京都帝國大學經濟學會

經濟論叢

第五十八巻 第一・二號

高田博士還暦記念論文集

昭和十九年二月發行

市場均衡の安定條件

園　正　造

畏友高田保馬博士の還暦記念論文集に小論掲載の榮を得たので、題目として先づ「點數切符制度の理論的考察」を選んで見たが、紙數が制限を超過するため、之を斷念して本題の「市場均衡の安定條件」に變更した。本文の要項は一兩年前既に一部少數の人達には發表濟であるが、之を少しく補改して此の機會に一般的にすると共に、安定問題に多大の關心を有してゐられる博士の御高教を仰がんとした次第である。また他方に於て近年ヒックスの名を屢〻耳にするが、彼れの理論には批判檢討を要する所が尠くなく、從つて所說其儘には容認し難いものである。其の一例を示さんとするのも本題を採擇した理由の一つである。

市場均衡の安定性の問題は數年前、即ち神戸商大でワルラスの Eléments d'économie politique pure を讀んでゐたとき既に念頭にあつたもので、ヒックスの理論に接して甫めて之に手を觸れたものでなく、彼れと異る立場から安定條件の探求に相當努力を拂つてゐたのである。そして本文の結果に達するまでに二三のものを得たが、何れも安定と不安定との中間、即ち兩者の何れにも屬しない場合の處理方に困難を感じ、又條件の充分性について疑問が殘つた。併しこれも市場均衡の安定性が財の一次變換に對して不變なるべきことを利用するに至つて漸く氷解した。即ち得たる條件は充分性を有しなかつた。ヒックスのもの亦然りである（第八節）。そこで方針を一變して本文所說の如くにしたのである。「結論は至極簡明でたゞ安定性の定義を與へるだけならば、次に掲げる如

く何等數學の知識を要しない。但し此處では一般交換均衡の場合に止め、生産均衡の場合は他の機會に讓るが、勿論同一の方針を採用し得るものと思ふ。

さて財Xを價格の標準として、他財 $X_1\ X_2 \dots X_n$ の價格を夫々 $p_1\ p_2 \dots p_n$ とし、此等の價格に應ずる各財の需要を夫々 $D_1\ D_2 \dots D_n$、また供給を夫々 $S_1\ S_2 \dots S_n$ とする。次に各價格の微變動 $dp_1\ dp_2 \dots dp_n$ に對する需要の變動を夫々 $\varDelta D_1,\ \varDelta D_2, \dots \varDelta D_n$、供給の變動を夫々 $\varDelta S_1,\ \varDelta S_2, \dots \varDelta S_n$ とし、之に應じて變動の積の和

$$\varDelta D_1\, dp_1 + \varDelta D_2\, dp_2 + \dots\dots + \varDelta D_n\, dp_n\ [=\delta]$$

$$\varDelta S_1\, dp_1 + \varDelta S_2\, dp_2 + \dots\dots + \varDelta S_n\, dp_n\ [=\sigma]$$

を考へ、之を夫々需要及び供給に關する限界變動の積和と呼ぶこととする。さて各財の需要と供給とが一致するやうな價格に對しては市場均衡が保たれるが、若し價格が均衡價格から動けば、均衡が破れ、そして兩積和の差 $(\delta-\sigma)$ について三つの場合を生ずる。即ち價格變動の比 $dp_1 : dp_2 : \dots\dots : dp_n$ の値の如何に關せず(一)差 $(\delta-\sigma)$ が常に負なる場合、(二)差が常に正なる場合、(三)此の値の如何によつて兩積和の差が負ともなり、また正ともなる場合である。そして均衡點に變動のない限り、此等三場合の各は財の一次變換に對して不變である。即ち變換によつて甲の場合から乙の場合に移るが如きことは決してない。此の點に着目して直ちに次の定義を與へることが出來る。即ち第一の場合には市場均衡は絶對安定で、第二の場合には絶對不安定であるといひ、また第三の場合には、價格變動の比に或る種の制限を設けることによつて兩積和の差が負となるならば條件的安定で、正となるならば條件的不安定であるといふ(第十一節)。特殊の場合として甲財の價格變動に對しては安定で、乙財に對しては不安定となる如きこともあり得るのである。

更に個人均衡の安定性から價格に關する需給差の變動度

$$\frac{\partial(D_i - S_i)}{\partial p_i} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

の中に、市場均衡點に於て零とならぬものが必ず存在することとなり(第十六節)、從つて兩積和の差が價格の增分(微變動)に關する二次形式

$$\sum_{i,j} \frac{\partial(D_i - S_i)}{\partial p_j} dp_i dp_j \qquad i, j = 1, 2, \ldots n$$

と、市場均衡點に於て同符號を取ることとなる。故にこの式が負定形ならば均衡は絕對安定で、正定形ならば絕對不安定である。本文では之を以て定義とした(第十節)。そして之より容易にヒックスの安定條件が導かれ(第十七節)、從つて彼れのものは必要性を有するが、既述の如く充分性を有しないことが知られる。特に一財の場合には均衡の安定不安定は需給差の變動度(價格に關する)が負なるか、正なるかによつて定まり、ワルラスの與へた定義と一致することとなる。

本文では右の結果に達する徑路を明かにすると共に二三の例を擧げて定義の常識的考察の資料に供した。なほ財の變換に就いてはたゞ安定條件の批判に必要なる程度に止めず、後の利便をも慮つて若干の變換公式をも載せておいた。從つて本文全體としては財の變換と安定條件との二篇を併記したかの如き觀を呈するに至つた。此の點讀者諸賢の御諒察を乞ふ次第である。

財の一次變換

一、財の合成、一次變換

若干個の財を、數量の比が一定なるやうにとり、夫れを一括して一つの財と考へたとき、之を**合成財** (composite commodity) といひ、之に對して元のものを**原財** (primitive commodity) と呼ぶ。

いまn個の財

(1)　$X_1, X_2, \cdots X_n$

があるとし、其の數量を夫々 $x_1 x_2 \cdots x_n$ とする。之に對して行列式の零でない母式(行列)

(2)　$(a_{ij}) \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots n$

を考へ、財(1)を原財として、數量の比が

$$a_{i1} : a_{i2} : \cdots : a_{in}$$

に等しい合成財を作り、之をY_iにて示し、そしてこれの單位として原財の量が夫々 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{in}$ なるものを取る。然るとき母式(2)からn個の合成財

(3)　$Y_1, Y_2, \cdots Y_n$

を得、そして此等の數量 $y_1, y_2, \cdots y_n$ と原財の數量との間に次の關係を生ずる。

(4)　$x_j = a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \cdots + a_{nj} y_n \quad (j = 1, 2, \cdots n)$

之について取扱ひの便宜上

$$a_{jk} = a'_{kj} \quad \left.\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots n$$

とおくことがある。かくすれば(4)は

$$(5)\quad x_j = a'_{j1} y_1 + a'_{j2} y_2 + \cdots + a'_{jn} y_n \quad (j = 1, 2, \cdots n)$$

となる。このやうにして合成財を作ることを母式(2)によつて財(1)を變換するといひ、之によつて得たる財(3)を(1)の**變換財**と呼ぶ。

次に財(1)の外に標準財Xをとり、これによる(1)の價格を夫々 $p_1, p_2, \cdots p_n$ とすれば、變換財(3)の價格 $q_1, q_2, \cdots q_n$ は

$$(6)\quad q_i = a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + \cdots + a_{in} p_n \quad (i = 1, 2. \cdots n)$$

となる。更に之と(4)とにより次の關係を生ずる。

$$(7)\quad \sum_j p_j x_j = \sum_{i,j} p_j a_{ij} y_i = \sum_i q_i y_i$$

$$(8)\quad \sum_j p_j dx_j = \sum_i q_i dy_i$$

こゝに dx_j, dy_i は夫々 x_j, y_i の無限小増分を示す。

假說により母式(2)の行列式は零でない故、その逆が必ず存在する、之を

$$(9)\quad (b_{ij}) \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots n$$

とすれば、(4)より

$$(10)\quad y_i = b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \cdots + b_{in} x_n \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

となり、財(1)は母式(9)による財(3)の變換である。そして(6)より

$$(11)\quad p_j = b_{j1} q_1 + b_{j2} q_2 + \cdots + b_{jn} p_n \quad (j = 1, 2, \cdots n)$$

を得る。要するに財の變換はn個の財をn個の組に分つもので、財全體として見るとき各財の數量に變化を生じない。

二、置換率その他の關係

變換財の取扱ひに便宜のために標準財をYにて、その數量xをyにて表はす。いま $\varphi(x, x_1, \dots x_n)$ を標準財X及び財(1)に對する一個人の選擇函數とし、之に(4)を代入したものをψ、即ち

$$(12)\quad \varphi(x, x_1, \dots x_n) = \varphi\left(y, \sum_k a'_{1k} y_k, \dots \sum_k a'_{nk} y_k\right) = \psi(y, y_1, \dots y_n)$$

とおけば、ψは明かに標準財及び變換財(3)に對する選擇函數を表はす。いま兩函數より得べき置換率その他の關係を示すために、先づ次の記號を設ける。

$$\varphi_o = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\quad (i, j = 1, 2, \dots n)$$

$$\varphi_{oo} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},\quad \varphi_{oj} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x_j},\quad \varphi_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$P_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_o},\quad P_{io} = \frac{\partial P_i}{\partial x},\quad P_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}$$

$$\psi_o = \frac{\partial \psi}{\partial y},\quad \psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i}$$

$$\psi_{oo} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},\quad \psi_{oj} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y_j},\quad \psi_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_i \partial y_j}$$

$$Q_i = \frac{\psi_i}{\psi_o},\quad Q_{io} = \frac{\partial Q_i}{\partial y},\quad Q_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial y_j}$$

然るとき上記より直ちに

$$(13)\quad \begin{cases} \psi_0 = \varphi_0 \\ \psi_i = \sum_j{}' \varphi_j \dfrac{\partial x_j}{\partial y_i} = \sum_j a_{ij}\,\varphi_j \end{cases}$$

$$(14)\quad Q_i = \sum_j a_{ij}\,P_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots\ n)$$

これと(4)とより

$$(15)\quad \sum_j P_j\,dx_j = \sum_{j,k} a_{kj}\,P_j\,dy_k = \sum_k Q_k\,dy_k$$

$$(16)\quad \frac{d\varphi}{\varphi_0} = \frac{d\psi}{\psi_0} \quad (\text{第十三節參照})$$

を得、また(15)と(8)とより

$$\sum_j (P_j - p_j)\,dx_j = \sum_j (Q_j - q_j)\,dy_j$$

を得る。これデュプイの第二の意味に於ける限界相對效用（註）が財の變換に對して不變なることを示す。

次に　$\psi_{00} = \varphi_{00}$

$$(17)\quad \psi_{0i} = \sum_j \varphi_{0j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \sum_j a_{ij}\,\varphi_{0j} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots\ n)$$

$$(18)\quad \psi_{il} = \sum_{j,k} a_{ij}\,\varphi_{jk}\frac{\partial x_k}{\partial y_l} = \sum_{j,k} a_{ij}\,\varphi_{jk}\,a'_{kl} \quad \left.\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}\right\} = 1,\ 2,\ \cdots\ n$$

$$(19)\quad Q_{i0} = \sum_j a_{ij}\,P_{j0} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots\ n)$$

$$(20)\quad Q_{il} = \sum_{j,k} a_{ij}\,P_{jk}\frac{\partial x_k}{\partial y_l} = \sum_{j,k} a_{ij}\,P_{jk}\,a'_{kl} \quad \left.\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}\right\} = 1,\ 2,\ \cdots\ n$$

そして(19)(20)より

$$(21)\quad Q_{il} - Q_{i0}\,Q_l = \sum_{j,k} a_{ij}\,(P_{jk} - P_{j0}\,P_k)\,a'_{kl}$$

註　本誌第五七卷第六號、拙著「選擇理論の立場から見たるデュプイの相對效用について」參照

從つて二つの母式

$$(P_{ij} - P_{io}P_{j}),\quad (Q_{ij} - Q_{io}Q_{j}) \qquad \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\Big\} = 1, 2, \cdots n$$

の間に次の關係がある。

$$(22)\quad (Q_{ij} - Q_{io}Q_{j}) = (a_{ij})(P_{jk} - P_{jo}P_{k})(a'_{kl})$$

更に(21)と(5)とより

$$(23)\quad \sum_{ij}(P_{ij} - P_{io}P_{j})dx_i\,dx_j = \sum_{ij}(Q_{ij} - Q_{io}Q_{j})dy_i\,dy_j$$

を得る。これ原財についての無差別面が、その一點に於て負楕圓的ならば、此の性質は變換に對して不變なることを示す。

なほ(14)(19)より

$$P_{io} = \mu P_i \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

ならば

$$Q_{io} = \mu Q_i \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

となり、逆も亦成立する。卽ち標準財から他財が分離可能ならば、これに變換を行ふても亦同樣で、且つ標準に對する他財の置換率の變動率 μ も亦變換に對して不變である(註)。

三、比例變動

財の數量 $x_o, x_1, \cdots x_n$ が限界選擇度の比

$$(24)\quad \varphi_o : \varphi_1 : \cdots : \varphi_n$$

を變じないやうに變動するとき、之を財量の**比例變動**と稱へる。幾何學的に財量は n+1 次元の空間に於ける點

註　分離可能財については次の論文を參照せられたい。
拙著「價格變動に伴ふ分離可能財の需給變動」、國民經濟雜誌第七十四卷第三號。

の坐標を表はすものと見るとき、この變動を點の**比例移動**と呼ぶ。

原財の數量が比例變動をなすとき、之に對應する變換財の數量も亦、下に示す如く、比例變動をなす。之を換言するに、比例移動によつて一つの點の描く曲線、即ちヒックスの所謂所得消費線は變換によつて其の比例的性質を失はない。

さて變動が無限小の場合には、比例變動に對する條件は明かに

$$\frac{d\varphi_0}{\varphi_0} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_1} = \cdots = \frac{d\varphi_n}{\varphi_n}$$

となる。この比の値をdtにて示し、この場合に於ける變換財に關する限界選擇度の變化を見るに、

$$d\psi_0 = \psi_{00}\,dy + \sum_l{}' \psi_{0l}\,dy_l \quad (l = 1, 2, \cdots n)$$

$$= \varphi_{00}\,dx + \sum_{j,l}{}' a_{lj}\,\varphi_{0l}\,dy_l = \varphi_{00}\,dx + \sum_j{}' \varphi_{0j}\,dx_j = d\varphi_0 = \varphi_0\,dt = \psi_0\,dt$$

$$d\psi_i = \psi_{i0}\,dy + \sum_l{}' \psi_{il}\,dy_l$$

$$= \sum_j{}' a_{ij}\,\varphi_{0j}\,dx + \sum_{j,k,l}{}' a_{ij}\,\varphi_{jk}\,a'_{kl}\,dy_l = \sum_j{}' a_{ij}\,\varphi_{0j}\,dx + \sum_{j,k}{}' a_{ij}\,\varphi_{jk}\,dx_k$$

$$= \sum_j{}' a_{ij}(\varphi_{j0}\,dx + \sum_k{}' \varphi_{jk}\,dx_k) = \sum_j{}' a_{ij}\,d\varphi_j = \sum_j a_{ij}\,\varphi_j\,dt = \psi_i\,dt$$

$$\therefore \quad \frac{d\psi_0}{\psi_0} = \frac{d\psi_1}{\psi_1} = \cdots = \frac{d\psi_n}{\psi_n} = dt$$

即ち變換財についても變動は比例的である。

四、個人均衡

個人の初期所有量（財 X, X_1, … X_n の）を a, a_1, … a_n とする。Xを標準財としての他財の價格を從前通り

$p_1, p_2 \cdots p_n$ とすれば、個人交換均衡點は方程式

(25) $x - \alpha + p_1(x_1 - \alpha_1) + \cdots + p_n(x_n - \alpha_n) = 0$

(26) $P_i = p_i'$ $(i = 1, 2, \cdots n)$

によつて決定される。いま初期量に應ずる變換財の量を $\beta, \beta_1, \cdots \beta_n$ とすれば、(4)より

(27) $\alpha = \beta, \quad \alpha_j = \sum_k a'_{jk}\beta_k$ $(j = 1, 2, \cdots n)$

從つて

$\sum_j p_j \alpha_j = \sum_j q_j \beta_j$ $(j = 1, 2, \cdots n)$

である。これと(7)とにより方程式(25)から方程式

(28) $y - \beta + q_1(y_1 - \beta_1) + \cdots + q_n(y_n - \beta_n) = 0$

が從ひ、逆に之より(25)を得る。また(6)(14)により(26)から方程式

(29) $Q_i = q_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$

を得、逆に之より(26)を得る（母式(2)の列行式が零でない故）。依つて(6)(4)(27)の關係が滿される限り、原財の價格を與へやうと、變換財の方を與へやうと何れからするも均衡點に變更を生じない。即ち均衡點は變換によつても亦均衡點である。且つ(23)により個人均衡の安定性をも失はない。

更に均衡點に於て(6)(4)から直ちに次の關係を得る。

(30) $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} = \sum_j a'_{ij}\frac{\partial y_j}{\partial \beta}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$

(31) $\frac{\partial x_i}{\partial p_l} = \sum_{j,k} a'_{ij}\frac{\partial y_j}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = \sum_{j,k} a'_{ij}\frac{\partial y_j}{\partial q_k}a_{kl}$

(32) $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_l}\right) = (a'_{ij})\left(\frac{\partial y_j}{\partial q_k}\right)(a_{kl})$ 「母式の關係を示す」

(33) $\sum_{i,l}\frac{\partial x_i}{\partial p_l}\,dp_i\,dp_l = \sum_{j,k}\frac{\partial y_j}{\partial q_k}\,dq_j\,dq_k$

何となれば　左邊 $= \sum_{i,j,k,l} a'_{ij}\frac{\partial y_j}{\partial q_k}a_{kl}\,dp_i\,dp_l =$ 右邊

また均衡量を價格の函數と考へて、(25)(28)より夫々

$$dx + \sum_j p_j\,dx_j + \sum_j (x_j - \alpha_j)\,dp_j = 0$$

$$dy + \sum_j q_j\,dy_j + \sum_j (y_j - \beta_j)\,dq_j = 0$$

之に夫々(26)(29)を代入して

(34) $\frac{d\varphi}{\varphi_0} = -\sum_i (x_i - \alpha_i)\,dp_i,\quad \frac{d\psi}{\psi_0} = -\sum_j (y_j - \beta_j)\,dq_j$

を得る。いま原財について均衡量は價格の函數で、價格は互に獨立であると考へて、$d\varphi/\varphi_0$ の微分を取り、また變換財についても同樣の考へにて $d\psi/\psi_0$ の微分を取れば

(35) $d\left(\frac{d\varphi}{\varphi_0}\right) = -\sum_{i,l}\frac{\partial x_i}{\partial p_l}\,dp_i\,dp_l,\quad d\left(\frac{d\psi}{\psi_0}\right) = -\sum_{j,k}\frac{\partial y_j}{\partial q_k}\,dq_j\,dq_k$

を得る。そして之に(33)を適すれば

(36) $d\left(\frac{d\varphi}{\varphi_0}\right) = d\left(\frac{d\psi}{\psi_0}\right)$

となる。これ第十二節に說く標準財的限界利得の變動が變換に對して不變なることを示すものである。

五、スルツキー方程式の變換

前節の均衡に於てスルツキー方程式は、原財について

(37) $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} = -(x_j - \alpha_j)\dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \dfrac{H_{ij}}{H}$

(38) $\dfrac{\partial x}{\partial p_j} = -(x_j - \alpha_j)\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - \dfrac{1}{H}\sum_i p_i H_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots n)$

で、變換財に關しては

(39) $\dfrac{\partial y_i}{\partial q_j} = -(y_j - \beta_j)\dfrac{\partial y_i}{\partial \beta} + \dfrac{K_{ij}}{K}$

(40) $\dfrac{\partial y}{\partial q_j} = -(y_j - \beta_j)\dfrac{\partial y}{\partial \beta} - \dfrac{1}{K}\sum_i q_i K_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots n)$

である。こゝにＨＫは次の行列式を表はし、H_{ij}, K_{ij} は夫々ＨＫの第 i 行、第 j 列の要素の餘因數を示す。

(41) $H = |P_{ij} - P_{io} p_j|; \quad K = |Q_{ij} - Q_{io} q_j| \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots n$

そして均衡點に於て $P_j = p_j$, $Q_j = q_j$ なる故、(22) によりＨＫの間に次の關係がある。

(42) $K = \Lambda H \Lambda' = \Lambda^2 H, \quad \Lambda = |a_{ij}|, \quad \Lambda' = |a'_{ij}|$

さて計算によつて容易に知られる如く、母式 $(P_{ij} - P_{io} P_j)$ は對稱的である。然るに對稱母式は直角母式によつて之を倍乘母式に變換することが出來る。故に (a_{ij}) としてかゝる直角母式を選べば、この場合 (a'_{ij}) は (a_{ij}) の逆となる故、(22) により

$$(Q_{ij} - Q_{io} Q_j) = (a_{ij}).(P_{ij} - P_{io} P_j)(a_{ij})^{-1} = (\rho_i e_{ij})$$

從つて

$$K = |\rho_i e_{ij}| \quad [e_{ii} = 1,\ e_{ij} = o(i \neq j)]$$

となり、そしてスルツキー方程式(39)(40)は次の形をとる。

$$
(43)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial y_i}{\partial q_i} = -(y_i-\beta_i)\dfrac{\partial y_i}{\partial \beta}+\dfrac{1}{\rho_i} \\[2ex]
\dfrac{\partial y_i}{\partial q_j} = -(y_j-\beta_j)\dfrac{\partial y_i}{\partial \beta} \qquad (i \neq j) \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial q_i} = -(y_i-\beta_i)\dfrac{\partial y}{\partial \beta}-\dfrac{q_i}{\rho_i}
\end{cases}
$$

即ち價格變動の財と標準財とについてのみ置換項が存し、他財には之を缺くこととなる。

上に於て均衡が安定ならば、(23)の左邊は $dx_1, dx_2, \dots dx_n$ について負定二次形式であり、從つて $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ は總て負數となる。なほ直角母式の要素の中には必ず負數が混入し、從つて負量の財を取扱ふこととなるが、此れは金錢について屡なされる如くすれば至極容易である。また負數の價格は物品の受授に添附すべき金額と解すればよく、汚物塵芥殘滓は負價格を取り得る簡單なる一例である。

六、集團の場合

各財の價格は勿論その他の記號も從前通りとするが、たゞ第r人に關するものなることを示すためには各記號に指數(r)を附す、即ち

財	價格	第r人の初期量	第r人の中間量又は均衡量
X	1	$\alpha^{(r)}$	$x^{(r)}$
X_1	p_1	$\alpha_1^{(r)}$	$x_1^{(r)}$
X_2	p_2	$\alpha_2^{(r)}$	$x_2^{(r)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_n	p_n	$\alpha_n^{(r)}$	$x_n^{(r)}$

$$x^{(r)} = y^{(r)} \qquad \alpha^{(r)} = \beta^{(r)}$$

$$x_j^{(r)} = \sum_k a'_{jk}\, y_k^{(r)} \qquad \alpha_j^{(r)} = \sum_k a'_{jk}\, \beta_k^{(r)} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots\ n)$$

また第 r 人の選擇函數は原財について $\varphi^{(r)}(x^{(r)},\ x_1^{(r)},\ \cdots\ x_n^{(r)})$ とし、變換財について

$$\psi^{(r)}(y^{(r)},\ y_1^{(r)},\ \cdots\ y_n^{(r)}) = \varphi^{(r)}(x^{(r)},\ \sum_k a'_{1k}\, y_k^{(r)},\ \cdots\ \sum_k a'_{nk}\, y_k^{(r)})$$

とする。但し任意の個人を指す場合には指數を除く。更に各人の均衡量、初期量等の和を次のやうに示す。

$$X = \sum x = \sum_r x^{(r)} \qquad A = \sum \alpha = \sum_r \alpha^{(r)}$$

$$X_j = \sum x_j = \sum_r x_j^{(r)} \qquad A_j = \sum \alpha_j = \sum_r \alpha_j^{(r)}$$

$$Y = \sum y = \sum_r y^{(r)} \qquad B = \sum \beta = \sum_r \beta^{(r)}$$

$$Y_j = \sum y_j = \sum_r y_j^{(r)} \qquad B_j = \sum \beta_j = \sum_r \beta_j^{(r)}$$

$$d\Phi = \sum \frac{d\varphi}{\varphi_0} = \sum_r \frac{d\varphi^{(r)}}{\varphi_0^{(r)}} \qquad d^2\Phi = \sum d\left(\frac{d\varphi}{\varphi_0}\right)$$

$$d\Psi = \sum \frac{d\psi}{\psi_0} = \sum_r \frac{d\psi^{(r)}}{\psi_0^{(r)}} \qquad d^2\Psi = \sum d\left(\frac{d\psi}{\psi_0}\right)$$

但し $d^2\Phi$, $d^2\Psi$ は微分學に於て通常使用せられるものと稍意義を異にする(等式(35)參照)。

此等均衡量の和について(25)(28)より

$$(44) \quad X - A + p_1(X_1 - A_1) + \cdots + p_n(X_n - A_n) = 0.$$

$$(45) \quad Y - B + q_1(Y_1 - B_1) + \cdots + q_n(Y_n - B_n) = 0.$$

また(34)(35)(16)より

$$(46)\quad d\Phi = -\sum_{i}(X_i - A_i)\,dp_i, \qquad d\Psi = -\sum_{j}(Y_j - B_j)\,dq_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots\ n)$$

$$(47)\quad d^2\Phi = -\sum_{i,l}\frac{\partial X_i}{\partial p_l}\,dp_i\,dp_l, \qquad d^2\Psi = -\sum_{j,k}\frac{\partial Y_j}{\partial q_k}\,dq_j\,dq_k \quad (i,\ j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \cdots\ n)$$

但し(47)は(35)に於ける如く、價格が互に獨立としてである。そして(36)より

$$(48)\quad d\Phi = d\Psi,\ d^2\Phi = d^2\Psi$$

を得る。また(10)より

$$(49)\quad Y_l - B_l = \sum_{j} b_{jl}(X_j - A_j) \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots\ n)$$

こゝに　$(b_{ij}) = (a_{ij})^{-1}$

特に市場均衡點に於ては

$$(50)\quad X = A,\ X_1 = A_1,\ \cdots\ X_n = A_n,\ \text{從つて}\ d\Phi = 0$$

であり、これと(49)とから

$$(51)\quad Y = B,\ Y_1 = B_1,\ \cdots\ Y_n = B_n,\ \text{從つて}\ d\Psi = 0$$

となる。卽ち原財について市場均衡が成り立つとき、變換財についても亦成立する。

七、變動度の變換公式

先づ(32)より集團均衡量の變動度を要素とする母式について

$$(52)\quad \left(\frac{\partial X_i}{\partial p_l}\right) = (a'_{ij})\left(\frac{\partial Y_j}{\partial q_k}\right)(a_{kl})$$

そして前節の如く (b_{ij}) を (a_{ij}) の逆とすれば

$$(a'_{ij})^{-1} = (b'_{ij}),\quad b'_{ij} = b_{ji}$$

なる故、(52) より

$$(53)\quad \left(\frac{\partial Y_i}{\partial q_l}\right) = (b'_{ij})\left(\frac{\partial X_j}{\partial p_k}\right)(b_{kl})$$

$$(54)\quad \frac{\partial Y_i}{\partial q_l} = \sum_{kj} b'_{ij}\frac{\partial X_j}{\partial p_k} b_{kl}$$

を得る、また

$$(55)\quad s_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_j}{\partial p_k} + \frac{\partial X_k}{\partial p_j}\right),\quad t_{il} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial Y_l}{\partial q_i}\right)$$

とおけば母式 (s_{jk}), (t_{il}) は夫々二次形式

$-d^2\Phi(dp_1, \dots dp_n$ に關する$)$, $-d^2\Psi(dq_1, \dots dq_n$ に關する$)$

に屬する母式である。そして(53)より

$$(56)\quad (t_{il}) = (b'_{ij})(s_{jk})(b_{kl})$$

となる。何となれば

$$\sum_{jk} b'_{ij} s_{jk} b_{kl} = \frac{1}{2}\sum_{jk} b'_{ij}\frac{\partial X_j}{\partial p_k} b_{kl} + \frac{1}{2}\sum_{jk} b'_{ij}\frac{\partial X_k}{\partial p_j} b_{kl} = \frac{1}{2}\sum_{jk} b'_{ij}\frac{\partial X_j}{\partial p_k} b_{kl} + \frac{1}{2}\sum_{jk} b'_{lk}\frac{\partial X_k}{\partial p_j} b_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial Y_l}{\partial q_i}\right) = t_{il}$$

八、市場均衡點に於ける特殊の變換

先づ原財の價格 $p_1, p_2, \dots p_n$ に市場均衡價格を與へる。母式 (s_{jk}) は對稱的なる故、第五節の所説と同樣に (b_{kl}) として適當なる直角母式を選べば、(t_{il}) は倍乘母式となる。即ち

(57) $(\epsilon_{ij}) = (\sigma_i e_{ij})$ 　$[e_{ii}=1,\ e_{ij}=0\ (i \neq j)]$

そして(55)により

(58) $\dfrac{\partial Y_i}{\partial q_i} = \sigma_i, \quad \dfrac{\partial Y_i}{\partial q_j} + \dfrac{\partial Y_j}{\partial q_i} = 0 \quad (i \neq j)$

従つて

(59) $d^2\psi = -\sum_i \sigma_i dq_i^2 = -\sum_i \dfrac{\partial Y_i}{\partial q_i} dq_i^2 \quad (i=1, 2, \dots n)$

この式は(48)により $d^2\Phi$ に等しい。故に $d^2\Phi$ が定形式ならば、$\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ は總て同符號を取るが、之に反して不定形式ならば此等の中に正のものと負のものとが混在する。これによつて見るに、$d^2\Phi$ が不定形式の場合には

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_1}, \frac{\partial X_2}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial X_n}{\partial p_n}$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial q_1}, \frac{\partial Y_2}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial Y_n}{\partial q_n}$$

が總て負であつても、適當に變換すれば(上の如き特殊のものに限らずとも)の中に正のものが混入するやうになる。例へば

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_1} = -1, \quad \frac{\partial X_1}{\partial p_2} = 3, \quad \frac{\partial X_2}{\partial p_1} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial p_2} = -1$$

のとき、$d^2\Phi = -dp_1^2 + \frac{5}{2} dp_1 dp_2 - dp_2^2$

となり、不定形である。そして

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

故に變換　$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2$

を行へば　$\frac{\partial Y_1}{\partial q_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial q_2} = -1$

となり前者は正數である。

なほ本節の所說は財 $X_1, X_2, \ldots X_n$ に對してヒックスの市場安定條件が滿されるとも、變換財 $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ に對しては滿されないことが起ることを明かにするものである。卽ちヒックスの條件は決して充分と言ひ得ない。後に示す如く單に必要條件たるに止るものである。

市場均衡の安定性

九、市場均衡の三種

財(1)の價格 $(p_1, p_2, \ldots p_n)$ はn次元空間の點の坐標を表はすものと見て、市場均衡點（卽ち市場均衡價格を坐標とする點）を通る連續曲線Γを考へ、これの助變數表示を

(60)　$p_1 = f_1(t), \quad p_2 = f_2(t), \quad \ldots p_n = f_n(t)$

とする。但し市場均衡點を $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots \bar{p}_n)$ とし、

$\bar{p}_1 = f_1(o), \quad \bar{p}_2 = f_2(o), \quad \ldots \quad \bar{p}_n = f_n(o)$

とする。且つ $f_i(t)$ は逐次微分可能であるとし、市場均衡點（之をEにて示す）に於ける微分係數

$f_1'(o), \quad f_2'(o), \quad \ldots\ldots f_n'(o)$

は點Eに於けるΓの切線の方向係數を表はすやうに助變數を定める。從つて此等の微分係數の少く共一つは零で

ない。次に $x_1, x_2, \cdots x_n$ は價格 $p_1, p_2, \cdots p_n$ に對する財の個人均衡量を表はすものとすれば、此等は價格の函數、從つて t の函數である。從つて個人均衡量の和 X_i はまた同樣に t の函數となる。依つて市場均衡點から曲線 Γ 上の任意の一點 P ($p_1, p_2, \cdots p_n$) に至る線積分（Γ に沿ふての）

$$-\int_E^P \sum_i (X_i - A_i)dp_i \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

を考へることが出來る。之を G(t) にて表はす。即ち

$$(61) \quad G(t) = -\int_E^P \sum_i (X_i - A_i)dp_i = -\int_0^t \sum_i \xi_i(t)\pi_i'(t)dt$$

こゝに　$\xi_i(t) = X_i - A_i \qquad (i=1, 2, \cdots n)$

そして之より

$$(62) \quad dG = -\sum_i (X_i - A_i)\,dp_i \quad [=d\Phi]$$

然るに市場均衡點 (t=0) に於て　$X_i = A_i$ $(i=1, 2, \cdots n)$

故に此の點に於て　　$dG=0$

である。從つて均衡點Eに於けるGの値に對して三つの場合を生ずる。即ちtの任意の無限小增分に對してGの增分が、(i)正なるときGは極小、(ii)負なるときGは極大となり、(iii)正負不定のときGは極小とも極大ともならぬ

是に於て市場均衡について其の性質を次の三種に大別することが出來る。即ち本節冒頭の條件に適する任意の曲線 Γ に對してGが市場均衡點に於て

（一）極小となる場合

（二）極大となる場合

(三)右の何れにも屬しないもの、例へば一つの曲線についてGが極小とも極大ともならぬ場合、又は一つの曲線については極小となるが、他の曲線については極大となる如き場合である。

十、安定性の定義と其の條件

前節の三場合に對する條件を求めるために G(t) の第二微分を取れば

$$(63)\quad d^2G=-\sum_{ij}\frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_i dp_j-\sum_i(X_i-A_i)d^2p_i \qquad i, j=1, 2, \dots n$$

そして市場均衡點に於て

$$(64)\quad d^2G=-\sum_{ij}\frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_i dp_j \qquad [=d^2\theta]$$

となる。第十六節末に注意する如く、變動度 $\frac{\partial X_i}{\partial p_j}$ の總てが零となる如きことは決してない。

また　　$dp_1 : dp_2 : \dots : dp_n$

は均衡點Eに於ける曲線Γの切線の方向比を表はす。故にΓを適當に取れば、この比に任意の値を取らしめることが出來る。依つて任意の曲線Γについて、市場均衡點に於てGが極小となるためには、(64)の右邊が $dp_1, dp_2, \dots dp_n$ に關する正定二次形式なるを要し、また極大となるためには負定形なるを要し、そして之れ以外の場合には不定形なるを要する。逆に(64)の右邊が正定形なるか、負定形なるか、又は不定形なるかに從つて夫々第一、第二、第三の場合を生ずる。何となれば前節冒頭の假設により $dp_1, dp_2, \dots dp_n$ の中の少くとも一つは均衡點に於て零でないからである。依つて第一の場合に對する必要充分條件は、(55)の記號を用ひて、市場均衡點に於て

$$(65)\quad s_{11}<0,\quad \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}<0,\ \cdots$$

で、第二の場合に對するものは次の如くである。

$$(66)\quad s_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}>0,\ \cdots$$

さて價格の增分 $dp_1, dp_2, \cdots dp_n$ に關する二次形式

$$\sum_{ij}\frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_i dp_j \qquad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\}=1, 2, \cdots n$$

は、(48)より知られる如く、財の變換に對して不變である。價格の增分を獨立變數として、この二次式が市場均衡點に於て負定形ならば、この均衡は**絕對安定** (absolutely stable) で、正定形ならば**絕對不安定** (absolutely unstable) であるといふ。そして之に對する必要充分條件は夫々(65)(66)にて與へられる。

なほ右の二次形式に於て價格變動を互に獨立とすれば、定形とならぬが、價格の變動に對して或る種の制限を設ければ、二次式が常に負、又は常に正となることがある。この場合に前者は**條件的安定** (conditionally stable) で、後者は**條件的不安定** (conditionally unstable) であると稱へる。例へば或る種の商品だけを切り離して考へれば安定で、他のものをも含めれば安定とならぬこともあり得る。

十一、需給に關する限界變動の積和

價格 $p_1, p_2, \cdots p_n$ の交換に於て財X_iに對する個人需要の總和をD_iにて、個人供給の總和をS_iにて表はす。次に價格の微變動 $dp_1, dp_2, \cdots dp_n$ に對する需要の變動を夫々 $\varDelta D_1, \varDelta D_2, \cdots \varDelta D_n$, 供給の變動を夫々 $\varDelta S_1, \varDelta S_2, \cdots \varDelta S_n$ とし、之に應じて變動の積の和

$$\varDelta D_1 dp_1 + \varDelta D_2 dp_2 + \cdots + \varDelta D_n dp_n \quad [=\delta]$$

$$\varDelta S_1 dp_1 + \varDelta S_2 dp_2 + \cdots + \varDelta S_n dp_n \quad [=\sigma]$$

を考へ、之を夫々需要及び供給に關する**限界變動の積和**と呼ぶこととする。然るとき兩者の差は明かに

$$(67)\quad \delta - \sigma = \sum_i \varDelta (X_i - A_i)\, dp_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

で、これは財の變換に對して不變である。何となれば(4)(27)(11)より

$$X_i - A_i = \sum_j a_{ji} (Y_j - B_j) \quad \therefore \quad \varDelta (X_i - A_i) = \sum_j a_{ji} \varDelta (Y_j - B_j)$$

$$dp_i = \sum_k b_{ik}\, dq_k \qquad \text{こゝに} \quad (a_{ij})(b_{ij}) = (e_{ij})$$

故に $\quad \delta - \sigma = \sum_{i,j,k} a_{ji} b_{ik} \varDelta (Y_j - B_j)\, dq_k = \sum_{j,k} e_{jk} \varDelta (Y_j - B_j)\, dq_k = \sum \varDelta (Y_j - B_j)\, dq_j$

となるからである。

兩積和の差と安定性との關係を見るに、

$$\varDelta (X_i - A_i) = \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j} dp_j + O^{(2)}$$

そして之より

$$(68)\quad \delta - \sigma = \sum_{i,j} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} dp_i\, dp_j + O^{(3)}$$

こゝに $O^{(2)}, O^{(3)}$ は夫々第二、第三位以上の無限小を表はす。依つて積和の差は市場均衡點が安定ならば負で、不安定ならば正である。逆に價格の微變動 $dp_1, dp_2, \cdots dp_n$ の比の値如何にかゝはらず、差 $(\sigma'-\sigma)$ が負ならば市場均衡は絶對安定で、正ならば絶對不安定である。依つて市場均衡の絶對安定、絶對不安定は積和の差の負と正とを以てすることが出來る。序文には之を載せておいたのである。

なほ $n=1$ のとき安定條件は

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_1}<0,\quad 即ち\quad \frac{\partial(D_1-S_1)}{\partial p_1}<0$$

となりワルラスの與へたものと一致する。

十二、第九第十兩節の所說は單に論理的に市場均衡を三種に大別し、夫れに安定不安定の定義を與へたものに過ぎぬが、いま之に就いて一つの說明を試みやうと思ふ。之に同意を表し難い人もあらうが、市場均衡につき三場合の生起は之を否定することが出來ない。

個人選擇函數 φ について

$$\frac{d\varphi}{\varphi_0}\quad [=dx+P_1dx_1+\cdots+P_ndx_n]$$

は函數の選び方に對して不變なるのみならず、財の變換に對しても亦不變である(第二節(16)參照)。そして括弧內の第二項以下の和は、デュプイの思想を稍變更して多財の場合に擴張すれば、財Xを測定の尺度としての他財の限界效用、卽ち財の所有量が $x, x_1, \cdots x_n$ のとき、財 $X_1, X_2, \cdots X_n$ を夫々 $dx_1, dx_2, \cdots dx_n$ だけ獲得するために、拂渡しても差支へないとする財Xの量を表はすものである(註)。そして $d\varphi/\varphi_0$ は之と標準財の增分との和である。故に $d\varphi/\varphi_0$ は財の所有量の變動 $dx, dx_1, \cdots dx_n$ に伴つて生ずる個人の主觀的利得を標準財で測つたものと

註　前掲拙著デュプイの相對效用參照

見ることが出來る。之を標準財的限界利得と假稱する(註)。

いま $dx, dx_1, \cdots dx_n$ は所與價格の均衡點に於て價格の微變動 $dp_1, dp_2, \cdots dp_n$ に對する個人均衡量の變動量(但し無限小の主部)を表はすものとすれば、$d\varphi/\varphi_0$ はこの價格變動によつて生ずる限界利得である。そして此の場合

$$dx+p_1dx_1+\cdots+p_ndx_n+(x_1-a_1)dp_1+\cdots+(x_n-a_n)dp_n=0,\quad P_i=p_i\quad(i=1,2,\cdots n)$$

なることから

$$\frac{d\varphi}{\varphi_0}=-\sum_i(x_i-a_i)\,dp_i\qquad(i=1,2,\cdots n)$$

となる。前節の價格空間に於て點Aから點Bまで一つの曲線に沿ふて價格が變動すれば、それによつて個人の受ける利得は線積分 $\int_A^B\frac{d\varphi}{\varphi_0}$ である。但し曲線上の各點に於ける限界利得は其の點に於ける標準財を尺度として測るものとする。此の利得は正數のこともあれば、また負數のこともある。正ならば主觀的に利益を得たもので、負ならば損失を蒙つたものである。

市場均衡點 $\bar{P}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \cdots \bar{p}_n)$ から出發して前々節の曲線Γに沿ふて點 $P(p_1, p_2, \cdots p_n)$ まで價格變動したとすれば、之によつて得る個人利得は

$$\int_{\bar{P}}^{P}\frac{d\varphi}{\varphi_0}=-\int_0^t\sum_i(x_i-a_i)\,dp_i\qquad[p_i=f_i(t)]$$

である。之を $g(t)$ にて表はす。然るとき

$$G(t)=-\int_0^t\sum_i(X_i-A_i)\,dp_i=\sum g(t)$$

價格が市場均衡價格から變動すれば、この均衡は破れ、そして交換參加者の中に主觀的に利益を得るもののもあれ

註　所有量の變動が價格 $p_1, p_2, \cdots p_n$ の交換で行はれたものならば

$$dx+p_1dx_1+\cdots+p_n\,dx_n=0$$

從つて　$\frac{d\varphi}{\varphi_0}=(P_1-p_1)dx_1+\cdots+(P_n-p_n)dx_n$

ば、損失を蒙るものもある。此等損得の代數和が卽ち G(t) である。市場均衡點に於てGの値は勿論。その微分係數も亦零である。曲線の取り方に關せず助變數 t の微動、卽ち價格の任意の微變動（市場均衡價格からの）に對しこGが常に正數値を取るときは第一の場合(安定)で、負數値をとるときは第二の場合(不安定)である。不完全不正確で誤解の懸念も多分にあるが、之を砕いて平易に言へば第一は全體的に見て個人利益を抑制してゐる狀態で、第二は個人の損失を防止してゐる如き狀態である。人は一般に他人の利益享受を看過するか、また他の損失招來を救はんとするか。

なほ市場均衡は恰も振子の平衡狀態の如きもので、重心が支點の下方にある場合には、振子が動けば其の位置エネルギーは增し、上方にあれば減ずる。前者は安定で、後者は不安定である。

十三、不安定均衡の生起

安定と不安定と何れが起り易いか。常識的の觀念よりすれば現實の社會に於て市場均衡は多くの場合に安定である。上記の理論的定義によるも亦同樣となる。是れには個人均衡の安定性が大なる役目をなすと同時に貨幣所得の增加が消費の增大を來す傾向のあることとも一つの原因となる。之を顯はしめるために、先づスルツキーの方程式

$$(37)\quad \frac{\partial x_i}{\partial p_j}=-(x_j-a_j)\frac{\partial x_i}{\partial a}+\frac{H_{ji}}{H},\quad H=\left|P_{ij}-P_{i0}p_j\right|$$

を取り、兩邊に p_ip_j を乘じて i j について相加すれば

$$(69)\quad \sum_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial p_j}p_ip_j=-(a-x)\left(1-\frac{\partial x}{\partial a}\right)-R$$

となり，限界利得はデュプイの相對效用を表はすこととなる。

となる。こゝに　$-R=\frac{1}{H}\sum_{ij}H_{ij}p_ip$.

何となれば

$$a-x=\sum_j p_j(x_j-a_j),\quad 1-\frac{\partial x}{\partial a}=\sum_j p_j\frac{\partial x_j}{\partial a}$$

なるを以てである。次に交換參加者の總てについて右の方程式を邊々相加すれば

$$(70)\quad \sum_{ij}\frac{\partial X_i}{\partial p_j}p_ip=-\sum(a-x)\left(1-\frac{\partial x}{\partial a}\right)-\sum R$$

となり、そして市場均衡が安定なるか、不安定なるかに從つて左邊は負又は正となる。

さて個人均衡の安定條件(即ち選擇函數の極大條件)は母式 $(P_{ij}-P_{io}p_j)$ を係數の母式とする二次形式が負定形なることとである。この場合逆母式 (H_{ij}/H) を係數の母式とする二次形式も亦負定形となる。故に(69)に於てRは正數である。依つて此の方程式の左邊が正數となるためには右邊の第一項が正數となるを要する。この項について $a-x$ は、其の値が正數ならば交換による貨幣支出を表はし(註)、負數ならば $x-a$ は貨幣の收得額となる。いま假りに一個人について初めの場合には需要者、後の場合には供給者と呼ぶこととする。一般に個人について貨幣所得が增加すれば、他財の需要を增すか、又は供給を減じ、從つて需要者は支出を增大し、供給者は收入の減少を來す傾向がある。之を認めれば需給兩者の何れについても

$$1-\frac{\partial x}{\partial a}\geqq 0\quad (a-x \text{ の正負にかゝはらず左邊を貨幣消費度と呼ぶ})$$

となる。故に需要者については(69)の右邊は常に負數であり、これが正數となるのは供給者に限り、しかもRが收入と消費度との積より小なる場合である。依つて(70)により不安定均衡は安定の方より起り難いと見るべきである

註　貨幣の語を成るべく避けたいのであるが，說明の便宜上こゝでは標準財を貨幣と呼んでおく。

(25)

（第十八節參照）。特に交換參加者の總てについて消費度が零の場合（次節參照）には供給者についても(69)の右邊は常に負數となり、從つて不安定均衡は決して生じない。

十四、標準財から他財が分離可能の場合

前節の式Rは安定問題について特に重要なるものであるが、標準財から他財が分離可能の場合には、其の意義が明かとなり、且つ方程式(69)は至極簡單となる。この假設のもとに

(71)　$P_{i0}=\mu P_i \qquad (i=1, 2, \dots n)$

とする。即ちμは標準財Xに對する他の各財の置換率の變動率（Xに關する）である(註)。この條件を考慮に入れて交換方程式及び個人均衡條件

$$x-a+\sum_j p_j(x_j-a_j)=0,\quad P_i=p_i \quad (i=1, 2, \dots n)$$

をaについて偏微分すれば、

$$\sum_j (P_{ij}-P_{i0}p_j)\frac{\partial x_j}{\partial a}=-\mu P_i \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

を得、これより

$$H\frac{\partial x_i}{\partial a}=-\mu\sum_j H_{ij}P_j=-\mu\sum_j H_{ij}p_j$$

を得る。こゝに　$H=|P_{ij}-P_{i0}p_j|=|P_{ij}-\mu p_i p_j|$

右の方程式の兩邊にp_iを乘じて、iについて相加し、Hにて兩邊を除すれば

(72)　$1-\dfrac{\partial x}{\partial a}=\mu R$

註　拙著，價格變動に伴ふ分離可能財の需給變動，第十六節（國民經濟雜誌第七十四卷第三號）を見よ。

を得る。これにてRの意味は分明する。

等式(72)に於てRは前節に述べた如く正數である。故に消費度はμと同符號を取る。從つて兩者の一方の符號が決定すれば、他は之に伴つて定まる。前節に於ては消費度は正又は零とした故、μも亦同樣となる。また他方に於て

$$P_{1o}dx_1+P_{2o}dx_2+\cdots+P_{no}dx_n=\mu(P_1dx_1+P_2dx_2+\cdots+P_ndx_n)$$

なる故、μは標準財Xに關する他財の限界效用(第十二節)の變動率(Xに關する)である。然るに通常貨幣の所有量が增せば、同一商品に對して支拂はんとする金額が以前より增すか、又は少くとも以前と同一であるとするのが常識的である。かく見ればμは正又は零となり、從つて消費度も亦同樣となる。是に於て上記兩樣の見界から$\mu\geqq 0$と假設する。

勿論μは人々によつて其の値を異にするものであるが、若し總ての參加者に對して零ならば消費度も亦零となり、前節に述べた如く不安定均衡は生じない。μの値が零なることは標準財Xに對する他財の置換率がXに無關係なることを意味し、この場合選擇函數を適當に取れば、標準財に關する限界選擇度は常數となる。即ち貨幣の限界效用(通常の意味で)を常數と假設するとき、交換均衡は常に絕對安定である。

次にμが零でない場合、(72)より得べきRの値を(69)に代入すれば

$$(73)\quad \sum_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial p_j}p_ip_j=-\left(\alpha-x+\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)$$

となる。そして右邊が正數となるのは

$$\mu(x-\alpha)>1$$

のときである。然るに

$$\mu(x-a)=\frac{x-a}{\sum_i p_i dx_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\sum_i p_i dx_i$$

之を收入に關する**限界效用の伸縮率**と呼ぶこととする。この伸縮率（市場均衡點に於ける）が供給者に對して1より大なるときに、(73)の右邊は正數となる。之を平易に言へば、收入が增せば貨幣所有量は增し、從つて他財の限界效用（本文の意味に於ける）も增すが、後者の增す割合が前者のものよりも大なるときに、伸縮率が1より大となり、(73)の右邊が正數となる。そしてかゝる供給者が相當にあるときに甫めて不安定均衡を生じ得るのである。

十五、簡單なる應用

屢ゝ用ゐる如く $x, x_1 \cdots x_n$ を價格 $p_1, p_2, \cdots p_n$ の交換に於ける個人均衡量とすれば、

$$a-x=\sum_i p_i(x_i-a_i) \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

これより $-\sum_j \frac{\partial x}{\partial p_j}dp_j=\sum_{ij} p_i\frac{\partial x_i}{\partial p_j}dp_j+\sum_j(x_j-a_j)dp_j$

故に $\sum_j \frac{\partial(A-X)}{\partial p_j}dp_j=\sum_{ij} p_i\frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_j+\sum_j(X_j-A_j)dp_j$

依つて市場均衡點に於て

$$\sum_j \frac{\partial(A-X)}{\partial p_j}dp_j=\sum_{ij} p_i\frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_j$$

となる。いま價格が一齊に同一率にて騰貴する場合を考へ、

$$dp_j=p_j d\lambda \qquad (d\lambda>0)$$

とおけば

$$(74)\quad \sum_j \frac{\partial(A-X)}{\partial p_j}dp_j = d\lambda \sum_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} p_i p_j \begin{cases} <0 & (\text{安定のとき}) \\ >0 & (\text{不安定のとき}) \end{cases}$$

となる。

他方に於て標準財を貨幣とし、第十三節の假稱を用ひれば

$$A-X=(\text{需用者の支出額})-(\text{供給者の收得額})$$

從つて(74)の左邊は商品の價格變動によつて需要者が增支出せんとする金額から供給者が增收せんとする金額を差引きたる差額を表はす。依つて價格が同一率にて一齊に騰貴するとき、(74)により、均衡が安定ならば、需要者の增出せんとする金額より供給者の增收せんと欲する金額の方が大である。不安定の場合には此の反對となる。

十六、第二例として市場均衡に於て交換參加者の一人の初期貨幣量が da だけ增加した場合について價格の變動關係を見る。

$$X_i = \sum_r x_i^{(r)}, \quad X_i = A_i$$

なる故、$\displaystyle\sum_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_j = -\frac{dx_i}{\partial a}da \qquad (i=1, 2, \dots n)$

こゝに $dp_1, dp_2, \dots dp_n$ は初期量の變動に伴ふ價格の變動(但し無限小の主部)を示し、また初期量增加者に對しては指數を取り去る。

右の方程式の兩邊に dp_i を乘じ、i について相加すれば

$$\sum_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_i dp_j = -\sum_i \frac{dx_i}{\partial a}dp_i da$$

故に $da>0$ のとき

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial a} dp_i \begin{cases} >0 & (\text{安定の場合}) \\ <0 & (\text{不安定の場合}) \end{cases}$$

依つて一人の初期貨幣量が増加するとき、均衡が安定ならば、其の人についての上級品$\left(\frac{\partial x_i}{\partial a}>0\right)$の中に價格騰貴をなすものがあるか、又は下級品$\left(\frac{\partial x_i}{\partial a}<0\right)$の中に價格の下落を來すものがある。之に反して不安定ならば、價格騰貴が下級品の中に起るか、又は下落が上級品の中に生ずる。

注意　變動度$\frac{\partial X_i}{\partial p_j}$ $(i, j=1, 2, \cdots n)$ の總てが市場均衡點に於て零であると假定すれば、本節の初めに掲げた方程式より

$$\frac{\partial x_i}{\partial a}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots n)$$

そして此のことは總ての參加者について成り立つ。いま之を(37)の右邊に代入すれば

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i}=\frac{H_{ii}}{H} \quad \therefore \quad \frac{\partial X_i}{\partial p_i}=\sum\frac{H_{ii}}{H}$$

然るに個人安定條件により $\frac{H_{ii}}{H}<0$ $\therefore$ $\frac{\partial X_i}{\partial p_i}<0$

之れ假定に矛盾する。依つて變動度$\frac{\partial X_i}{\partial p_j}$の中に市場均衡點に於て零とならぬものが必ず存在せねばならぬ。

十七、ヒックスの安定條件

私の導いた安定條件(65)はヒックスのものと異るが、後者は前者から從ふものなること、即ち私の定義からの必要條件なることを序に示しておく。先づ安定條件(65)が市場均衡點に於て成り立つと假設する。然るとき

(一)　行列式　$\left|\frac{\partial X_i}{\partial p_j}\right|$ $(i, j=1, 2, \cdots n)$

の主小行列式は零であり得ない。何となれば

$$行列式\left|\frac{\partial X_i}{\partial p_j}\right|=0 \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\}=1,\ 2,\ \cdots\ l \quad [l<n]$$

であると假定すれば、方程式

$$\sum_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_j=0 \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\}=1,\ 2,\ \cdots\ l$$

$$dp_{l+1}=\cdots=dp_n=0$$

に適するやうに $dp_1,\ dp_2,\ \cdots\ dp_n$ をとることが出來、その結果として

$$-\sum_{ij}\frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_i\,dp_j=0 \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\}=1,\ 2,\ \cdots\ l$$

となり、(64)の右邊が正定形とならぬからである。

(二)　聯立方程式

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial X_1}{\partial p_2}dp_2+\cdots+\frac{\partial X_1}{dp_l}dp_l=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial X_{l-1}}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial X_{l-1}}{\partial p_2}dp_2+\cdots+\frac{\partial X_{l-1}}{\partial p_l}dp_l=0$$

$$\frac{\partial X_l}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial X_l}{\partial p_2}dp_2+\cdots+\frac{\partial X_l}{\partial p_l}dp_l=\lambda(>0), \quad dp_{l+1}=\cdots=dp_n=0$$

に適するやうに $dp_1,\ dp_2,\ \cdots\ dp_n$ をとり、各方程式に夫々 $dp_1,\ dp_2,\ \cdots\ dp_l$ を乘じて相加すれば

$$\sum_{ij}\frac{\partial X_i}{\partial p_j}dp_i\,dp_j=\lambda dp_l \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\}=1,\ 2,\ \cdots\ l$$

となり、條件(65)により $\lambda dp_l < 0$ ∴ $dp_l < 0$

となる。然るに上の聯立方程式より

$$dp_l = \frac{\lambda \Delta_{l-1}}{\Delta_l}$$

こゝに

$$\Delta_{l-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial p_{l-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_{l-1}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial X_{l-1}}{\partial p_{l-1}} \end{vmatrix}, \quad \Delta_l = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial p_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial X_l}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial X_l}{\partial p_l} \end{vmatrix}$$

故に Δ_{l-1} と Δ_l とは其の符號を異にする。

特に $l=1$ の場合には $\frac{\partial X_1}{\partial p_1} dp_1 = \lambda > 0$, $dp_1 < 0$ となり、$\frac{\partial X_1}{\partial p_1}$ は負數である。依つて

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \dots\dots$$

これ即ちヒックスの所謂完全安定條件である。これに依つて見るに、彼れの與へた條件は私の意味に於ける安定性に對して必要性を有するが、第八節に示した如く充分性を有しない。

十八、特殊者の參加

交換に特殊の者が參加し、彼等は貨幣の收得を目的とし、他の何物をも需要しないのみならず、初期所有の財は總て之を供給して、貨幣以外に何物をも殘さない場合を考へ、彼等の供給する財X_iの總量をm_iとする。他の參加者は從前通りとし、記號も前と同一のものを採すれば、$X_i - A_i - m_i$ は價格の函數で、市場均衡價格は聯立方程式

(75)　$X_i - A_i - m_i = 0$　$(i = 1, 2, \dots n)$

によつて決定される。特殊供給者は市場均衡價格を考慮して、その供給量を増減することもあらうが、夫れが決定されるまでは、供給量は中間價格に對して無關係であると假設する。

いま價格を $(p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ として微分

(76)　$-\sum_i (X_i - A_i + m_i)\, dp_i$　$(i = 1, 2, \dots n)$

を考へ、之を市場均衡點を通る曲線に沿ふて線積分し、第九節に於けると同一の方針にて市場均衡を三種に區別して、其の安定不安定を定義すれば、第十節と全く同一の結果を得る。若しこの市場に於て特殊者以外は總て第十三節の意味に於ける需要者ならば、同節の所說により市場均衡は絶對安定で決して不安定は生じない。

次に特殊者の供給に微變動 $dm_1, dm_2, \dots dm_n$ を生じ、その結果として市場均衡價格に夫々 $dp_1, dp_2, \dots dp_n$ だけの變化(但し無限小の主部)を來したとすれば、(75)により

$$\sum_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j} dp_j = dm_i \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

これに dp_i を乘じて、i について相加すれば

(77)　$\sum_i \sum_j \frac{\partial X_i}{\partial p_j} dp_i\, dp_j = \sum_i dm_i\, dp_i$

となる。故に均衡が安定ならば

(78)　$\sum_i dm_i\, dp_i < 0$

從つて供給増加の財の中に價格の下落を來すものがあるか、又は供給減の方に價格騰貴するものがある。

市場が安定の場合、たゞ一財の供給増加ならば、其の價格は下落するが、二財の供給増加となれば、その一つ

は價格下落し、他は騰貴することもあり得る。例へば二財について

$$\frac{\partial X_1}{\partial p_1}=-\frac{3}{11},\quad \frac{\partial X_1}{\partial p_2}=-\frac{1}{11},\quad \frac{\partial X_2}{\partial p_1}=\frac{5}{11},\quad \frac{\partial X_2}{\partial p_2}=-\frac{2}{11}$$

とすれば、安定條件は滿たされる。そして特殊供給の增加をａｂとすれば

$$-\frac{3}{11}dp_1-\frac{1}{11}dp_2=a,\quad \frac{5}{11}dp_1-\frac{2}{11}dp_2=b$$

故に

$$dp_1=b-2a,\quad dp_2=-5a-3b$$

となり、$b>2a>0$ ならば、$dp_1>0,\ dp_2<0$ となる。

上記はクルノー流の獨占論の展開、卽ち生產費不要の商品、又は供給市場と全く關係なき土地にて生產される商品の獨占問題を一般的に考察するに當つて應用し得るものであるが、また同時に獨占が唯一商品に限る場合と、二品以上に及ぶ場合とについて甚だしき相異のあることをも明示するものである。

また特殊供給量を負數にとれば、特殊需要となり、これは或る種の問題に適用し得ることを豫想するものである。

更に特殊需給量の間に生產關係をつけ、生產財を生產物の供給市場から購求するものとすれば一般生產論となる。この場合當然價格間の相互獨立性を失ふが、安定問題の處理方は本文所說の方針を踏襲すれば可なりと思ふ。併し特に留意を要する點もある。此等については他日稿を更めて學界諸賢の御高批を仰ぎたき所存であるが、こゝに筆を擱くに當つて、紙數の夥しき超過にも拘はらず御寛恕をたまひしことについて編纂委員各位に衷心謝意を表する次第である。（昭和十八年十一月十三日）