經濟論叢

第九十七巻　第五號

昭和四十一年五月

京都大學經濟學會

整数計画問題の解法とその意義

——截断平面法を中心として——

井原　健雄

ま え が き

整数計画問題 (integer programming problem) に対する一般的な解法の考案に注意が払われるようになったのは，ごく近年に至ってのことである。すでに幾つかの接近方法が試みられ，そのうちのあるものについては，現実の問題に対処してかなりの成果をあげているものもあるが，いまなお十分に解明しつくされていない問題も多数存在しているのが現状である[1]。

本稿では，その接近方法の1つである截断平面法 (cutting plane method) についてのみ言及する。その理由は，截断平面法による整数計画問題の解法がその双対問題との関連において，経済学的評価を与えることが可能となるからに他ならない。

I　一般的素描

整数計画問題とは，線型計画問題 (linear programming problem) の最適整数解を求める問題を含むとともに，また非線型計画問題 (nonlinear programming problem) の最適整数解を求める問題をも含むと考えられる。しかしながら，本稿ではそれを狭義に理解して，前者のみ，即ち変数が整数値しかとり得ないという条件を追加した線型計画問題を意味するものと考えることにしよう。

このように定義された整数計画問題は，その形式的側面を考慮することによって，次の2つのタイプに分類されうる。その1つは，通常の線型計画問題に

1)　整数計画における最近の動向については，Beale,〔2〕を参照。

ついての一般的条件に加えて，そこに含まれているすべての変数が整数値をとらなければならないということが要請されている場合であり，これを純粋型整数計画問題 (pure integer programming problem) とよぶことにする。他の1つは，線型計画問題に含まれているすべての変数ではなく，そのうちの幾つかの変数が整数値をとるように要請されている場合であり，これを混合型整数計画問題 (mixed integer programming problem) とよぶことにする。

本節では，より単純であると考えられる純粋型整数計画問題を例にとり，截断平面法の基本的な考え方を明らかにしよう。

純粋型整数計画問題は，次のように定式化できる。

(1.1)　$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{*} x_j \leq Q_i$　$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$ (a_{ij}^{*}：整数値)
ただし，x_j はすべて非負の整数値　$(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

という制約のもとで

(1.2)　$z=a_{00}^{*}+\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{*}(-x_j)$　(a_{0j}^{*}：整数値)

を最大にせよ。

このような純粋型問題について，R. E. Gomory は，“Method of Integer Forms” (以下，これを MIF 法と略記する) とよばれる解法を考案した。この解法の基本的な考え方は，新しい不等式の制約を系統的に付加していくことによって，整数計画問題を通常の線型計画問題に還元することが出来るということである。

まず，うえの問題 (即ち，整数係数[2] の純粋型整数計画問題) を解くことから始めよう。R. E. Gomory の MIF 法に従えば，変数に与えられている整数条件については何らの考慮も払わずに問題を解くことを最初に試みる。

通常のシンプレックス法 (simplex method) に基づいて，(1.1) の各不等式に対してそれぞれ1つずつスラック変数 (slack variable) を導入すれば，次のような等式体系を制約式にもつ問題に変換することが出来る。

2) 簡単化のために採用した。なお，係数が一般に有理数であれば，やはり整数係数の問題に還元できる。

$$(1.3) \qquad x_i' = a_{i0}^* + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^*(-x_j) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

ただし，a_{i0}^* は (1.1) の Q_i

ここで，線型計画の言葉を借りれば，(1.3) における x_i' は基底変数 (basic variable) であり，x_j は非基底変数 (non-basic variable) とよばれるものである。非基底変数の異なった集合を選ぶという，シンプレックス法の一連のピボット変換 (pivot steps) を施すことによって，うえの方程式体系 (1.2), (1.3) は最終的には次の方程式体系として表わされる。

$$(1.4) \qquad \begin{cases} z = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-t_j) \\ t_i' = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-t_j) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) \end{cases}$$

ただし，(1.4) における t_i' は，シンプレックス法を適用した場合，その最終段階としての基底変数であり，a_{ij} はそれらをそのときの非基底変数，t_j で表わすために用いられた係数である。このとき，方程式体系 (1.4) の解は，もとの整数条件を無視した線型計画問題に関して実現可能 (primal feasible とよび，すべての $a_{i0} \geq 0$，$i \neq 0$ の成立を意味する) であり，かつまた，その双対問題に関しても実現可能 (dual feasible とよび，すべての $a_{0j} \geq 0$，$j \neq 0$ の成立を意味する) となっている。従って，(1.4) より最終解[3] として，$t_i' = a_{i0}$，$t_j = 0$ のとき，z は最大値 a_{00} を得る。なぜならば，非基底変数 t_j を正の水準で採用することは，z の値を低めこそすれ，決して高めることはしないからである[4]。

しかし，ここでわれわれは，シンプレックス法が，いま求めた最終解について整数条件を必ずしも保証しないという最初の困難に直面する。いま，もしその最終解におけるすべての変数が偶然にも整数値をとったとするならば，そのときには，その解が整数条件をもみたしているがゆえに，最初に与えられた整数計画問題が解けたことになる。しかしながら，もしその最終解が整数値をと

3) 整数条件を考慮していないという意味で，「最適解」という言葉を避けた。
4) (1.4) における，a_{0j} は，"Simplex Criterion" とよばれるものであり，これはまた "shadow price" とよばれることもある。

っていないとするならば，そのときには，MIF 法に従えば，新しい制約式を１つずつもとの整数条件を無視した線型計画問題に付け加えるという操作を，最適整数解が得られるまで繰り返すことになる[5]。それゆえに，最終的な方程式体系は次のように表わされる。

$$(1.5)\qquad \begin{cases} z=a_{00}+\sum_{j=1}^{n}a_{0j}(-t_j) \\ t_i'=a_{i0}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-t_j) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m') \end{cases}$$

ただし，(1.5) における a_{i0}，a_{0j} はすべて非負の値をとっており，従ってそのときの最適整数解は，$t_i'=a_{i0}$，$t_j=0$ として求められる。なお，新しく付加された制約式のうち，幾つかのものは余分なもの (redundant) となり，それらを取り除くことが出来る結果，一度に要請される追加制約式の数が n 個を上廻ることはありえないということがすでに明らかにされている[6]。このことは，また (1.5) において $m\leq m'\leq m+n$ の関係が成立することを意味している。

以上のことから，MIF 法が通常のシンプレックス法と非常に類似していることがわかるが，その異なる点として，MIF 法では新しい制約式を系統的に付加していくことによって，(1.4) におけるすべての係数，a_{ij} を整数に保つという点にある。その結果として，最適整数解が与えられるのである。そして，この系統的に付加される新しい制約式が，それぞれ截断平面 (cutting plane) に対応しているのである[7]。

ここで，その截断平面法を，簡単な数値例をあげて幾何学的な図形で説明しよう。

$$(1.6)\qquad x_1+2x_2\leq 5$$

$$(1.7)\qquad 3x_1+x_2\leq 4$$

ただし，x_1，x_2 はともに非負の整数値

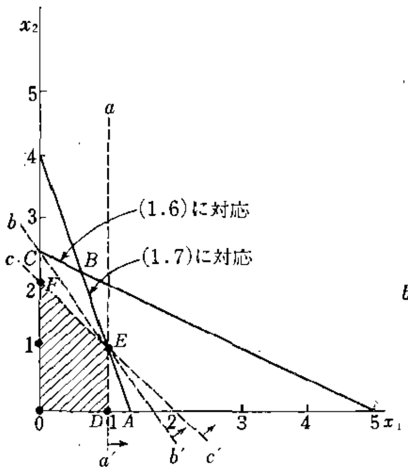
という制約のもとで

5) 「もし，解が存在するならば」という条件のもとであることは，いうまでもない。
6) Gomory & Baumol, [5], p. 527.
7) "cutting plane" の定義については，Dantzig, [3], p. 520.

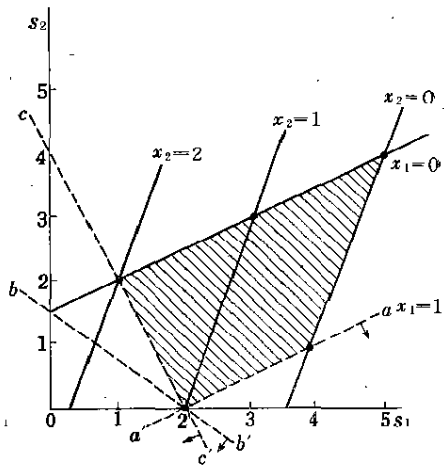
(1.8)　　$z=4x_1+x_2$

を最大にせよ。

まずこの問題のうち，変数に与えられている整数条件を無視した通常の線型計画問題の実現可能領域 (feasible region) が，第1図において多角形，$OABC$ によって表わされている。



第 1 図



第 2 図

この領域，$OABC$ 内に記された・印の点は，さらに変数に与えられた整数条件をもみたす場合の，従って当初の整数計画問題に対する実現可能なすべての点を表わし，その両座標とも整数値によって構成されている。それゆえに，これを整数格子点 (integer lattice point) とよぶことにする。

われわれは，通常の線型計画問題の最適解が，実現可能領域の境界線上にあることを知っている。そこで，もしこの実現可能領域，$OABC$ を実現可能な整数格子点の凸包 (convex hull)，即ち第1図における斜線部分，$ODEF$ にまで縮めることが出来るならば，そのときわれわれは，整数計画問題の最適解をその凸包の境界線上に見い出しうる。その理由は2つある。(i) 実現可能な整数格子点の凸包が，もとの問題に対するすべての実現可能な整数解を含むと

いうこと，と (ii) すべての端点 (extreme point)—— これはまた基本解，あるいはコーナーの解ともよばれる——が，整数格子点によって構成されている，ということのためである。そして，この方向に沿って，実現可能な整数格子点の凸包を求めるために，整数条件を無視した線型計画問題の実現可能領域の一部をある超平面で切り取ることを企てる。この接近方法を截断平面法とよぶ所以は，ここにある。そしてこのことが，新しい制約式を追加するということの幾何学的な意味なのである。

実際的な立場からみると，実現可能領域を実現可能な整数格子点の凸包にまで縮めることはかなり難しい。多くの変数を含むような場合には特にそうである。しかしながら，それに対する1つの試みとして，R. E. Gomory と W. J. Baumol は，次のような諸性質を有している追加制約式を考案した[8)]。

(i) 新しく付加される制約式は，従来の実現可能領域を縮小する。

(ii) そのグラフは，少くとも1つの整数格子点を通る。ただし，この整数格子点が実現可能領域内に存在する必要はない。

(iii) 新しく付加される制約式は，はじめに実現可能であった整数格子点を，新しく作られた実現可能領域から排除するようなことは決して起り得ない。

(iv) 新しく付加される制約式は，（もし最適整数解が存在するならば）有限回のステップで整数解をもつような新しい線型計画問題をもたらし，それがまた，もとの整数計画問題の最適整数解になっている。

従って，これらの性質をそなえた制約式を追加することによって得られるこの最終的な計画問題の実現可能領域は，実現可能な整数格子点の凸包，$ODEF$ を含み，それ自身はまた，もとの実現可能領域，$OABC$ に含まれているのである。

うえの諸条件をみたす截断平面の作り方は幾通りか考えられよう。さきの数値例にそくしていえば，第1図における aa', bb', cc' は，それぞれ異なった

8) Gomory & Baumol, *op. cit.*, p. 526.

截断平面を表わしている。これらのなかで最も有効なのは，aa' であり，それに対応した制約式を追加することによって，この場合の最適整数解は，A点よりE点に移るのである。なお，第2図は，(1.6)，(1.7) にs_1，s_2 というスラック変数をそれぞれ導入して等式体系に変形し，これらのスラック変数を両軸にとって，x_1，x_2 の非負条件，整数条件を吟味したものである。第1図における破線の制約式は，第2図のそれと各々対応している[9]。

II　純粋型追加制約式

本節では，純粋型整数計画問題に対する追加制約式の数学的な構成とその性質の吟味を行なう[10]。

すでに説明したように，純粋型整数計画問題については，MIF 法が確立されており，従ってその追加制約式も R. E. Gomory によって考案されている。まず順序として，記号の説明をしておく。

ある有理数，a_j が与えられたとする。そのとき，それをこえない最大の整数を $[a_j]^*$ として表わせば，

$$(2.1)\qquad f_j=a_j-[a_j]^*\geq 0$$

が有理数，a_j の正の真分数部分 (positive proper fractional part) として定義される。たとえば，もし $a_j=2.4$ ならば $[a_j]^*=2$, $f_j=0.4$ となり $a_j=-2.4$ ならば $[a_j]^*=-3$, $f_j=0.6$ となる。後の参考のために，a_j の正の真分数部分の補数 (complement) を，$-a_j$ の真分数部分として，それを $\bar{f}_j$ で表わすことにする。そうすれば，次の関係式が成立する。

$$(2.2)\qquad \bar{f}_j=\begin{cases}1-f_j & (\text{ただし，} f_j>0 \text{ のとき})\\ 0 & (\text{ただし，} f_j=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

さて，以上の記号を用いるならば，次の2つの定理が成立することをみることが出来る。

---

9) グラフにおける矢印の向きは，それぞれの截断平面によって切り落される方向を表わしている。
10) 本節ならびに次節は，主として Dantzig, *op. cit.*, pp. 521-535 に基づく展開である。なお，記号は，1節でのそれと統一する意味で変更した。

定理 1 $j=0$ を除いたすべての a_{ij} が非負である方程式

(2.3) $$t_i'=a_{i0}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-t_j) \qquad (\text{ただし，}[a_{i0}]^*<a_{i0})$$

において，t_i' が整数変数であり，t_j は非負であることが要請されているならば，整数値，t_i' をもたらすすべての t_j について，次の線型不等式

(2.4) $$f_{i0}\leq\sum_{j=1}^{n}a_{ij}t_j, \qquad \text{ただし，すべての } a_{ij}\geq 0$$

が成立するが，これは $j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して $t_j=0$ とおくことによって得られる基本解については成立しない。

(証明) $a_{i0}=[a_{i0}]^*+f_{i0}$ と書き表わす。これを (2.3) に代入して変形すれば，次式を得る。

(2.5) $$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}t_j=f_{i0}+[a_{i0}]^*-t_i'$$

この式において，a_{ij} は非負であることが仮定されており，かつまた t_j は非負であることが要請されていることから，(2.5) の左辺は非負の数値を取らなければならない。しかるにその左辺は，f_{i0} より整数値，$[a_{i0}]^*-t_i'$ だけ異なっている。従って，左辺は非負の数値，f_{i0}，$1+f_{i0}$，$2+f_{i0}$，…… のうちのいずれか1つでなければならない。それゆえに，すべての場合について (2.4) が成立する。 (証明了)

さらに (2.4) は，次の等式に変形できる。

(2.6) $$s_i=-f_{i0}-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-t_j), \qquad s_i\geq 0,\ \text{すべての } a_{ij}\geq 0$$

ただし，s_i は非負の整数値をとることが要請されたスラック変数である。

ここで，さらに t_j が整数でなければならないという条件を加えれば，新しい，より強い制約式を得ることが出来る。

定理 2 次の方程式

(2.7) $$t_i'=a_{i0}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-t_j) \qquad (\text{ただし，}[a_{i0}]^*<a_{i0})$$

において，t_i' が整数変数であり，t_j は非負の整数値をとる変数であることが要請されているならば，整数値，t_i' をもたらすすべての t_j について，次の線型不等式

(2.8) $$f_{i0}\leq\sum_{j=1}^{n}f_{ij}t_j, \qquad \text{ただし，すべての } f_{ij}\geq 0$$

が成立するが，これは $j=1, 2, \cdots\cdots, n$ に対して $t_j=0$ とおくことによって得られる基本解については成立しない。

（証明） まずこの定理2において，a_{ij} は符号上の制約がなく，t_j は非負の整数であることが仮定されている。そこで，定理1において，$a_{i0}=[a_{i0}]^*+f_{i0}$ と表わしたのと同じように，a_{ij} についてもこれを，整数部分と分数部分との和，即ち，$[a_{ij}]^*+f_{ij}$ に分解し，その各々を (2.7) に代入して変形すれば，次式を得る。

$$\text{(2.9)} \qquad \{t_i'-[a_{i0}]^*+\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}]^*t_j\}=f_{i0}+\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(-t_j)$$

この左辺の数値は整数であり，f_{ij} は非負であることから，この式にさきの定理1を適用すれば (2.8) を得る。 (証明了)

さらに (2.8) を次のように書き表わすことも出来る。

$$\text{(2.10)} \qquad s_i^g=-f_{i0}-\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(-t_j), \qquad s_i^g\geq 0, \text{ すべての } f_{ij}\geq 0$$

ただし，s_i^g は非負の整数値をとることが要請されているスラック変数である。なお，(2.10) における g の記号は，s_i^g が Gomory の考案した追加制約式のスラック変数であることを表わすものとして採用しておく。

いま求めた (2.10) ——または (2.8) ——が MIF 法における Gomory の追加制約式とよばれるものにあたり，幾何学的には，第1図に描かれた aa' のような直線に対応するものである。従って，この新しい制約式は，前節で指摘した4つの性質，(i)，(ii)，(iii)，(iv)をいずれもみたしている[11]。

以上の4つの性質に加えて，この新しい追加制約式，(2.8) は，さらに幾つかの重要な性質を有している。そこで，これらの残された重要な性質を簡単に言及しておくことにする[12]。

(v) もしも新しい追加制約式 (2.8) を，(1.1) におけるもとの変数[13]，x_j で表わすならばそれは全整数不等式 (all-integer inequality)，即ち，すべ

11) (i)，(iii) については，簡単に判明しよう。(ii) については，Gomory & Baumol, *op. cit.*, pp. 526–527, 脚注3を参照。(iv) の証明は，かなり難しいがある条件のもとですでに明らかにされている。Gomory, [6], pp. 287–291; Dantzig, *op. cit.*, pp. 532–535 参照。

12) Gomory & Baumol, *op. cit.*, pp. 544–545.

13) slack 変数は含めない。

ての係数と定数項が整数であるような不等式になる。

(vi) もしも新しい追加制約式，(2.8) を，(v) に従ってもとの変数 x_j で表わすならば，そのとき得られる定数項を人為的資源制約 (artificial resource limit) と見なすことができ，それを $i>m$ に対する Q_i と書くことにする。そうすれば，もとの問題でのすべての Q_i——即ち (1.1) における $i\leq m$ に対するすべての Q_i——が非負であることを想定する限りにおいて，$i>m$ に対する Q_i もまた非負となる。

(vii) もしもある変数，$x_{j'}$ の係数である $a_{kj'}^*$ (ただし，$k=1, 2, \cdots\cdots, m$) が，もとの問題，即ち (1.1) においてすべて非負であるならば，そのとき $x_{j'}$ の係数は，新しい追加制約式 (2.8) を (v) に従ってもとの変数 x_j で表わすならば，やはりまた非負となる。

なお，純粋型整数計画問題を MIF 法によって解くための計算手順は，次のように書くことが出来る[14]。

① 与えられた整数計画問題のうち，整数条件を無視した通常の線型計画問題を，シンプレックス法で解く。

② このとき得られる解が非整数であれば，新しい制約式 (2.10) を作り，それをもとの線型計画問題に付加する。

③ 新しい制約式 (2.10) を付加したことによって拡大された新しい線型計画問題を，双対シンプレックス法[15]で解く。

④ このとき得られる解が非整数であれば，②へ戻って，以上の手順を最適整数解が得られるまで繰り返す。

計算の途中において，(2.7) の型をした異なった方程式[16]に応じて，(2.10) の型をしたそれぞれ異なった幾つかの制約式を作ることが可能となる場合が，しばしば起り得るであろう。そのような場合には，②の手順において，それら

14) Gomory & Baumol, *op. cit.*, p. 527.

15) これは，与えられた問題の双対問題を，通常のシンプレックス法を用いて解くことと同じである。双対シンプレックス法を用いる理由は，新しい問題の解が，表の問題については実現可能でないが，その双対問題については実現可能であるからに他ならない。

16) 異なった i の値に対応する方程式を意味する。

のうちのどれか1つを選べばよいわけである。さらにそのとき，f_{i0}/f_{ij} ($j=1, 2, \cdots\cdots, n$) の平均値を出来るだけ大きくするように新しい制約式 (2.10) を選ぶことにすれば，その新しい制約式は余分の実現可能領域——第1図におけるもとの実現可能領域のなかで，斜線を施していない部分にあたる——を出来るだけ大きく切り落す，ということが立証されうる[17]。それゆえに，よりはやく最適整数解に到達することが期待される。

実際の計算を行なう場合には，それに対する1つの近似として，最初の要素，f_{i0} が最も大きい i についての方程式，(2.7) を選び，それをもとにして，新しい制約式，(2.10) を作ることが考えられる[18]。

Ⅲ 混合型追加制約式

本節では，截断平面法の混合型整数計画問題への適用を試みる。

混合型整数計画問題とは，I節で定義したように，変数のすべてではなく，そのうちの幾つかが整数値をとることを要請されている問題である。事実，この種の混合型整数計画問題へ変換しうる領域は非常に広い[19]。しかしながら，その解法についてみる限り，純粋型整数計画問題にくらべて，十分に解明しつくされているとはいえない。また，与えられた問題の特殊な形式的側面に注目して，その問題固有の解法も幾つか考案され，すでに見るべき成果をあげているものもある[20]。

しかし本節では，いまなお多くの問題を内包しているとはいえ，線型計画問題への変換による解法——即ち，截断平面法——が，その双対問題を通して経済学的意義を考えることが出来るという点に注目して，混合型整数計画問題についても敢えて截断平面法を取り上げ，その一般化を試みることにする。

---

17) Gomory & Baumol, *op. cit.*, p. 527.

18) 追加制約式の経済学的意義については，Baumol, 〔1〕, pp. 124-125 参照。なお，純枠型整数計画問題に対する截断平面法の接近として，Bealeは Gomory の考案による "All-Integer Method" をあげているが，文献不足につき，本稿では割愛した。

19) 整数計画の応用に関するすぐれた展望が，Dantzig, 〔4〕に与えられている。

20) Beale, *op. cit.*, pp. 219-228.

混合型整数計画問題では，変数に予め付与されている条件に応じて，その変数を次の2つに分類することが出来る。その1つは，整数値をとることが要請されている変数であり，従ってこれを「整数変数」(integer variable) とよぶことにする。他の1つは，分数値をとることが許されている変数であり，従ってこれを「分数変数」(fractional variable) とよぶことにする[21]。

まず最初に，前節における2つの定理の拡張として，次の定理を得る。

定理 3 次の方程式

$$(3.1)\qquad t_i'=a_{i0}+\sum_{j=1}^{k}a_{ij}(-t_j)+\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}(-t_j)\qquad (\text{ただし，}[a_{i0}]^*<a_{i0})$$

において，t_i' が整数変数であり，$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$ に対する t_j は非負の整数変数で，その係数 a_{ij} は符号上の制約がないものとし，また $j=k+1,\ \cdots\cdots,\ n$ に対する t_j は非負の分数変数で，その係数 a_{ij} はすべて非負（または，すべて非正）であるものとすれば，そのとき整数値 t_i' をもたらすいかなる t_j に対しても，次の線型不等式

$$(3.2)\qquad f_{i0}\leq\sum_{j=1}^{k}f_{ij}t_j+\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}t_j$$

が，$j=k+1,\ \cdots\cdots,\ n$ に対するすべての a_{ij} が非負の場合に成立し，

$$(3.3)\qquad \bar{f}_{i0}\leq\sum_{j=1}^{k}\bar{f}_{ij}t_j-\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}t_j$$

が，$j=k+1,\ \cdots\cdots,\ n$ に対するすべての a_{ij} が非正の場合に成立する。

（証明） $j=k+1,\ \cdots\cdots,\ n$ に対する a_{ij} の符号に応じて，起りうる2つの場合をそれぞれ分けて考える。

(1) もしも $j=k+1,\ \cdots\cdots,\ n$ に対するすべての a_{ij} が非負であるならば，$j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k$ に対する $a_{ij}=[a_{ij}]^*+f_{ij}$ を (3.1) に代入し，これを変形すれば次式を得る。

$$(3.4)\qquad \{t_i'-[a_{i0}]^*+\sum_{j=1}^{k}[a_{ij}]^*t_j\}=f_{i0}+\sum_{j=1}^{k}f_{ij}(-t_j)+\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}(-t_j)$$

上式における左辺のすべての項は整数であり，さらに $j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k$ に対する f_{ij} ならびに，$j=k+1,\ \cdots\cdots,\ n$ に対する a_{ij} がともにすべて非負であることから，これに定理1を適用すれば (3.2) を得る。

21) 前者を，「離散変数」，後者を，「連続変数」とよぶことも出来るであろう。

(2)　もしも $j=k+1$, ……, n に対するすべての a_{ij} が非正であるならば，まず (3.1) に -1 を乗じて，それを (3.1)′ とよぶことにする。また $\bar{f}_j$ の定義から，次の関係式を得る。

$$(3.5)\qquad -a_{ij}=[-a_{ij}]^*+\bar{f}_{ij}$$

そこで上式を (3.1)′ の $j=0$, 1, ……, k に対する $-a_{ij}$ に代入し，これを変形すれば，次の方程式を得る。

$$(3.6)\qquad \{-t_i'-[-a_{i0}]^*+\sum_{j=1}^{k}[-a_{ij}]^*t_j\}=\bar{f}_{i0}+\sum_{j=1}^{k}\bar{f}_{ij}(-t_j)-\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}(-t_j)$$

(3.4) と同様に，(3.6) における左辺のすべての項は整数であり，さらに $j=0$, 1, ……, k に対する $\bar{f}_{ij}$ ならびに $j=k+1$, ……, n に対する $-a_{ij}$ がともにすべて非負であることから，これに定理1を適用すれば，(3.3) を得る。

（証明了）

さらに付言すれば，(3.2), (3.3) は，ともに非負の整数値をとるスラック変数を導入することによって，等式に変形され得る。

しかしながら，ここで注意すべきこととして，定理3は，分数変数のすべての係数が非負の値をとる——即ち，(1)の場合——か，あるいはまた，非正の値をとる——即ち，(2)の場合——かのいずれかである，という想定に基づいていることである。そしてこのような場合が，現実の計算過程において常に成立しているという保証はない。そこで，分数変数の係数，即ち $j=k+1$, ……, n に対する a_{ij} について，その符号上の制約がない場合における新しい制約式を構成する必要が生じてくる。

そのための準備として，次の方程式についてまず考えることにする。

$$(3.7)\qquad t_i'=a_{i0}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-t_j)=a_{i0}-P+N\quad（ただし，[a_{i0}]^*<a_{i0}）$$

上式において，t_i' は整数変数であり，$-P$ と N とは，係数 a_{ij} が正（厳密にいえば，非負）のものと負のものとに対応した各項の部分和をそれぞれ表わすものとする。従って，$-P=\sum a_{ij}(-t_j)$（ただし，$a_{ij}\geq 0$），$N=\sum a_{ij}(-t_j)$（ただし，$a_{ij}<0$）より，P, N はともに非負である。

もしも t_j のある値に対して，$-P+N\geq 0$ が成立しているならば，そのとき

$t_i'=a_{i0}-P+N$ が整数でなければならないことから，$f_{i0}-P+N$ もまた整数でなければならなくなる。しかしこの後者は，$[a_{i0}]^*<a_{i0}$ の仮定より，正の値をとる。従って，$1\leq f_{i0}-P+N$ が成立し，これはまた，$\bar{f}_{i0}\leq -P+N$ と等しいことから，次の不等式を得る。

$$(3.8)\qquad 1\leq -\frac{P}{\bar{f}_{i0}}+\frac{N}{\bar{f}_{i0}}\leq\frac{P}{f_{i0}}+\frac{N}{\bar{f}_{i0}}$$

もしも t_j のある他の値に対して，$-P+N<0$ が成立しているならば，そのとき $-t_i'=-a_{i0}+P-N$ はまた整数でなければならないことに変りはない。従って，$-a_{i0}=[-a_{i0}]^*+\bar{f}_{i0}$ をその式に代入して，それを変形すれば，次式を得る。

$$(3.9)\qquad \{-t_i'-[-a_{i0}]^*\}=\bar{f}_{i0}+P-N$$

上式の右辺の数値が正の整数であることから，$1\leq\bar{f}_{i0}+P-N$ が成立し，これはまた，$f_{i0}\leq P-N$ と等しいことから，次の不等式を得る。

$$(3.10)\qquad 1\leq\frac{P}{f_{i0}}-\frac{N}{f_{i0}}\leq\frac{P}{f_{i0}}+\frac{N}{\bar{f}_{i0}}$$

それゆえに，(3.8) と (3.10) の両式から，t_j の値如何にかかわらずに，次の不等式が成立する[22]。

$$(3.11)\qquad 1\leq\frac{P}{f_{i0}}+\frac{N}{\bar{f}_{i0}}$$

さて，以上の関係をもとにして，混合型整数計画問題に対する1つの新しい追加制約式を構成することが可能である。

定理 4 次の方程式

$$(3.12)\qquad t_i'=a_{i0}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-t_j)\qquad (\text{ただし，}[a_{i0}]^*<a_{i0})$$

において，t_i' が整数変数であり，t_j は非負であることが要請されているならば，そのとき

$$(3.13)\qquad 1\leq\frac{1}{f_{i0}}\Big(\sum_{J_1}f_{ij}t_j+\sum_{J_3}a_{ij}t_j\Big)+\frac{1}{\bar{f}_{i0}}\Big(\sum_{J_2}f_{ij}t_j-\sum_{J_4}a_{ij}t_j\Big)$$

が，整数値 t_i' をもたらすすべての t_j に対して成立するが，これは $j=1, 2, \cdots\cdots, n$ に対して $t_j=0$ とおくことによって得られる基本解については成立し

22) Beale, *op. cit.*, 224-225 に記されている混合型追加制約式に対応するものである。

ない。ただし，ここにおいて，整数変数 t_j に対して

$$\begin{cases} \text{もしも}\quad f_{ij}\leq f_{i0}\ (\text{即ち，}\bar{f}_{ij}\geq\bar{f}_{i0})\ \text{ならば，}j\in J_1 \\ \text{もしも}\quad f_{ij}>f_{i0}\ (\text{即ち，}\bar{f}_{ij}<\bar{f}_{i0})\ \text{ならば，}j\in J_2 \end{cases}$$

分数変数 t_j に対して

$$\begin{cases} \text{もしも}\quad a_{ij}\geq 0\ \text{ならば，}j\in J_3 \\ \text{もしも}\quad a_{ij}<0\ \text{ならば，}j\in J_4 \end{cases}$$

を，それぞれ表わすものとする。

（証明）　もしも t_j が (3.12) において整数変数であるならば，$f_{ij}\leq f_{i0}$ か，$f_{ij}>f_{i0}$ かに応じて，それぞれ $a_{ij}=[a_{ij}]^*+f_{ij}$ か $a_{ij}=-[-a_{ij}]^*-\bar{f}_{ij}$ かのいずれか一方を (3.12) に代入すれば，次式を得る。

$$(3.14)\qquad t_i'=a_{i0}+\sum_{J_1}([a_{ij}]^*+f_{ij})(-t_j)+\sum_{J_2}(-[-a_{ij}]^*-\bar{f}_{ij})(-t_j)$$
$$+\sum_{J_3}a_{ij}(-t_j)+\sum_{J_4}a_{ij}(-t_j)$$

上式のすべての整数項を左辺に移して，それを t_i^* とおけば，整数変数 t_i^*は次のように表わされる。

$$(3.15)\qquad t_i^*\{=t_i'-\sum_{J_1}[a_{ij}]^*(-t_j)+\sum_{J_2}[-a_{ij}]^*(-t_j)\}$$
$$=a_{i0}-(\sum_{J_1}f_{ij}t_j+\sum_{J_3}a_{ij}t_j)+(\sum_{J_2}\bar{f}_{ij}t_j-\sum_{J_4}a_{ij}t_j)$$

さて，上式右辺の第1番目の括弧のなかの数値と第2番目の括弧のなかの数値とを，さきの (3.7) における P, N とそれぞれ見なすことによって，(3.11) に対応する (3.13) の不等式を得る。　（証明了）

もしも，非負のスラック変数 s_i^m を (3.13) に導入すれば，それを次のように書き表わすことが出来る。

$$(3.16)\qquad s_i^m=-1+\frac{1}{f_{i0}}(\sum_{J_1}f_{ij}t_j+\sum_{J_3}a_{ij}t_j)+\frac{1}{\bar{f}_{i0}}(\sum_{J_2}\bar{f}_{ij}t_j-\sum_{J_4}a_{ij}t_j)$$

なお，(3.16) における m の記号は，s_i^m が混合型問題に対する追加制約式のスラック変数であることを表わすものとして採用しておく。

しかしながら，ここで注意すべき点として，定理4における不等式 (3.13) に導入された新しい変数 s_i^m を，整数変数として処理することが出来ないということがあげられる。従って，整数変数 t_i' に基づいて構成された追加制約式

(3.16) のスラック変数 s_i^m を，実際的な計算の過程においては，分数変数として取り扱わなければならなくなる。

また，さきの定理4において，(3.12) に含まれている非基底変数 t_j のうち，特に整数変数にあたるものに限って，それを $f_{ij}\leq f_{i0}$ か $f_{ij}>f_{i0}$ かに応じて，J_1 と J_2 との2つにグループ分けした理由は，新しく追加される制約式の定数項が1であるとき，整数変数にかかるすべての係数が決して1をこえないようにしようとしたために他ならない。そしてこのことは，グループ分けをせずに導出される制約式にくらべて，より強い制約式——従って，より有効であると期待される制約式——を求めようとする意図に基づくものである[23]。

新しく構成された追加制約式において，非基底変数にかかる係数が，非負の領域内で出来る限り小さければ小さい程，もとの線型問題についての実現可能領域のうち，余分な部分をより大きく截断することが期待されるであろう。

いま，この考え方を生かし，さきの定理4を媒介として，混合型整数計画問題の特殊なタイプとしての純粋型整数計画問題を考えることにすれば，次のような新しい追加制約式を構成することもまた可能となる。

$$(3.17)\qquad 1\leq\frac{1}{f_{i0}}\Big(\sum_{J_1}f_{ij}t_j\Big)+\frac{1}{\bar{f}_{i0}}\Big(\sum_{J_2}\bar{f}_{ij}t_j\Big)$$

ただし，上式は，定理2における (2.7) から構成したものであり，なお，すべての非基底変数 t_j に対して，

$$\begin{cases}\text{もしも}\quad f_{ij}\leq f_{i0}\ (\text{即ち，}\bar{f}_{ij}\geq\bar{f}_{i0})\ \text{ならば，}j\in J_1\\ \text{もしも}\quad f_{ij}>f_{i0}\ (\text{即ち，}\bar{f}_{ij}<\bar{f}_{i0})\ \text{ならば，}j\in J_2\end{cases}$$

を，それぞれ表わしている。

さらに付言すれば，この制約式 (3.17) において，非基底変数のグループ分けをしなかったものとして，さきの定理2における制約式 (2.8) ——従って，Gomory の追加制約式 (2.10)——を考えることが出来るであろう。

ここで，再び混合型整数計画問題に立ち帰ってみるならば，定理4における

23) 幾何学的には，非基底変数を各軸にとったとき，その正象限において，截断面が原点と反対側に離れる程，より深く切り落すからであると考えることが出来る。

追加制約式 (3.13) と異なったもう1つのタイプの追加制約式を構成することが可能である。

いま，次の方程式

(3.18)　$t_i'=a_{i0}+\sum_{j=1}^{k}a_{ij}(-t_j)+\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}(-t_j)$ (ただし，$[a_{i0}]^*<a_{i0}$)

において，t_i' が整数変数であり，$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$ に対する t_j は非負の整数変数，$j=k+1,\ \cdots\cdots,\ n$ に対する t_j は非負の分数変数であることが要請されているものとする。

まず，(2.1) の考え方を適用して

(3.19)　$[\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}(-t_i)]^*=\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}(-t_j)-\tau \qquad (0\leq\tau<1)$

とおく。ただし，

$\begin{cases}[\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}(-t_j)]^* & \text{は，符号上の制約をもたない新しい整数変数}\\ \tau & \text{は，分数変数項の総和についての正の真分数部分}\end{cases}$

を，それぞれ表わすものとする。

このとき，$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$ に対して，$a_{ij}=-[-a_{ij}]^*-\bar{f}_{ij}$ を (3.19) に代入し，整数項を左辺に移すと，次式を得る。

(3.20)
$$\{t_i'-[a_{i0}]^*+\sum_{j=1}^{k}[-a_{ij}]^*(-t_j)-[\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}(-t_j)]^*\}$$
$$=f_{i0}+\sum_{j=1}^{k}\bar{f}_{ij}t_j+\tau$$

上式の左辺は整数であり，右辺は正であることから，$1\leq f_{i0}+\sum_{j=1}^{k}\bar{f}_{ij}t_j+\tau$ の関係が成立し，従って，新しい追加制約式として，次式を得る。

(3.21)　$\bar{f}_{i0}\leq\sum_{j=1}^{k}\bar{f}_{ij}t_j+\tau$

これに，非負のスラック変数 $s_i{}^{m'}$ を導入すれば，次のように変形できる。

(3.22)　$s_i{}^{m'}=-\bar{f}_{i0}+\sum_{j=1}^{k}\bar{f}_{ij}t_j+\tau \qquad (0\leq\tau<1)$

なお，上式において $s_i{}^{m'}$ は非負の整数変数として処理することが可能となり，また τ は，1より小さい非負の有界変数 (bounded variable)，従って，分数変数として取り扱わなければならなくなる[24]。

24)　なお，(3.21)は，定理3の後半を適用することによっても，また導出できる。

さらに，この新しい追加制約式（3.21）に，さきの考え方——即ち，非基底変数にかかる係数の値を出来る限り小さくすることによって，より強い制約式を構成しようとする考え方——を生かすならば，非基底変数のうち，整数変数にあたるものを，$f_{ij} \leq f_{i0}$（即ち，$f_{ij} \geq f_{i0}$）か，$f_{ij} > f_{i0}$（即ち，$\bar{f}_{ij} < \bar{f}_{i0}$）かに応じて，$J_1$ と J_2 とにそれぞれグループ分けをすることによって，次のような新しい混合型追加制約式を構成することが出来る。

$$(3.23)\qquad 1 \leq \frac{1}{f_{i0}}\left(\sum_{J_1} f_{ij}t_j\right) + \frac{1}{\bar{f}_{i0}}\left(\sum_{J_2} \bar{f}_{ij}t_j + \tau\right)$$

さて，ここで混合型整数計画問題についての追加制約式として，定理4における（3.13）をとりあげ，その性質を，I節で提示した純粋型追加制約式に付与されている4つの性質と比較検討しておくことにする。

(i)′ すべての j に対して，$t_j=0$ となっているような，従来は実現可能であった点が，新しい追加制約式（3.13）によって排除される。

従って，(i)はそのまま成立する。

(ii)′ (3.13)の係数が，いずれも有理数であることを想定する限りにおいて，明白である。

従って，(ii)はそのまま成立する。ただし，「整数格子点」というとき，分数変数については，考慮する必要がない。

(iii)′ 定理4における（3.13）の構成の仕方から，t_j がこの計画問題における実現可能領域内の値をとる限り，（3.13）の関係は成立する。

従って，(iii)は基本的に成立する。ただし整数格子点という言葉は，整数変数についてのみ適用し得るが，分数変数については，従来実現可能であった点（常に整数値であるとは限らない）を排除してはならないこと，特に注意を要する。

(iv)′ 手順の有限性に対する証明は，混合型整数計画問題についても，ある条件のもとでは[25]，すでに証明されている。しかしながら，一般的状況のもとでの証明は未解決であり，特に混合型整数計画問題については，まだ

25) 追加制約式の構成の仕方，実現可能領域の有界性，等についての条件をさす。

十分に検証されていない点も多いといえる。

むすびにかえて

線型計画問題においては，すべての“activity”に対して，「分割可能性」(divisibility) の公準をおいている。従って，ある現実の問題を考えるとき，この公準が完全にはみたされていないとするならば，従来の線型計画による接近もかなりの後退を余儀なくされる。このとき，より有力な分析用具として考えられるのが，整数計画問題としての定式化である。その意味で，この整数計画問題に対する一般的な解法に注意が払われた。

われわれは，その解法の1つとして「截断平面法」を特にとりあげた。その理由は，それが新しい追加制約式——截断平面——を媒介として，与えられた整数計画問題を，拡大された通常の線型計画問題に還元して解くという点に注目し，従って，そこに双対問題もまた必ず存在することから，そのとき得られる双対価格を吟味しようとするために他ならなかった。

本稿では，整数計画問題に截断平面法を適用した場合，いかなる追加制約式が構成できるかをみてきた。そして，その構成の仕方も一義的ではない，ということが判明した。

従って，われわれに残されている次の課題は，双対価格の吟味である。いま，与えられた問題が，幾つかの“activity”のもとでの最適水準を決定する問題——即ち，資源の制約と技術条件とが与えられた場合に，生産物の総価値を最大にするようなその組み合せを求める問題——であると想定し，さらに，その“activity”が分割可能性の公準を完全にはみたさないとき，その双対価格(“shadow price”または“imputed price”ともよばれる）に，いかなる変化が生じるかを検討してみることである。

純粋型整数計画問題については，この方向に沿った吟味が，すでに R. E. Gomory によって試みられている。さらに彼は，追加制約式に課せられる双対価格を，もとの制約式に再配分するとき，その再計算された双対価格が，「資

源の効率的配分 (efficient allocation of resource) を達成するような分権的意思決定の構成を容認する」という性質を，基本的には失っていない，と指摘している。

従って，このことを1つのてがかりとして，混合型整数計画問題に関する双対価格の性質を吟味すること，ならびに，それに基づく，より経済学的に有意義な価格体系の構成を試みることが，われわれに残された次の課題である。

参 考 文 献

〔1〕 Baumol, W. J., *Economic Theory and Operations Analysis*, 1961.

〔2〕 Beale, E. M. L., "Survey of Integer Programming", *Operational Research Quarterly*, Vol. 16, No. 2, June 1965.

〔3〕 Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, 1963.

〔4〕 Dantzig, G. B., "On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables", *Econometrica*, Vol. 28, No. 1, 1960.

〔5〕 Gomory, R. E., & Baumol, W. J., "Integer Programming and Pricing", *Econometrica*, Vol. 28, No. 3, July 1960.

〔6〕 Gomory, R. E., "An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs", in Graves, R. L. & Wolf, P. (ed.), *Recent Advances in Mathematical Programming*, 1963.

〔7〕 Harris, P. M. J., "An Algorithm for Solving Mixed Integer Linear Programmes", *Operational Research Quarterly*, Vol. 15, No. 2, June 1964.

〔8〕 Koopmans, T. C., "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities", *Activity Analysis*, 1951.

〔9〕 Land, A. H. & Doig, A. G., "An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems", *Econometrica*, Vol. 28, No. 3, July 1960.

〔10〕 Markowitz, H. M. & Manne, A. S., "On the Solution of Discrete Programming Problems", *Econometrica*, Vol. 25, No. 1, 1957.

〔11〕 Vajda, S., *Mathematical Programming*, 1961.

〔12〕 安部栄造，整数解線型計画法問題，「経済学論究」第18巻第2号，昭和39年。

〔13〕 浅沼萬里，「資金配分問題」と数理計画法，「経済論叢」第96巻第6号，昭和40年12月。

〔14〕 古瀬大六，「生産の経済学」昭和39年。

〔15〕 根岸隆・浜田宏一，「計画理論入門」昭和37年。

〔16〕 Hadley, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Chapt. 8, Integer Linear Programming, 1964.