dots, w_n に對して

$$(26) \quad p_I = \sum_{f=1}^r w_f s_{if}$$

が成立する。(但し、財 f は商品群 I に屬するとする。) 更に亦 s_{if} の定義によつて

$$(27) \quad s_{if} = \sum_{k=1}^n w_k x_{ik}$$

である。但しこれに於て $\sum_{k=1}^n w_k$ は商品群 I に屬する凡ての商品の番號について總和をとることを意味する。さて以上の前提の下に、 x に關する第三の法則、

$$(28) \quad \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} = 0$$

から、 s に關する法則

$$(29) \quad \sum_{i=1}^n p_i s_{ij} = 0$$

$$(30) \quad \sum_{i=1}^n p_i S_{ij} = 0$$

を導くことは容易である。先づ(28)を(26)を用ひて書改めれば、直ちに(29)を得る。また(28)を

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = 0$$

なる形に書改め、此の兩邊に w_i を乘じ、更に此の i を商品群 I に屬する凡ての番號に變へてその總和をつくれば

$$0 = \sum_{i \in I} w_i \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

を得るが、此の總和を取る順序を取らへれば、此の式の右邊は

$$= \sum_{j=1}^n p_j \sum_{i \in I} w_i x_j$$

となり、これより(27)によつて(30)が成立することが知れる。

次に商品群相互間の代用の項 S_{ij} について考へよう。上記の場合商品群 I と商品群 J との間の代用の項 S_{ij} を考へれば、定義によつて

$$S_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} w_i w_j x_{ij}$$

である。(27)及び(28)意義は上記によつて容易に類推される。今(26)と此の關係を用ひて x について成立する第四の法則

$$(31) \quad \sum_{j=1}^m p_j x_j < 0 \quad \text{for all values of } m \text{ less than } n$$

から

$$(32) \quad \sum_{i=1}^k r_i r_i' S_{ij} < 0 \quad \text{for all values of } \mu \text{ less than } \nu$$

が導き出されることを證明しよう。

今此の μ 個の商品群に含まれる單一商品の種類の數を m としよう。當然 m は n より小であるから、此の m に ついても(31)が成立つ。即ち

$$(33) \quad 0 > \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_i p_j x_{ij} = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^m p_j x_{ij}$$

である。ところでこれに於て $\sum_{i \in M} p_i x_{ij}$ は (26) により $\sum_{i \in M} r_i \sum_{j \in J} w_j x_{ij}$ であり、更に (27) により $\sum_{i \in M} r_i s_{iM}$ である。今此の結果を (33) にもちこめば、

$$(34) \quad 0 > \sum_{i \in M} p_i \sum_{j \in J} r_j s_{ij} = \sum_{i \in M} r_i \sum_{j \in J} p_j s_{ij}$$

を得る。ところでこれに於て $\sum_{i \in M} p_i s_{iM}$ は、前と同様に (26) により $\sum_{i \in M} r_i \sum_{j \in J} w_j s_{ij} = \sum_{i \in M} r_i s_{iM}$ である。いま此の結果を (34) にもちこめば

$$0 > \sum_{i \in M} r_i \sum_{j \in J} r_j s_{ij} = \sum_{i \in M} r_i r_i s_{iM}$$

を得る。これで (32) が成立つことが證明された。

かくの如くにして、 x について成立するか六個の法則が s 及び S についてもそのまま妥當することを知り得る。即ち、商品群内部に於て相對價格比が不變な場合、適當に此の商品群の數量、價格及び他の商品(又は商品群)との間の代用の項を定義する限り、此の商品群を單一商品であるかの如く看做してスルウツキイ方程式を書下すことが出来、然も此の代用の項は、單一商品のそれと同様に、かの六個の性質を満足する。此の意味に於てその内部で相對價格比の不變な商品は單一商品と同様に取扱はれ得るが、此の商品群觀點がその本來の機能を發揮するのは、動學的分析に於てである。吾々は次に企業の生産計畫の動學的分析に於て此の觀點が如何に利用されるか、かの時間的代用關係 (substitutability in time) 時間的補充關係 (complementarity in time) は解析的にどう定義されるか、また、利子歩合の變動が生産計畫に及ぼす影響に關して、かの「餘剰の傾斜」(the tilting of the surpluses) 並びに「計畫の平均期間」(the average period of the plan) の理論はどう見らるべきか、を論じなければならぬ。

(附記) 本稿は最初ヒックスの生産計畫の動學的分析特に "tilting of the surpluses" 及び "average period of the plan" の理論の論評として書き初めたものであるが、その準備として靜學的生産理論に於ける商品群觀點を詳論するうち、可成りの分量に達してしまつた。ヒックスの動學的生産理論の論評は別の機會に譲りここには、靜學的生産理論を中心とする商品群觀點の説明だけに止める次第である。