經濟論叢

第九十七巻　第五號

昭和四十一年五月

京都大學經濟學會

整数計画問題における双対価格

浅 沼 萬 里

ま え が き

前稿[1]で,「資金配分問題」との関連において, 整数計画法 (integer programming)〔以下 IP と略記〕を登場させ, 2つの方向から照明を加えた。

IP が解こうとする問題は, 投入産出にかんする不可分性の存在の下での最適化問題である。機械的な手順と, かぎられた時間・費用の枠内で, 数値解を確保するために, 種々の解法が開発されてきた。このことは, あきらかに, それ自体, 種々の応用領域で, 前進をもたらす。他方, 線型計画法 (lincar programming)〔以下 LP と略記〕と同様, IP も, 生産の最適編成と分権的決定との関連という問題の文脈において, 経済理論的に興味ぶかい, 考察の手がかりを提供する。

この, あとの文脈において中心的位置を占めるべきものは, 双対価格 (dual prices) の概念であるが, IP の歴史が新らしく, 数値計算法自体も最終的に確立してはいない状態にある[2]ためか, IP における双対価格の問題を論じた文献は, きわめて少ない[3]。

本稿は, Gomory の MIF 法にともなって与えられる双対価格, および Gomory and Baumol が考案した再計算双対価格の, 諸特性を考察することによって前稿を補完し, のちの展開にそなえる。既存文献の中, および相互の間にみられる, いくつかの不統一ないし不明瞭な部分が, 是正されているはずである。

---

1) 浅沼,〔1〕。
2) Beale,〔3〕; また Hadley,〔6〕参照。小規模なIP問題は, あきらかに列挙によって解けるから, 大規模な問題を速く解くことこそが数値計算法の試金石なのであるが, 大規模な問題では, 原理上巧妙な方法も, しばしば難点を示すことが報告されている。
3) 利用可能な文献は, Baumol,〔2〕; Gomory and Baumol,〔4〕; 根岸・浜田,〔8〕; および Weingartner,〔9〕。〔4〕がオリジナルな業績である。

I MIF 法——LP による IP の解法

議論の出発点は，Gomory の考案した IP 解法，Method of Integer Forms〔以下 MIF法 と略記〕である[4]。

IP 問題は，一般に，次の形で与えられる。

「 $\sum_{j=1}^{n} a^*_{ij}x_j \leqq Q_i \quad (i=1, \cdots\cdots, m)$ (a)

$x_j \geqq 0$ (b)

x_j：整数[5] (c) (I・1)

の下で

$$z = a^*_{00} + \sum_{j=1}^{n}(-a^*_{0j})x_j \qquad \text{(d)}$$

を最大化せよ。」

(I・1)から制約(c)を除いたものは，１つのLP問題であるが，これを，LP(I・1)と名づける。

LP(I・1)を，シンプレックス法[6] で解くとき，計算の第１タブローは，次の関係を表現する。

$$\begin{cases} z = a^*_{00} + \sum_{j=1}^{n} a^*_{0j}(-x_j) \\ \lambda_i = a^*_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a^*_{ij}(-x_j) \quad (i=1, \cdots\cdots, m) \end{cases} \qquad \text{(I・2)}$$

ここに，$a^*_{i0}=Q_i$；λ_i は第 i 制約式のスラック変数。

また，任意の段階のタブローは，次の関係を表現する。

$$\begin{cases} z = a_{00} + \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(-t_j) \\ t_i' = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-t_j) \quad (i=1, \cdots\cdots, m) \end{cases} \qquad \text{(I・3)}$$

---

4) MIF 法にかんする，以下の記述は，記号法を Gomory and Baumol, *op. cit.* に合せ，展開は，おおむね Hadley, *op. cit.* によっている。

5) n 個の j すべてについて整数条件をおけば純粋型，１部に連続変数を許せば混合型の，IP となる。本稿では，純粋型だけをあつかう。

6) 正確には，Tuckerの簡約シンプレックス法。変換規則は次のとおり。① ピヴォット元$a_{ij} \to 1/a_{ij}$, ② 第 j 列の元 $a_{vj} \to -a_{vj}/a_{ij}$, ③ 第 i 行の元，$a_{iw} \to a_{iw}/a_{ij}$, ④ その他の元 $a_{vw} \to a_{vw} - a_{iw}\,a_{vj}/a_{ij}$.

ここに，t_i' はその段階の基本変数，t_j はその段階の非基本変数であって，全部で $n+m$ 個の変数 x_j および λ_i のうち，適当な m 個が t_i'，残り n 個が t_j に，なっている。

いま，$a_{i0}\geq 0$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ m)$ かつ $a_{0j}\geq 0$ $(j=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ となれば，最適タブローに到達したわけであるが，ここで1つ以上の i につき a_{i0} が非整数であれば，LP(I・1)の基本最適解，

$$\begin{cases} t_i'=a_{i0} & (i=1,\ \cdots\cdots,\ m) \\ t_j=0 & (j=1,\ \cdots\cdots,\ n) \end{cases} \qquad (\mathrm{I}\cdot 4)$$

は，(I・1)の可能解でありえない。

そこで，a_{i0} が非整数であるような i のうち1つ[7] につき，(I・3)の第 i 制約式を，次のように分解する。

$$t_i'=k_{i0}+\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(-t_j)+f_{i0}+\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(-t_j) \qquad (\mathrm{I}\cdot 5)$$

ここに，k_{ij}：a_{ij} をこえない最大の整数，
$0\leq f_{ij}<1.$ $\Bigg\}(j=0,1,\ \cdots\cdots,\ n)$

また，定義により，$f_{i0}>0$，$f_{ij}\geq 0(j=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ (I・6)

さて，(I・3)の任意の整数解に対して，$t_i'-k_{i0}-\sum k_{ij}(-t_j)$ は整数であるから，$f_{i0}+\sum f_{ij}\ (-t_j)$ も整数であるはず。これを (I・5) と合わせると，(I・1)の各可能解は，

$$f_{i0}+\sum f_{ij}(-t_j)\leq 0 \qquad (\mathrm{I}\cdot 7)$$

または，

$$s_i=-f_{i0}+\sum(-f_{ij})\geq 0(-t_j) \qquad (\mathrm{I}\cdot 8)$$

を，みたすことがわかる。他方，あきらかに，LP(I・1)の基本最適解(I・4)は，(I・8)を，みたさない。よって，いま，(I・8)を新らしい制約式として，LP(I・1)に付加すれば，LP(I・1)の可能領域は切りちぢめられるが，(I・1)の可能解はすべて，新らしい LP の可能領域の中に残る。

7) このような i が2つ以上あるとき，えらび方により，整数解に到達する計算プロセスは変ってくる可能性がある。

この事実を利用して，次のような手順で IP を解く道すじが開ける。

① LP(I・1)を解く。

② 最適基本解が整数解かどうかしらべる。

i) 整数解ならば，終了。

ii) 整数解でなければ，③に進む。

③ いましらべたタブローから(I・8)の形の制約式を作り，問題に付加する。

④ こうしてできた新らしい LP 問題を解く。

⑤ ②にもどる。

これが，Gomory の，MIF 法である。

操作が有限回で終ることを保証するためには，上記の手順に，もうすこし限定をつけ加えなければならない[8] が，以下の議論の前提としては，さしあたり，上にのべたことで十分である。

II 直接双対価格

以下，われわれは，(I・1)が 1 つの資源配分問題を担っている場合を考える。すなわち，

Q_i：第 i 資源の利用可能量（キャパシティ）。

a_{ij}：第 i 資源の，第 j アクティビティへの投入係数。

x_j：第 j アクティビティの稼動水準。

a_{0j}：第 j アクティビティ稼動 1 単位あたり収益。

このとき，(I・1)の最適解に照応する，各資源 1 単位あたりの評価をみいだすことが，われわれの問題である。

A MIF 法が与える LP 双対価格

MIF 法によって，(I・1) を解いたとき，LP (I・1) にいくつかの制約式を付加してつくられた 1 つの LP が解けている——この LP を LP(I・A) と名づけておこう——わけだから，これに対応する 1 組の LP 双対価格が得られる。

---

8) Hadley, *op. cit.*, pp. 276-281 参照。

Gomory and Baumolは，これを，the computed dual pricesとよんでいるが，タブローから直接に得られる量という意味で，直接双対価格ということばを，あてておこう。

以下，われわれは，この量，したがって実はLP(I・A)の双対価格であるものを，IP問題(I・1)に対する双対価格として利用するという線にそって進み，この量がどの程度有意味であるかを検討する。

この量は，LP双対価格の一般的性質にしたがい，次のような性質をもっていて，そのかぎり，価格として解釈し，利用するのに好都合である。

① 非負である。

② その価格で投入を評価すると，最適解で採用されているアクティビティについて 費用＝収益，他のアクティビティについて 費用＞収益[9] となる。

③ その価格で評価した資源総価値は，総収益の最大値にひとしい。

④ 利用限界まで使用されない資源には，ゼロ価格をわりつける。

だが，ここで解かれているLPは，本来の資源制約式m個に，整数解を保証するための，1個以上の追加制約式を付加して，構成されたものであった。この事情にもとづき，直接双対価格には，いくつかの特殊性が現われる。

B 追加制約式の影響

さしあたり，量的に，次のような現象が生じる。

① 追加制約式のつけかたは，一般に，ただ1通りではない。このえらび方によって，直接双対価格の値は，ことなりうる。

② 追加制約式にも価格が対応し，すくなくとも最後の制約式は，かならず正価格となる。

③ 原制約式に対する価格を，LP(I・1)が解けた段階で与えられる価格とくらべると，個別的には，正→ゼロ，ゼロ→正，いずれの変化も生じるが，本

9) 退化のある場合に等号が成立。
10) Gomory and Baumol, *op. cit.*, p. 528.

来の資源全体の評価は，次の2つの事実と②によって，かならず低下する。

(1) LP 解での z の値>IP 解での z の値。

(2) (I・8)の形で導入された追加制約式を，本来の変数 x_j にかんする不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a^*_{sj}x_j \leq Q_s$$

に変換してみると，$Q_s \geq 0$ であることが証明できる[11]。

C 追加制約式の解釈

LP タブローが与える情報を，価格として意味づけることをやめないかぎり，追加制約式にも，形式的に価格が対応するから，この「価格」に，どのような経済学的意味づけを与えるべきかという，質的な問題が生まれる。

まず，LP 双対価格の意味を思いだしておこう。たとえば，LP(I・1)において，第 i 制約式ないし第 i スラック変数に連関する価格とは，第 i 資源（現在量 Q_i）の，限界収入生産力を表わしていた。

さて，B—③—(2)によって，追加制約式を，1種の資源制約式と解釈するみちが，形式的には，開かれる。現在量 Q_s で存在する，なんらかの資源ないし設備を，適切に対応させることができれば，問題の価格は，この資源の限界収入生産力として意味づけることが，一応は，可能となるだろう。

しかしながら，追加制約式がまったく計算上の要請から構成されるものであり，しかもそのえらび方が1通りとはかぎらないために，具体的な資源ないし設備を対応させようとする試みは，困難をまぬかれない[12]。

いま，われわれは，Gomory and Baumol とともに，追加制約式に対応する Q_s を，整数解を保証するための「人為的」キャパシティ[13]，とよぶことで満足しておこう。

D 双対格価と限界収入生産力

だが，IP において真に重要な問題は，ここにいうような意味での双対価格

11) 証明は，*ibid.*, Appendix A, pp. 544–545. 直観的には，この命題は，追加制約式に対応する超平面が，かならず解空間の非負象限を通ることを意味する。

12) この試みをおこなっているのは Baumol, *op. cit.* であるが，その解釈はあいまいさをまぬかれていない。*Ibid.*, pp. 156–157.

13) Gomory and Baumol, *op. cit.*, p. 530.

が，本来の資源に対してであれ，「人為的」キャパシティに対してであれ，限界収入生産力の指標としての機能を，もはや発揮しないということである。この事実は，Gomory and Baumol がすでに指摘しているが[14]，ややくわしく，事態をみておくことにしよう。

〔1〕 LP 双対価格と限界収入生産力

LP において，双対価格が限界収入生産力を示すとは，どのようなことなのだろうか。

(a) 基本的関係

いま，ある LP 問題が，

「$Ax=b$, $x\geq 0$ の下で，
$z=c'x$ を最大化せよ」

という形で与えられているとする。ただし，Aは，投入係数からなるm行n列の行列，bは資源の存在量を示すm次ベクトル，xは各アクティビティの操業水準を示すn次ベクトル，c'は各アクティビティ操業1単位あたり収益を示すn次ベクトル。いま，m行m列の最適基底をB，これに対応する変数，および単位収益の，m次ベクトルを，それぞれ x_B，c'_B とすれば，双対価格は，m次ベクトル $u'_B=c'_BB^{-1}$ で与えられる。また解は，$x_B=B^{-1}b$，$z=c'_Bx_B$ によって与えられる。

いま，bを始点として，資源の存在量をパラメトリックに $b+\theta r$ に動かしてみる。ただし，rは任意所与のm次ベクトル，θは非負スカラー。その結果，解x_Bおよびzは変動するであろうが，その変動分の予測に，始点で問題を解くことによって得られていた情報としての双対価格は，どの程度役に立つか。

Bが基底であり続けるためには，一般に，θにある臨界値θ_cが存在するであろうが[15]，$\theta\leq\theta_c$ であるかぎり，任意の資源量変化 θr に対し，収益増分 Δzは，$\Delta z=c'_BB^{-1}(\theta r)=u'_B(\theta r)$ であり，とくに $r=\pm e_i$（e_iは第i成分が1の単位

14) *Ibid.*, pp. 530–531.
15) この臨界値の求め方は，Hadley,〔5〕, pp. 382–384 を見よ。

ベクトル) をおくと，$\Delta z=u_{Bi}(\pm\theta)$ である（ただし，u_{Bi} はベクトル u'_B の第 i 成分)。いいかえると，第 i 資源の任意の増分 Δb_i に対し $\frac{\Delta z}{\Delta b_i}=u_{Bi}$ という関係が成立する。

(b) 例解

例題1〔(I・1)に相当〕から整数条件を除いたときにできるLP〔LP(I・1)に相当〕について，第2資源 b_2 の変化に対する z の軌跡を描いてみる（第1図)。c 点が，最初与えられたLPの解に対応する点であって，解と同時に（第3タブローで）与えられる第2資源の双対価格 $\frac{3}{2}$ は，この点における，グラフの勾配を与える。$-\frac{1}{3}\leq\Delta b_2\leq1$ であるかぎり，Δz は，正確に，(c 点での双対価格)×(Δb_2) によって与えられるが，これはLPの1特色である。

〔2〕 直接双対価格の機能

さて，直接双対価格は，LP(I・A)から得られるLP双対価格であって，LP(I・A)に対しては，完全に，上記の議論が当てはまる。

先の例題1について図示しよう（第2図)。第4タブローに表われる，第2資源の双対価格1は，図の D 点における，グラフの勾配を与える。第4タブローが表現しているＬＰを対象に，第2資源の存在を変動させてみるとき，$-\frac{1}{2}\leq\Delta b_2\leq\frac{1}{2}$ の範囲では，D 点での双対価格が，Δz の正確な値を与える。

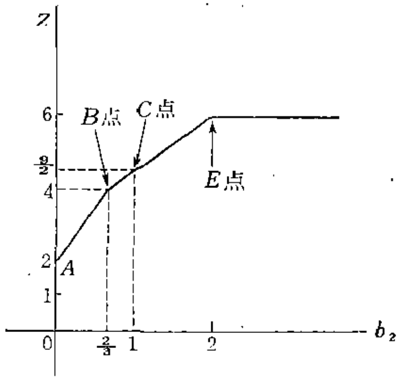
〔3〕 直接双対価格のIPにおける機能

われわれは，LP(I・A)に対する双対価格を，IP問題（I・1)に対する「双対価格」に転用したのであったが，もとの（I・1)における，資源と総収益との関係は，不連続なものであって，たとえば，第3図のようになる。D 点における斜線の勾配である直接双対価格は，左右にとったいかなる Δb_2 に対しても，Δz の値を指示する機能をはたさない。したがって，この情報の意味は，きわめて限られる。

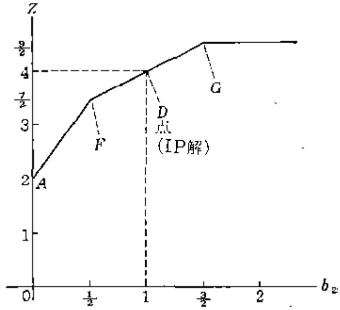
E 直接双対価格のゼロ値

前項の問題と密接な連関において，次の問題が生じる。

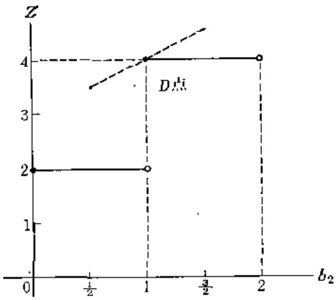
LP の場合には，双対価格がゼロという値をとることは，その資源制約が完全に無拘束的であって，除外しても解は影響をうけないことを意味していた。



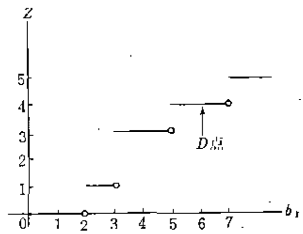
第1図　LP(I·1)における双対価格と限界収入生産力（例題1）



第2図　LP (I·A) における双対価格と限界収入生産力（例題1）



第3図　IP (I·1) における直接双対価格と限界収入生産力（例題1）



第4図　ゼロ価格と限界収入生産力（例題1）

直接双対価格は，ある整数解では現存量を使いきれないが，ヨリ多く利用可能であれば，ヨリ高い整数解に移れるような資源にも，ゼロ値をつける[16]。したがって，ゼロ価格が自由財の標識としての意味をもつとはいえなくなる。

16)　Gomory and Baumol, *op. cit.*, p. 532.

例解。例題1の第4タブローでは，スラック変数 λ_1 にも $\bar{x}_2$ にも価格ゼロがついている。実際には制約式 $x_2 \leq 2$ は完全に無視できるが，制約式 $3x_1+2x_2 \leq 6$ は，そうではない。そのキャパシティ b_1 のいろいろな値と，IP における z の値との関係を図示しておく（第4図）。D 点から $-1 \leq \Delta b_1 < 1$ の範囲でのみ，$\frac{\Delta z}{\Delta b_1}=0$ である。

F 総括

MIF 法の最終タブローが，整数解の副産物として提示する LP(I・A) の双対価格を，IP 問題(I・1)の双対価格として意味づけ，利用するという試みを検討した。

この量は，LP 双対価格であるかぎりにおいて，種々の好都合な性質をもつが，整数解を保証するための追加制約式にも正量で対応するために，量的に，1意性が保証されなくなり，質的に，「人為的」キャパシティの解釈の問題が生じる。

さらに，根本的に，IP 問題の文脈において，限界収入生産力の真の標識でありえず，したがってまた，自由財の真の標識でありえない。

この量――直接双対価格を，しかし，あくまで有意義な手がかりと考え，追加制約式に対応する分を，本来の資源制約式に配分することによって，ヨリ適切な資源評価を得ようとする試みが，「再計算双対価格」である。

Ⅲ 再計算双対価格

A 再計算価格の導出

直接双対価格は，何はともあれ，「人為的」キャパシティにも正の価格をわりつけてしまう点で，解釈上，すっきりしないものをもっている。Gomory and Baumol は，「追加制約式が旧制約式の非負1次結合にすぎない」点に着眼し，このウエイトによって，追加制約式につく価格を，本来の資源に帰属させることを考えた[17)]。この操作によって，直接双対価格を加工して得られる価

17) *Ibid.*, pp. 532-533, および Appendix B (pp. 545-550).

格を，かれらは，再計算双対価格（the recomputed dual prices）と名づけている。

〔1〕 追加制約式の構成

(a) スラック変数の構成

追加制約式のスラック変数 s は，第1節で，

$$s=\sum_{j=1}^{n} f_j t_j - f_0, \qquad 1>f_j\geq 0,\ 1>f_0>0,$$

と定義したが，これを LP (I・1) の段階で存在した $m+n$ 個のスラック変数 λ_i によって，

$$s=\sum_{i=1}^{m+n} g_i\lambda_i - g_0, \qquad g_i\geq 0,\ g_0>0 \tag{III・1}$$

の形に表わすことができる[18)]。ただし，$\lambda_{m+j}=x_j$ であって，x_j を，制約式 $-x_j\leq 0$ のスラック変数と考えることにする。

(b) 追加制約式の変形 (1)

次に，(III・1)に(I・1)を代入し，$\lambda_{m+j}=x_j$ に注意すると，制約式 $s_i\geq 0$ は，次のように変形される。

$$\sum_{i=1}^{m} g_i(Q_i-\sum_{i=1}^{n} a^*_{ij}x_j)+\sum g_{m+j}x_j-g_0\geq 0 \tag{III・2}$$

これは，追加制約式が，もとの $m+n$ 個の制約式の1次結合から定数 g_0 を引いたものであることを示している。

(c) 追加制約式の変形 (2)

(III・2)を，さらに，x_j についてまとめると，

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} g_i a^*_{ij}-g_{m+j})x_j\leq\sum_{i=1}^{m} g_i Q_i-g_0 \tag{III・3}$$

ここで，

$$\sum_{i=1}^{m} g_i a^*_{ij}-g_{m+j}=a^*_{sj} \tag{III・4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} g_i Q_i-g_0=Q_s \tag{III・5}$$

とおけば，追加制約式を，(I・1)の，本来の資源制約式と同じ形にそろえるこ

18) s が唯一つの，ないしは最初の，追加制約式である場合には，f_j を適当な順序でならべかえれば，ただちに g_i が得られる。s が第2番以下の追加制約式である場合には，逐次代入により，結局（II・1）の形に変換できる。

とができる。(III・5)の Q_s が，「人為的」キャパシティである。

〔2〕 再計算 (recomputation) の手続

(a) 再計算価格の定義

(III・1)のウエイト g_i を利用して，Q_s に対応する直接双対価格 π_s を，$m+n$ 個の，本来の制約式に帰属させるという操作を考え，次のように，再計算双対価格 π'_i を定義する。

$$\pi'_i=\pi_i+\sum_k g_{i(k)}\cdot\pi_{s(k)} \quad i=1,\ \cdots\cdots,\ m+n$$
$$\pi'_{s(k)}=0 \qquad \text{(III・6)[19]}$$

ただし定義(III・6)は，追加制約式が k 個あるという一般的な場合を念頭においている。

(b) 計算方法

実際の計算にあたっては，１つ１つ $g_{i(k)}$ を求める必要はない。第 k 追加制約式（最後に追加されたもの）を，

$$s_k=-f_{0(k)}+\sum_{j=1}^{n}f_{j(k)}t_j\geq 0$$

としよう。$f_{j(k)}$ をウエイトにして，$\pi_{s(k)}$ を t_j にわりもどせば，第１段の再計算価格 π' を得る。次に，同じ手続で，π' の中から s_{k-1} に対するものを消去する。以下同様にすれば，たかだか k 回で，再計算が完了する[20]。

B アクティビティの評価と補助金

このように定義された再計算価格は，どのような特性をもつか。以下，順を追って検討する。

まず，それは，ふつうの LP 双対価格がみたしている，競争均衡価格の要件をみたすか。すなわち，各アクティビティへの投入を，再計算価格によって評価するとき，最適解について，

(1) 採用されているアクティビティにおいては，費用＝収益。

(2) 費用≧収益となるアクティビティは，採用されていない。

---

19) *Ibid*., p. 532.

20) Weingartner, *op. cit.* はこの方法によっている。*Op. cit.*, p. 66.

という関係を，成りたたせることができるか。

〔1〕 直接双対価格の場合

第Ⅱ節で見たように，直接双対価格は，LP 双対価格として，形式上，自動的にこの要件をみたしている。（ただし，実質的には，「人為的」キャパシティが，各アクティビビティに投入され，解釈上の問題をのこしている。）

いま，かんたん化のため，追加制約式は，ただ1個であると仮定し，これに $m+1$ という番号をつけておくと，次のような関係が成り立つわけである。

(1)　$x_j>0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{m+1}\pi_i a^*_{ij}=c_j$

(2)　$\sum_{i=1}^{m+1}\pi_i a^*_{ij}<c_j \longrightarrow x_j=0.$

ここに，$a^*_{m+1j}=a^*_{sj}$，$\pi_{m+1}=\pi_s$．また(I・1)の $-a_{0j}$ を c_j と書いておく。

いうまでもなく，LP(I・A)の最終タブロー z 行の，x_j の列に $\sum_{i=1}^{m+1}\pi_i a^*_{ij}-c_j$，$\lambda_i$ の列に π_i が，現われる。

〔2〕 再計算価格の場合

(a) アクティビティの帰属費用

次に，再計算価格によって，第 j アクティビティへの投入を評価してみる。いまや，「人為的」キャパシティは無視し，本来の m 種の資源だけを，考えればよい。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\pi'_i a^*_{ij} &= \sum_{i=1}^{m}(\pi_i+g_i\pi_s)a^*_{ij} \qquad \text{〔(III・6)を代入〕}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\pi_i a^*_{ij}+\pi_s\sum_{i=1}^{m}g_i a^*_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\pi_i a^*_{ij}+\pi_s(a^*_{sj}+g_{m+j}) \qquad \text{〔(III・4)を代入〕}\\
&= \sum_{i=1}^{m+1}\pi_i a^*_{ij}+\pi_s g_{m+j} \qquad \text{(III・7)}
\end{aligned}
$$

よって，いま，$g_{m+j}>0$ であれば，再計算価格で評価した第 j アクティビティの費用は，直接双対価格で，「人為的」キャパシティの投入も含めて評価した場合よりも，$\pi_s g_{m+j}$ だけ高まる。なお，(III・6)により，$\pi_s g_{m+j}=\pi'_{m+j}$ である。

(b) 補助金

したがって，いま，IP 解において $x_j>0$ であり，よって

$\pi_{m+j}=\sum_{i=1}^{m+1}\pi_i a^*_{ij}-c_j=0$ であるとき，もし $g_{m+j}>0$ ならば[21]，(III・7)から，

$$\sum_{i=1}^{m}\pi_i' a^*_{ij}-c_j=\pi_s g_{m+j}>0 \qquad \text{(III・8)}$$

となる。

これは，再計算価格を使うとき，稼動アクティビティの中に，「費用＞収益」であるものが入っていることを意味し，解釈上不都合な問題が生じる。

そこで，いま，このアクティビティには，操業1単位あたり，$\pi_s g_{m+j}$ （$=\pi'_{m+j}$） の大いさの補助金[22] が出ているものと考えることにすれば，(III・7)は，「費用＝収益＋補助金」という形で，第 j アクティビティの収支が均等することを示し，「操業水準正→収支均等；損失→操業水準ゼロ」という対応関係が，再計算価格体系の下でも，維持できることになる。

C　賃料と税

〔1〕　上限制約の「価格」――LP の場合

資源配分問題の LP モデルの中に，アクティビティの操業水準に対する上限制約がある場合，それを，具体的に，立地の稀少性のような要因によるものと解釈し，上限制約式に対応して得られる双対価格を，それら稀少固定要素にもとづいて発生する超過利潤 (profit)，ないしは，それらの要素に帰属される賃料 (rent) と解釈することが，可能であり，また適切でもある[23]。

たとえば，例題2の LP 解において，スラック変数 $\bar{x}_1$ に (したがって制約 $x_1\leq 1$ に)対応している双対価格 $\frac{14}{5}$。これは例によって，$x_1\leq 1$ の右辺の量の限界収入生産力を示していて，その点，通常の双対価格とことなるものではないが，いま，問題の解釈にあたって，制約式 $x_j\leq 1$ を，たとえば立地の制約が，第1アクティビティの拡張をおさえているという意味に解釈することにし，

21)　Weingartner は，$x_j=0$, $\pi'_{m+j}=0$, かつ $\pi_{m+j}>0$ である場合に補助金解釈をつけているが，これはスリップであろう。*Ibid.*, pp. 74-75.

22)　「補助金」の発生の可能性の指摘と，その意味づけは，Gomory and Baumol が行なった。Gomory and Baumol, *op. cit.*, p. 533. わたくしは，発生の要件と，その大いさを明示的に示しておいた。

23)　上限制約にともなうこのような rent については，Weingartner, *op. cit.*, pp. 53-56. 現実的な計画モデルで登場してくる例は，Massé and Bessiére, 〔7〕, pp. 248-252.

もう1つの制約式が，材料など，ふつうの意味での資源制約を表わすものとして，この資源に対してのみ，実際に対価が支払われるものと考えれば，次のような論理操作ができる。

第1アクティビティへの投入を双対価格で評価すれば，

$$費用=6\times\frac{6}{5}+1\times\frac{14}{5}=10=収益,$$

すなわち，形式的に収支均等となっているが，$6\times\frac{6}{5}$だけを，実際上の費用と考えれば，

$$収益-費用=10-6\times\frac{6}{5}=\frac{14}{5}>0$$

すなわち，超過利潤 (profit) が生じているものと，みることができる。$x_1\leq1$ に対応する双対価格は，このような剰余の標識となっている。

〔2〕 上限制約の「価格」——IP の場合

同じ例題の IP 解を考えよう。アクティビティの水準は，x_1 が正，x_2 がゼロになっている。これに対し，上限制約の再計算価格は，$x_1\leq1$ に対して4，$x_2\leq1$ に対して1で，ともに正となっている。これはどういうことだろうか。

(1) x_1 の場合。収益は10であり，他方，再計算価格で評価した費用は，$6\times1+1\times4=10$ で，一応均等になっているが，実際上の費用だけを考えることにすれば，

$$収益-費用=10-6=4,$$

すなわち第1アクティビティには超過利益，もしくは rent が発生するのであって，それは，優先的に稼動されて当然だということになる。この解釈は，LP の場合と同じである。ただし，第Ⅱ節でみたように，IP の場合には，上の4という値は，もはや x_1 の上限制約の，現実の限界収入生産力の大いさを表わしているとはいえなくなる。

(2) x_2 の場合。先と同様，再計算価格で第2アクティビティの投入を評価し，実際上の費用だけを収益からさし引けば，

$$6-5\times1=1$$

すなわち，潜在的に剰余があるのに，第2アクティビティは採用されないでいるということになって，ぐあいがわるい。

この剰余の値1は，本来D点（タブロー⑤のLP解）における，x_2の上限制約の，限界収入生産力であった。D点が解として許されるならば，上限制約が，C点の達成をさまたげていることにより，大いさ1の rent が発生しているはずであった。だが，整数条件によって，D点を放棄し，ヨリ劣等なA点へ移ることが必要であった。そこで，いま，D点を放棄しA点に移ることを経済的に強制するために，税金が課せられるものとし，その税金の必要額が，ちょうど前記の剰余の大いさにひとしいと考えれば，うまく解釈がつくわけである[24]。

D 資源の総評価

LP 双対価格の重要な1つの性質は，その価格で評価した資源の総価値が，アクティビティの最適水準の下での総収益と，ひとしい大いさになることであった。再計算価格で資源を評価する場合，事態はどのようになるだろうか。

〔1〕 直接双対価格による資源評価

(a) 利用可能な資源の価値

まず，直接双対価格については，それが1つの LP 双対価格であるところから，次の関係が成立することに注意しておく。

$$
\begin{aligned}
w^* &= \sum_{i=1}^{m+1} \pi_i Q_i = \sum_{i=1}^{m} \pi_i Q_i + \pi_s Q_s \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z^* \qquad \text{(III・9)}
\end{aligned}
$$

ここに，w^*は，直接双対価格による，利用可能 (available) な資源の総評価。z^*は，LP(I・A)の，したがって (I・1)の，目的函数〔総収益〕の最大値。また，かんたん化のため，追加制約式は，ただ1個と考え，第$m+1$番目にあるものとし，添字sをつけて区別する。

(b) 費消された資源の価値

いまの場合，やはり LP 双対価格の性質から，w^*の代りに，費消された (used up) 資源の総評価w^0をもってきても，z^*とひとしくなる。なぜなら，一般に LP(I・A)の可能解x_jと，その双対問題の可能解π_iとの間に，

24) IP にともなって，このようなケースが出現することを示し，penalty の解釈を与えたのは，Weingartner, *op. cit.*, pp. 102-104.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\pi_i a^*_{ij}\right)x_j = \sum_{i=1}^{m+1}\pi_i\left(\sum_{j=1}^{n}a^*_{ij}x_j\right) \leq \sum_{i=1}^{m+1}\pi_i Q_i$$

が成り立つが，最適解において，この左端の量が z^*，右端の量が w^*，まん中の量が w^0 となり，かつ，(a)で注意したように，$z^*=w^*$ となるからである。

〔2〕 再計算価格による資源評価

(a) 費消された資源の価値

Gomory and Baumol は，もっぱら費消された資源に注意をあつめ，再計算価格でそれを評価しても，産出の総価値にひとしいという性質が保存されると主張している[25]。しかし実際には，「費消資源総価値＝市場価格による総収益＋補助金総額」という関係が成立している[26]。なぜならば，(III・7)を使って，

$$\sum_{i=1}^{m}\pi'_i\left(\sum_{j=1}^{n}a^*_{ij}x_j\right) = \sum_{i=1}^{m+1}\pi_i\left(\sum_{j=1}^{n}a^*_{ij}x_j\right) + \pi_s\sum_{j=1}^{n}g_{m+j}x_j \quad \text{(III・10)}$$

であるが，右辺第1項は，〔1〕-(b)により z^* にひとしく，$\pi_s g_{m+j}$ は，B でみたように，x_j 1単位あたり補助金。

(b) 利用可能な資源の価値

再計算価格による，利用可能な資源の総評価を w_R とすると，

$$w_R = \sum_{i=1}^{m}\pi'_i Q_i = \sum_{i=1}^{m}(\pi_i + g_i\pi_s)Q_i = \sum_{i=1}^{m}\pi_i Q_i + \pi_s\sum_{i=1}^{m}g_i Q_i$$

しかるに，(III・5)から，

$$\sum_{i=1}^{m}g_i Q_i - g_0 = Q_s$$

よって，$w_R = \sum_{i=1}^{m}\pi_i Q_i + \pi_s Q_s + \pi_s g_0 = w^* + \pi_s g_0 = z^* + \pi_s g_0.$ (III・11)

すなわち，一般に，$w_R > z^*$ となり，LP 双対価格のもっていた1つの重要な性質が失われる[27]。

E 再計算価格のゼロ値

25) Gomory and Baumol, *op. cit.*, p. 547.

26) Gomory and Baumol がまちがっているわけではない。かれらは，補助金の額だけ生産物の価格がモディファイされると考えているからだ。*Op. cit.*, p. 533. しかしかれらの証明方法では，補助金部分が明示的に出てこず，LP 双対価格の場合との形式的一致面の方が強調される。

27) Gomory and Baumol は，利用可能な資源の価値について，とくに何もいっていない。Weingartner は，$w_R \neq z$ ということをのべているだけである。*Op. cit.*, p. 73.

再計算価格の定義式(III・6)をふりかえると，次のことがわかる。

いま，ある第 i 資源について，$\pi'_i=0$ ならば，i) $\pi_i=0$；かつ，ii) $\pi_{s(k)}>0$ であるような k について，$g_{i(k)}=0$.

i)は LP(I・A)の解において第 i 制約式が利いていないことを意味し，ii)は，LP(I・A)の解において利いている追加制約式の構成に，第 i 制約式がまったく入りこまないことを意味する。したがって，第 i 制約式を問題からはずしても，解には影響がないはずである。

こうして，再計算価格においては，価格ゼロがつく資源は，本来の意味での自由財であることになり，直接双対価格の1つの欠陥をまぬかれることができる。

ただし，逆の命題は主張できない。すなわち，制約式が不可欠でなくても，正の再計算価格がわりつけられることがありうる。

IP には，制約式のうち n 個だけで，整数解を得るのに十分である場合があり，しかも，その n 個の式のとり方が2つ以上ある場合がある。このとき，特定の制約式は，えらび方により，n 個の中に入れられたり，おちたりする。このような制約式には，正価格がついたり，ゼロ価格がついたりするのである[28]。

F　総括

MIF 法の副産物として得られる LP 双対価格を，基本的には，IP 問題の立場からしても，意味のある情報だと考え，ただ，直接意味のつけにくい，追加制約式に対応する価格を，本来の制約式に適当にわりふって消去するという修正だけをほどこしたものが，「再計算価格」である。それは，ある IP 問題が LP によって解かれたとき，その LP 双対価格（「直接双対価格」）から出発して，事後的に計算される量である。

この量で資源評価をおこなってみると，いくつかの興味ぶかい事態が観察される。

28) Gomory and Baumol, *op. cit.*, 548-550; Weingartner, pp. 75-93.

LP 双対価格のいちじるしい性質は，アクティビティについて，「最適解における操業水準正→収支均等；損失→操業水準ゼロ」という対応関係を成立させることであった。これによって，LP の示す最適計画を，分権的機構の下で保持する可能性が，すくなくとも原理的には保たれた。再計算価格で評価した場合，IP 解においては，上の対応関係は，直接にはもはや保たれない。上の対応関係があくまで保たれつつ IP 解が実現されていると考えるためには，補助金と税金が，資源価格体系を補完していると考えなければならない。

再計算価格のゼロ値は自由財の標識と考えることができ，直接双対価格の 1 つの欠陥を除くことができた。しかし，逆はかならずしも成立せず，「資源総価値＝最適計画の下での総収益」という，LP で成り立っていた関係も，成立しない。

む　す　び

整数計画問題の数値解法は，いくつかの方向から開発されつつあり，MIF 法は，有力ではあるが，そのうちの 1 つにすぎない。「直接双対価格」および「再計算価格」は，MIF 法にともない，その計算過程を前提してはじめて得られる量であるから，本稿でおこなった，これら 2 つの量の諸特性の吟味の，直接の射程範囲は，かぎられている。だが，基準的な LP の場合にくらべ，ただ 1 つ，アクティビティの整数条件という条件がつけ加えられただけで，価格機構のはたらきに，どのような変容が生じるかということを知る手がかりが与えられる。投資あるいは生産における規模の問題を考えるとき，アクティビティの整数条件ないし不可分性は，前面に現われてくるから，その制約の経済学的な含意を探究することは，現実的意義を獲得するが，本稿は，そのような探究の，1 過程をなすものである。

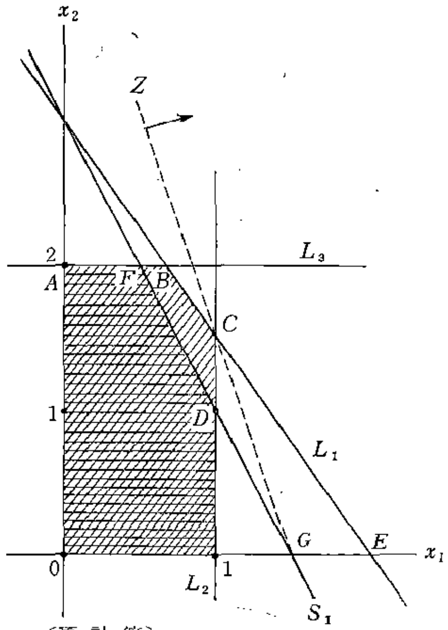
例題 1.

$3x_1+2x_2 \leq 6$

$x_1 \qquad \leq 1$

$x_1,\ x_2 \geq 0$, integer

$\max\ z=3x_1+x_2$



〔再 計 算〕

	π	π'
λ_1	0	$0+\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$
λ_2	1	$1+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{2}$
λ_3	0	$0+0\times 1=0$
x_1	0	$0+0\times 1=0$
x_2	0	$0+0\times 1=0$
s_1	1	0

〔MIF 計算〕

	1	$-x_1$	$-x_2$
$z=$	0	-3	-1
$\lambda_1=$	6	3	2
$\lambda_2=$	1	1^*	0
$\lambda_3=$	2	0	1

タブロー 1

	1	$-\lambda_2$	$-x_2$
$z=$	3	3	-1
$\lambda_1=$	3	-3	2^*
$x_1=$	1	1	0
$\lambda_3=$	2	0	1

タブロー 2

	1	$-\lambda_2$	$-\lambda_1$
$z=$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\rightarrow x_2=$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_1=$	1	1	0
$\lambda_3=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$s_1=$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}^*$

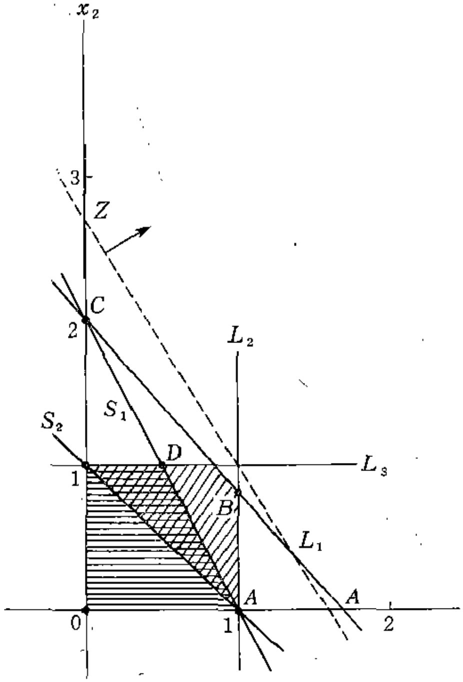
タブロー 3 (LP 解)

	1	$-\lambda_2$	$-s_1$
$z=$	4	1	1
$x_2=$	1	-2	1
$x_1=$	1	1	0
$\lambda_3=$	1	2	-1
$\lambda_1=$	1	1	-2

タブロー 4 (IP 解)

例題 2.

$$6x_1-5x_2\leq 10$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_2\leq 1$$
$$-x_1\leq 0$$
$$-x_2\leq 0$$
$$x_1,\ x_2 : \text{integer}$$
$$\max\ z=10x_1+6x_2$$



	1	$-x_1$	$-x_2$
$z=$	0	-10	-6
$\lambda_1=$	10	6	5
$\bar{x}_1=$	1	1^*	0
$\bar{x}_2=$	1	0	1

タブロー 1

	1	$-\bar{x}_1$	$-x_2$
$z=$	10	10	-6
$\lambda_1=$	4	-6	5^*
$x_1=$	1	1	0
$\bar{x}_2=$	1	0	1

タブロー 2

	1	$-\bar{x}_1$	$-\lambda_1$
$z=$	$\frac{74}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{6}{5}$
$\to x_2=$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_1=$	1	1	0
$\bar{x}_2=$	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$
$s_1=$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}{}^*$	$-\frac{1}{5}$

タブロー 3 (LP 解)

	1	$-s_1$	$-\lambda_1$
$z=$	12	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_2=$	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_1=$	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\bar{x}_2=$	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}{}^*$
$\bar{x}_1=$	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$

タブロー 4

	1	$-s_1$	$-\bar{x}_2$
$z=$	11	5	1
$x_2=$	1	0	1
$\rightarrow x_1=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\lambda_1=$	2	-3	-2
$\bar{x}_1=$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$s_2=$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}*$

タブロー 5

	1	$-s_1$	$-s_2$
$z=$	10	4	2
$x_2=$	0	-1	2
$x_1=$	1	1	-1
$\lambda_1=$	4	-1	-4
$\bar{x}_1=$	0	-1	1
$\bar{x}_2=$	1	1	-2

タブロー 6 (IP 解)

〔再 計 算〕

	π	π'	π''
λ_1	0	$0+0\times2=0$	$0+\frac{1}{5}\times5=1$
$\bar{x}_1$	0	$0+0\times2=0$	$0+\frac{4}{5}\times5=4$
$\bar{x}_2$	0	$0+\frac{1}{2}\times2=1$	$1+0\times5=1$
x_1	0	$0+0\times2=0$	$0+0\times5=0$
x_2	0	$0+0\times2=0$	$0+0\times5=0$
s_1	4	$4+\frac{1}{2}\times2=5$	0
s_2	2	0	0

参 考 文 献

〔1〕 浅沼萬里，「資金配分問題」と数理計画法，「経済論叢」第96巻第6号，昭和40年12月。

〔2〕 Baumol, W. J., *Economic Theory and Operations Analysis*, 2 ed., Chap. 8, 1965.

〔3〕 Beale, E. M. L., "Survey of Integer Programming", *Operational Research Quarterly*, Vol. 16, No. 2, June 1965.

〔4〕 Gomory, R. E. and Baumol, W. J., "Integer Programming and Pricing", *Econometrica*, Vol. 28, No. 3, July 1960.

〔5〕 Hadley, G., *Linear Programming*, Chap. 11, 1962.

〔6〕 ditto, *Nonlinear and Dynamic Programming*, Chap. 8, 1964.

〔7〕 Massé, P. and Bessiére, F., "Long-Term Programming of Electrical Investments", cited from Nelson, J. R. (ed.), *Marginal Cost Pricing in Practice*, 1964.

〔8〕 根岸隆・浜田宏一「計画理論入門」昭和37年。

〔9〕 Weingartner, Martin Jr., *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, 1963.