# 經濟論叢

第七十五巻　第三號



〔昭和三十年三月〕

京都大學經濟學會

# 選擇と不確實性

西川　徹

我々は日常の生活において、二つ以上の行動のうち、いづれか一つを選ばねばならぬという事態に屡々直面する。その時、選擇の結果に關して全く不確實性が存在しない場合、卽ち、或る一つの行動をとれば確實にある定まつた結果が生じるという場合もあるであろう。しかし、行動とその結果との間に、そのような一對一の對應が存在せず、或る行動の結果が不確實である場合も極めて多い。通常、選擇の對象の各々は、その結果に關して樣々な程度の不確實性を持つていると考えられねばならない。このような不確實性を伴なつた選擇は、視野を經濟行動の範圍に限つても、資産保有形態の選擇、企業の生産計畫の選擇、職業の選擇、また經濟政策の選擇等に廣く見ることができる。

不確實性が存在しない場合の選擇については、よく知られているように效用極大の假說によつて說明されるのが普通である。例えば或る一定の貨幣量によつて可能な樣々の購買計畫を立てることができるが、人は合理的に行動する限り、自らの效用を極大にするような購買計畫を選擇する――というような說明がなされる。この不確實性が存在しない場合の假說を擴張して不確實性が存在する場合には效用の期待値を極大にするという假說によつて說明しようとする試みは旣に古くから存在したが、近年に至つて axiomatic treatment と呼ばれる新しい接近法によつ

て大きく前進させられた。[1] 更に、これと關して、フリードマン、サベイジ兩教授のすぐれた業績が存在する。[2] 兩教授は、この新しい接近法における問題の取扱いに基いて、效用の期待値の極大という假說から出發し、且つ舊來の效用分析を擴張することによつて不確實性を伴う選擇の理論を說明することができることを示したのである。兩教授は專らグラフを用いての說明により論を進めているが、解析的な方法によるならば、兩教授の結論を、より嚴密で、しかも、より一般的な形に置きかえることができ、且つ、それによつて兩教授においては論じられず殘された諸點を明らかにすることができる。これを示すのが、この小論のめざす所である。

(1) この代表的な著作としては、von Neumann and Morgenstern, *Theory of games and Economic Behavior*, 1947, 2 ed. pp. 15–31, and Appendix pp. 617–632.
Marschak, "Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility," *Econometrica*, April, 1950. 等がある。前者の著作において Neumann Morgenstern 兩教授は、確實な選擇對象の持つ效用と、不確實な選擇對象の組合せが持つ效用の期待値との比較から、效用の數量的測定の可能性を示そうという興味ある試みをなしている。
なお、不確實性を伴う選擇理論の最近の發展を概說したものとして、Arrow, "Alternative Approachs to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations," *Econometrica* Oct. 1951. がある。

(2) M. Friedman and L. J. Savage, "the Utility Analysis of Choice Involving Risk," *the Journal of Political Economy.* Vol. 56, pp 279–304. なお、この論文は、*Readings in Price Theory*, pp 57–96. に再錄されている。

## 一

次のような場合を想定しよう。結果の確實な行動(A)、不確實な行動(B)のいづれかを選ばねばならぬ人があるとする。そして、もし確實な行動(A)をとれば、その結果として一定量の確實な貨幣所得$I_0$が得られる。もし不確實な行

動(B)を選べば、その結果として得られる貨幣所得の大きさは不確實であるが、この時、獨立的に起り得る$n$箇の場合が考えられるとし、その各々の場合に獲得し得る所得が$I_1 I_2 \cdots\cdots I_n$で示されのとする。更に、その$n$箇の場合が各々生じ得る確率$p_1 p_2 \cdots\cdots p_n$は、その人によつて豫想されるとする。この場合、明らかに不確實な所得の期待値$\bar{I}$は、$\sum_{i=1}^{n} p_i I_i$で示される。そして今、この不確實な所得の期待値$\bar{I}$の値が、行動(A)をとつた場合の確實な所得$I_0$の値に等しいとしよう。更に、行動(A)がもたらす效用$U(I_0)$で示せば、行動(B)がもたらす效用の期待値は$E[U(I_i)]=\sum_{i=1}^{n} p_i U(I_i)$で示される。そして、もし$U(I_0)>E[U(I_i)]$ならば、その人は行動(B)よりも行動(A)を選擇し、逆に$U(I_0)<E[U(I_i)]$ならば、行動(A)よりも行動(B)が選擇されると假定しよう。上述の如く、いま$I_0=\bar{I}$の場合を想定しているから、此處の$U(I_0)$は、當然$U(\bar{I})$によつて置きかえることができる。

そこで$U(I_0)\gtreqless E[U(I_i)]$は如何なる條件によつて決定されるかを考察しなければならない。このために、效用函數$U(I_i)$を$\bar{I}$の點においてテイラー展開し、高次の項を無視すれば、

(1.1)　$$U(I_i)=U(\bar{I})+(I_i-\bar{I})\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}+\frac{(I_i-\bar{I})^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}\qquad (i=1,\cdots,n)$$

$I_i$を得る確率$p_i$を、これらの各々の式の兩邊に乘じて、それらのすべての式を相加えれば、次の式を得ることができる。

(1.2)　$$\sum_{i=1}^{n} p_i U(I_i)=\sum_{i=1}^{n} p_i U(\bar{I})+\sum_{i=1}^{n} p_i (I_i-\bar{I})\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}+\frac{1}{2}p_i (I_i-\bar{I})^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}$$

この式の右邊第二項は零に等しい。何故ならば、$\sum_{i=1}^{n} p_i I_i=\bar{I}$, $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$,

從つて、$\sum_{i=1}^{n} p(I_i-\bar{I})=\sum_{i=1}^{n} p_i I_i-\bar{I}\sum_{i=1}^{n} p_i=0$

(1.2)式から、

$$(1.3)\qquad E[U(I_i)]=U(\bar{I})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}p_i(I_i-\bar{I})^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}$$

$E[U(I_i)]$ は上述の如く $U(I_i)$ の數學的期待値である。また $\sum_{i=1}^{n}p_i(I_i-\bar{I})^2$ は不確實な所得 $I_1$ $I_2$………$I_n$ の分散 (variance) を示している。そこで $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}$ の正負によつて次の三つの場合があり得る。

(a) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}>0$ ならば $E[U(I_i)]>U(I)$

(b) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}=0$ ならば $E[U(I_i)]=U(I)$

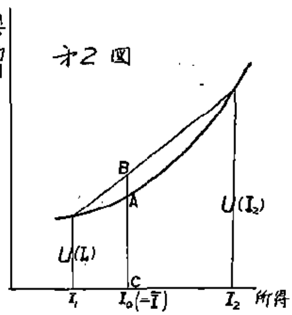
(c) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}<0$ ならば $E[U(I_i)]<U(I)$

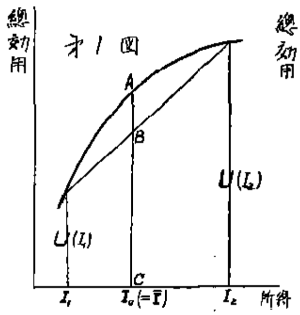
(a)の場合、即ち期待値の近傍において所得の限界效用が遞増的である場合には、その人は不確實性を持つ行動(B)を確實性を持つ行動(A)よりも望ましいものとして選擇する。

(b)の場合、即ち所得の限界效用が一定である時には、行動(A)と行動(B)との間の選擇は無差別である。

(c)の場合、即ち所得の限界效用が遞減的である場合には、行動(B)よりも行動(A)が選擇される。

この結果は、フリードマン、サベイジ兩教授がグラフを用いて示している結論の一つに他ならない[1]。圖において曲線は總效用函數を示す。$I_1$ $I_2$ はそれぞれ獨立的に生じ得ると豫想される不確實な所得、$\bar{I}$ はそれらの期待値、$I_0$ は確實な所得である。この時 $\overline{\mathrm{AC}}$ は $U(I_0)$ であり、$\overline{\mathrm{BC}}$ が $E[U(I_i)]$ であることは容易に確めることができる。從つて效用函數の形が圖1の如き場合には、$E[U(I_i)]<U(I_0)$ で確實性を持つた行動が選ばれ、逆に圖2の如き場合




には $E(U(I_i)) > U(I_0)$ で不確實性を持つ行動が選ばれるという結論を導き出すことができる。このようなグラフによる方法では、生じ得る不確實な所得の分布が、$I_1$ $I_2$ の二箇しかない場合のような極めて簡單な場合しか取扱うことができない。しかし上述の解析的な方法によれば、樣々の程度の不確實性が存在し、起り得る $n$ 箇の不確實な所得がある場合をも一般的に取扱うことが可能である。そればかりか、行動(A)が行動(B)以上に望ましいと感じられる程度、或いは行動(B)が行動(A)以上に望ましいと感じられる程度は、先に導いた(1.3)式から、$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}$ の絶對値の大きさと、$\sum_{i=1}^{n} p_i (I_i - \bar{I})^2$、即ち $n$ 箇の不確實な所得の分散の値とに依存するという事實を知ることができる。從つて次のように言うことも可能である。いま富くじを買う場合の選擇を考えよう。そして、富くじ一枚當りの價格、及び賞金總額を不變にとどめたまま、當りくじの數を減らし、その代りに、當りくじ一枚當りの賞金額を增加したとしよう（或いは、競馬、競輪における單勝式と複勝式の區別を想起されたい）。この賞金構造の變化は、當然、分散の値を大きくする。この結果、$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}} > 0$ なる限り、$E(U(I_i)) - U(\bar{I})$ の値は以前よりも大きくなる。即ち、その人が不確實性を持つ行動を確實な行動より望ましいと感じている時には、このような賞金構造の變化は富くじに對する購買欲を一層刺戟することになる。[2)]

(1.3) 式から得られた結論を、更に一般的な場合に擴張することは困難ではない。いま確實性を持つ行動と不確

實性を持つ行動との間の選擇が、當期における所得のみならず、次期における所得にも關連するという場合を考察する。例えば、或る企業が二つの生産計畫(A)(B)のいづれかを選ばねばならないとしよう。もし計畫(A)を選べば、その企業は、當期にも次期にも、それぞれ一定量の利潤を確實に得ることができる。他方、計畫(B)を選べば、當期にも次期にも確實な利潤は保證されず、それぞれ或る確率分布を持つた不確實な利潤の見込みが與えられるとする。また、その時、不確實な利潤の期待値は、當期においても次期においても、計畫(A)の結果として生じる確實な利潤の大きさに等しいと假定する。このような場合、先に(1.3)を導いた場合と同じ手續きを今度は二變數に關して適用することによつて、容易に次の式を得ることができる。但し、$p_{ij}$は、當期に$I^0_i$を、次期に$I^1_j$を得る確率であり、$\sum_{j=1}^n p_{ij}=P_i$, $\sum_{i=1}^n p_{ij}=P_j$ と記すことにする。なお、$I$の右肩につけた、0、1、の記號は、それぞれの當期の豫想所得、次期の豫想所得を意味する。

$$(1.4)\quad E[U(I^0_i, I^1_j)] = U(\bar{I}^0, \bar{I}^1) + \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^n P_i(I^0_i-\bar{I}^0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^{02}}\right)_{\substack{I^0=\bar{I}^0\\ I^1=\bar{I}^1}} + \sum_{j=1}^n P_j(I^1_j-\bar{I}^1)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^{12}}\right)_{\substack{I^0=\bar{I}^0\\ I^1=\bar{I}^1}} + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n p_{ij}(I^0_i-\bar{I}^0)(I^1_j-\bar{I}^1)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^{12}}\right)_{\substack{I^0=\bar{I}^0\\ I^1=\bar{I}^1}}\right\}$$

$\sum_{j=1}^n P_i(I_i^0-\bar{I}^0)^2$, $\sum_{j=1}^n P_j(I_j^1-\bar{I}^1)^2$ は、それぞれ當期の不確實な所得、次期の不確實な所得の分散であり、$\sum_i\sum_j p_{ij}(I^0_i-\bar{I}^0)(I^1_j-\bar{I}^1)$ は兩期の不確實な所得の間の共變動(covariance)に他ならない。從つて、當期のみならず未來についての豫想所得をも考慮に入れたこの一般的な場合には、各期の所得の期待値の近傍における效用函數の二次微係數の符號、並びにその絶對値、及び各期の不確實な所得の分散、それらの所得の間の共變動等の大きさによつて、選擇の方向及びその强さの程度が決定される。

(1) Friedman and Savage, *ibid*, pp. 74-76. 頁數は、*Readings in Price Theory* における頁數を示す。
(2) *ibid* pp. 84-85.

## 二

不確實性を考慮に入れない場合の選擇理論にあつては、よく知られているように效用が數量的に測定されるという前提は必要ではない。ただ相互に比較が可能で、且つ順序づけが可能であれば十分である。そして、その順序づけられた選擇對象に任意の效用指標を與えることができる。いま效用函數$U$に任意の函數變換を行つて、

$$\phi=F(U)$$

とする時、$F'(U)>0$が常に成立つ限り、$U$の任意の値、$U_a$、$U_b$について$U_a \gtreqless U_b$に對應して、$F(U_a) \gtreqless F(U_b)$が、それぞれ常に成立する。[1] 即ち、ただ單調性のみを假定すれば、效用指標の取り方によつて選擇の順序に變更が加えられることはなく、效用指標の取り方は任意である。次に不確實性を考慮に入れた場合にはどうであろうか。この場合には、不確實性を考慮しない場合とは異なり、ただ單調性のみを假定した任意の變換によつて、その選擇序列が不變であるというわけにはいかない。從つて、效用の順序づけのみが可能であるだけでは十分でなく、效用を數量的に表し得るという前提が必要である。但し各〻の量の間の關係は、それらの一次變換によつては變更を受けない。このことを前節の結果を利用して證明を試みよう。[2]

不確實性を持つ效用函數$U$に單調性$F'(U)>0$のみを假定して任意の變換$F(U)$を行い、展開すれば、

$$F[U(I_i)]=F[U(\bar{I})]+(I_i-\bar{I})F'\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}+\frac{(I_i-\bar{I})^2}{2}\left\{F''\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)^2_{I=\bar{I}}+F'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}\right\}\quad(i=1,\ldots\ldots,n)$$

前節において示した如く、これは

$$E\left\{F\left(U(I_i)\right\}=F\left[U(\bar{I})\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}p_i(I_i-\bar{I})^2\left\{F''\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)^2_{I=\bar{I}}+F'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}\right\}$$

となる。この場合には、確實性を持つ行動と不確實性を持つ行動との間の選擇は$\left\{F''\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)^2_{I=\bar{I}}+F'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}\right\}$の正負に依存する。從つて、たとえ$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}>0$であつても、必ずしも$E\left\{F\left[U(I_i)\right]\right\}>F\left[U(\bar{I})\right]$ではない。そしてまた、$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}<0$であつても、必ずしも$E\left\{F\left[U(I_i)\right]\right\}F\left[U(\bar{I})\right]$ではない。何故ならば、$F''$の正負については何も知られておらず、正負いづれでもあり得るからである。しかし、もしこの變換が一次變換であるならば、卽ち原點の位置と測定の單位のみを變えるものであるならば、$F''$は常に零に等しい。このことから、不確實性を持つ效用函數は、一次變換の下においてのみ、その選擇の順序は不變であることを知り得る。

(1) 何故ならば、この關係が成立つための必要、且つ十分條件は、$\frac{F(U_b)-F(U_a)}{U_b-U_a}>0$である。Uの連續性を假定すれば、平均値の定理によつて$\frac{F(U_b)-F(U_a)}{U_b-U_a}=F'(U_c)$を充たす$U_c$が、$U_a$と$U_b$の間に必ず存在し、且つ$F'(U_c)$は假定により必ず、正である。

(2) このような性質を持つ數量的な效用函數の導出に關する嚴密な證明は von Neumann and Morgenstern, *ibid*, Appendix pp. 617–632 において與えられている。

# 三

この節においては確實性を持つ行動と不確實性を持つ行動との間の選擇が所得税によつて如何に影響されるかを考察しよう。所得税額$T$は所得の函數である。

$$T=f(I),\quad f'(I)>0$$

従つて稅引後の所得は $I-f(I)$ で示される。第一節における效用函數の展開式 (1.1) における $I_i$ に、この稅引後の所得 $I_i-f(I_i)$ を代入すれば、

$$(3.1)\qquad U[I_i-f(I_i)]=U[\bar{I}-f(\bar{I})]+\left\{(I_i-\bar{I})-[f(I_i)-f(\bar{I})]\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}+\frac{1}{2}\{(I_i-\bar{I})-[f(I_i)-f(\bar{I})]\}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}\ (i=1,\cdots\cdots,n)$$

更に $f(I_i)$ を展開すれば

$$(3.2)\qquad f(I_i)=f(\bar{I})+(I_i-\bar{I})f'(I)_{I=\bar{I}}+\frac{1}{2}(I_i-\bar{I})^2f''(I)_{I=\bar{I}}$$

これを (3.1) に代入すれば、

$$(3.3)\qquad U[I_i-f(I_i)]=U[\bar{I}-f(\bar{I})]+[(I_i-\bar{I})-(I_i-\bar{I})f'(I)-\frac{1}{2}(I_i-\bar{I})^2f''(I)]\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}+\frac{1}{2}[(I_i-\bar{I})-(I_i-\bar{I})f'(I)-\frac{1}{2}(I_i-\bar{I})^2f''(I)]^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}\ (i=1,\cdots\cdots,n)$$

第一節において示したように (3.3) から、

$$(3.4)\qquad E\{U[I_i-f(I_i)]\}=U[\bar{I}-f(\bar{I})]-\frac{1}{2}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^2f''(I)\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}+\left\{\frac{1}{2}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^2+\frac{1}{2}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^2[f'(I)]^2+\frac{1}{8}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^4[f''(I)]^2-\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^2f'(I)-\frac{1}{2}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^3f''(I)+\frac{1}{2}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^3f''(I)f'(I)\right\}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}$$

$(I_i-\bar{I})^3$ 及び $(I_i-\bar{I})^4$ の如き高次の項は無視し得るから、(3.4) 式は次のように書き改められる。

$$(3.5)\qquad E\{U[I_i-f(I_i)]\}=U[\bar{I}-f(\bar{I})]-\frac{f''(I)}{2}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^2\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}$$

$$+\frac{(1-f'(I))^2}{2}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial I^2}\right)_{I=\bar{I}}$$

この式の右邊第二項は、第一節(1.3)式においては存在しなかつた項であり、所得税を考慮に入れることによつて加わつてきた項である。累進税率が採用されている場合には $f''(I)>0$ であり、$\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}$ は、效用函數が單調増加函數である以上、正であるから、この $\left[-\frac{f''(I)}{2}\sum_i p_i(I_i-\bar{I})^2\left(\frac{\partial u}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}}\right]$ は全體として負になる。累進税率が採用されている場合には、この負の項が加わることによつて、無税、或いは比例税率の場合に比較して、$E[U(I_i-f(I_i))]-U(\bar{I}-f(\bar{I}))$ の値は減少し、不確實性を伴う行動の選擇は望ましくないものとなり、その結果、人々は確實な所得を約束するような行動を一層好む傾向を持つに至る。そして $f''(I)$ 値が大きい程、即ち累進率が高い程、この效果は大きい。比例税率の場合には $f''(I)=0$ となるから右邊第二項は消え、この效果は存在しない。從つて、この場合には第三項の係數 $(1-f'(I))^2$ で示されている效果のみが殘るだけである。通常の税體系においては $f'(I)<1$ と考えられるから、この係數 $(1-f'(I))^2$ は、人が確實な行動と不確實な行動のいづれを選ぶにせよ、無税の場合と比較して、その望ましさの程度を減少させる效果を持つと考えられる。