經濟論叢

第九十八巻　第五號

昭和四十一年十一月

京都大學經濟學會

産業連関の３部門分割モデル

山　田　浩　之
井　原　健　雄

Ｉ　は　し　が　き

レオンチェフ〔１〕によって創始された産業連関分析を発展させる１つの方向として，宮沢健一氏〔２〕が開発された「２部門分割モデル」がある。宮沢氏は，産業連関表における多数の産業からなる体系を大きく２つの産業グループに分割し，その両グループ間の相互誘発関係を検討され，外部乗数・内部乗数の分解モデルを展開された。

本稿は，氏の２部門分割モデルの３部門分割モデルへの拡張を意図するものである。すなわち，産業連関表の部門分類に含まれている全産業を異質的な３つの産業グループに分割したとき，各グループ間の相互誘発関係はいかに把握されうるか，その解明のための分析方式を提出しようとするものである。

このような３部門分割モデルへの拡張は，宮沢健一氏〔３〕，〔４〕によっても，すでに試みられている。ただ，氏の展開は３部門モデルについては未だ部分的なものであり，また氏の採用された notation によるモデルの展開は，かなり複雑な表現形式をとらざるをえなくなっている。本稿では，これに対して，３部門分割モデルの一般的な展開を行うと同時に，その場合に必然的に要請される簡潔な表現形式――それは直ちに連関構造の明快な把握を意味する――が提示されるであろう[1)]。

1)　宮沢氏は，地域連関分析への適用を前提して，３部門分割モデルを展開しておられるが，地域連関分析への適用は，そのモデルのもっとも重要な適用分野であることは疑いないとしても，その他の分野にも適用可能であろう。たとえば，全産業を第１次産業，第２次産業，第３次産業に分割して，相互の波及関係を解明しようとする場合，あるいは物的生産部門とサービス生産部門とに分割した上で，物的生産部門を重化学工業グループと軽工業グループに細分する場合や，逆にサービス部門を運輸部門とその他サービス部門に細分する場合などがそうである。こういった分野への適用については，現在作業を行いつつあるので，近い機会に発表できるであろう。

II 部門間の相互誘発連関

産業連関表に含まれる全産業を，異質的な3つのグループに分割するとき，これに対応して投入係数行列Aは，つぎのような小行列に区分することができる。

$$
(1)\qquad A=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \overbrace{\phantom{A_{11}}}^{l_1} & \overbrace{\phantom{A_{12}}}^{l_2} & \overbrace{\phantom{A_{13}}}^{l_3} \end{array} \\
\left[\begin{array}{c:c:c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hdashline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \}\, l_1 \\ \}\, l_2 \\ \}\, l_3 \end{array}
$$

ここで，$l_i(i=1,\ 2,\ 3)$ は各グループに含まれる産業数を表わしている。(なお，以下においては各グループを「部門」とよぶことにする。したがって，第i部門はl_i個の産業から構成される。) そして，各小行列は，一般的に，つぎのように定義される[2)]。

A_{ij}……第j部門における第i部門産品の投入係数

($l_i\times l_j$ 行列, $i, j=1,\ 2,\ 3$)

さて，このような3部門分割モデルにおいて，投入係数行列にもとづく部門間の波及関係を明らかにするのが，われわれの課題であるが，それは次のような4つの局面について考察することができる。

1. ある部門内部における波及関係
2. ある部門の生産活動が他の1つの部門に及ぼす波及・誘発関係
3. ある部門と他の1つの部門との交流関係
4. 3部門間の交流関係

以下において，これらの局面に検討を加え，順次，部門間の波及関係の構造を明らかにしてゆこう。

〔1〕 ある部門内部の波及関係

2) 以下において，一般的な取扱いを可能にするために，添字として，i, j, k を採用する。この添字を用いることのメリットとして，つぎの2点があげられる。
 i) 簡明な分析が可能となること。
 ii) 行列の積の定義が可能か否か判断できること。

いま，ある1つの部門の諸産業に対して最終需要があたえられると，その最終需要をみたすために，その部門内の産業間で相互誘発活動が進行すると同時に，他の部門の産業とも相互誘発関係が生ずる。しかし，他部門との波及関係は無視して，自部門内部での波及効果のみに注目するとき，それは次式によって示される[3]。

(2) $(I-A_{ii})^{-1}=B_i$……第 i 部門の単内部乗数（$l_i \times l_i$ 行列）

これは，ある特定部門だけの内部波及の効果を表わすものであるから，《単内部乗数》とよぶことにしよう。

〔2〕 ある部門の生産活動が他の1つの部門に及ぼす波及・誘発関係

つぎに，ある部門で生産活動が行われると，その部門が必要とする投入財を供給する他の部門での生産が誘発され，他部門でも内部波及が生ずるであろう。この効果を次の形であたえ，《生産誘発係数》とよぶことにする。

(3) $B_iA_{ij}=\alpha_{ij}$……第 j 部門→第 i 部門の生産誘発係数（$l_i \times l_j$ 行列）

α_{ij} は第 j 部門の第 i 部門産品の投入が誘発する第 i 部門の内部波及効果を表わしている。他方，ある部門で内部波及が進行するならば，それに応じて他部門の商品が投入財として必要になる。このような，他部門に対する投入誘発効果を《投入誘発係数》とよぶことにすれば，それは次のように表わされる。

(4) $A_{ij}B_j=\beta_{ij}$……第 j 部門→第 i 部門の投入誘発係数（$l_i \times l_j$ 行列）

すなわち，β_{ij} は第 j 部門の内部波及が誘発する第 i 部門産品の投入である。

〔3〕 ある部門と他の1つの部門との交流関係

2部門間の相互誘発関係に考察を限定するとき，問題となる投入係数行列は，一般的につぎのように示される。

(5) $A^*=\left[\begin{array}{c:c} A_{ii} & A_{ij} \\ \hdashline A_{ji} & A_{jj} \end{array}\right]$

いま，第 i 部門で産業間の内部波及（B_i）が進行するためには，部門間で次

3) 以下において，I は当該式の行列演算を可能ならしめる次数をもつものとする。この場合は，A_{ii} と等しい次数をもつ単位行列である。
なお，$(I-A)^{-1}$ について Hawkins-Simon の条件がみたされていれば，その部分逆行列，すなわち各部門の単内部乗数，$(I-A_{ii})^{-1}=B_i$，の存在が保証される。

のような誘発連関のルートが成立するはずである。まず，第 i 部門の内部波及 (B_i) が実現するためには，第 j 部門産品の投入 (A_{ji}) が必要となり，その結果，第 j 部門の生産すなわちその内部波及が誘発 (B_j) される。つぎに第 j 部門の生産が行われるためには，第 i 部門産品の投入 (A_{ij}) が要請され，それは第 i 部門内部での産業間波及 (B_i) を誘発する。これはふたたび第 j 部門産品の投入 (A_{ji}) を要求し，上の波及過程がくりかえされることになる。つまり，2部門以外への波及は無視しているから， 初発における第 i 部門の内部波及 (B_i) を実現するために， $A_{ji}\rightarrow B_j\rightarrow A_{ij}\rightarrow B_i\rightarrow A_{ji}$ が1つのループを構成して， 収束するまでくりかえされるわけである。その結果，

(6)　$B_iA_{ij}B_jA_{ji}=\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ji}$　($l_i\times l_i$ 行列)

を波及因子とする乗数過程が第 i 部門にはねかえって生ずることになり，その究極的効果はつぎのように示される。

(7)　$(I-\boldsymbol{\alpha}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_{ji})^{-1}=K_i{}^j$……第 i 部門の， 第 j 部門を経由する偏外部乗数 ($l_i\times l_i$ 行列)

これは，ある特定部門との波及関係のみを考慮した，ある部門にとっての局部的な外部効果を示すものであって，全部門との誘発連関を考慮する本来の外部乗数ではない。したがって，これを本来の外部乗数と区別して，《偏外部乗数》とよぶことにする。さて，ある部門の内部波及 (B_i) は，他部門との誘発連関の過程で，その外部乗数倍だけさらに拡大されることになる。かくして，ある部門に生ずる波及の総効果は，特定2部門に考察を限定するかぎり，単内部乗数と偏外部乗数との積として示されるであろう。すなわち

(8)　$K_i{}^jB_i=M_i{}^j$……第 i 部門の偏レオンチェフ乗数 ($l_i\times l_i$ 行列)

$M_i{}^j$ は特定2部門の局部的な総効果であって，全部門との波及関係を考慮した究極的な総効果ではないので，それと区別して《偏レオンチェフ乗数》とよぶことにしよう[4]。

さて，(5)に示した投入係数 A^* をもつ特定2部門の逆行列係数 $(I-A^*)^{-1}$ は，

4)　2部門分割モデルにおいては，$M_i{}^j$ は逆行列係数，すなわちレオンチェフ乗数そのものである。

宮沢健一氏が明らかにされたように，上に定義した諸係数を用いて，つぎのように分解・表示することができる[5]。

$$(9)\qquad B^*=(I-A^*)^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} K_i{}^jB_i & K_i{}^j\alpha_{ij}B_j \\ \hdashline K_j{}^i\alpha_{ji}B_i & K_j{}^iB_j \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c:c} M_i{}^j & M_i{}^j\beta_{ij} \\ \hdashline \alpha_{ji}M_i{}^j & B_j+\alpha_{ji}M_i{}^j\beta_{ij} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} B_i+\alpha_{ij}M_j{}^i\beta_{ji} & \alpha_{ij}M_j{}^i \\ \hdashline M_j{}^i\beta_{ji} & M_j{}^i \end{array}\right]$$

このような，3つの代替的表現をもつ定式化を可能ならしめているのは，つぎの2つの関係式である[6]。

$$(10)\qquad M_i{}^j=K_i{}^jB_i=B_i+\alpha_{ij}M_j{}^i\beta_{ji}$$

$$(11)\qquad K_i{}^j\alpha_{ij}B_j=M_i{}^j\beta_{ij}=\alpha_{ij}M_j{}^i$$

(9)の対角線上にある2つのブロックについて成立する(10)式が示していることは，ある部門からはじまった産業間波及がその部門にもたらす直接間接の《自部門総効果》が「外部乗数×内部乗数」という積の形でも表現されうるし，また「自部門波及＋他部門を経由する波及部分」という和の形でも表現されうることである。

これに対して(11)式からは，ある部門からはじまった産業間波及が他部門にもたらす《部門間交叉効果》について次のことが知られる。1つは，それが自部門の内部乗数と他部門の外部乗数とが自部門から他部門への生産誘発係数を媒介にして積の形で結びつけられて表現される（第1表現）ことであり，もう1つは，2部門のうちいずれの側から接近しても，えられる偏レオンチェフ乗数に対応して，それぞれの表現形式がみいだされることである。すなわち $M_i{}^j\beta_{ij}$ は第 j 部門の側からみた表現であり，$\alpha_{ij}M_j{}^i$ は第 i 部門の側からみた表現である。

ところで，偏レオンチェフ乗数 $M_i{}^j$ については，さらに次の性質がみいだされる。$M_i{}^j$ を展開してみよう。

$$M_i{}^j=K_i{}^jB_i=(I-B_iA_{ij}B_jA_{ji})^{-1}(I-A_{ii})^{-1}$$

---

5)　宮沢，〔2〕，〔3〕を参照されたい。

6)　(10)，(11)の証明については，宮沢，〔2〕，pp. 230–231 参照。

$$=\{(I-A_{ii})(I-B_iA_{ij}B_jA_{ji})\}^{-1}$$
$$=\{I-(A_{ii}+A_{ij}B_jA_{ji})\}^{-1}$$

そして，

(12) $$A_{ii}+A_{ij}B_jA_{ji}=A^j{}_{ii}$$

とおくと，次式がえられる。

(13) $$M_i{}^j=(I-A^j{}_{ii})^{-1}$$

ここで，(12)式の左辺第2項は，第 i 部門の第 j 部門産品の投入によって誘発される第 j 部門の内部波及が必要とする第 i 部門産品の投入であり，したがって(12)式の左辺は直接的な投入係数と他部門への波及を経由する間接的な投入係数との和であり，全体として他の1つの部門への波及を考慮したある部門の投入係数を意味するものと考えることができる。それゆえ，(13)式から $M_i{}^j$ を，このような拡張された意味での投入係数を波及因子とする乗数過程の究極的総効果を示すものとして，とらえることができるのである。なお，拡張された意味での投入係数を，より一般的に，つぎのように定義し，《複投入係数》とよぶことにしよう。

(14) $A_{ij}+A_{ik}B_kA_{kj}=A^k{}_{ij}$……第 j 部門における第 i 部門産品の複投入係数 ($l_i\times l_j$ 行列)

一般的に定義された複投入係数においては，3部門間の投入・波及関係が前提されている。いまや，われわれは3部門間の交流関係を分析すべき地点に到達した。そして，一見，複雑にみえる3部門間の交流関係も，複投入係数を用いることによって，かなり簡明に把握することが可能となる。

〔4〕 3部門間の交流関係

まず，議論を一般的に展開できるように，投入係数行列 A をつぎのように考えておく。

(1)′ $$A=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} l_i & l_j & l_k \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c:c:c} A_{ii} & A_{ij} & A_{ik} \\ \hdashline A_{ji} & A_{jj} & A_{jk} \\ \hdashline A_{ki} & A_{kj} & A_{kk} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\,l_i \\ \}\,l_j \\ \}\,l_k \end{array} \end{array}$$

そして，これに対応するレオンチェフ逆行列はつぎのように定まるとしよう。

$$C=(I-A)^{-1}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} l_i & l_j & l_k \end{array}\\ \left[\begin{array}{c:c:c} C_{ii} & C_{ij} & C_{ik} \\ \hdashline C_{ji} & C_{jj} & C_{jk} \\ \hdashline C_{ki} & C_{kj} & C_{kk} \end{array}\right]\begin{array}{l} \}l_i \\ \}l_j \\ \}l_k \end{array}\end{array} \tag{15}$$

なお，以下において，C_{ij} は《レオンチェフ乗数》とよばれる。

ここで，2部門間の生産および投入に関する誘発係数に対応して，第3部門への波及を考慮したある部門から他の部門への誘発連関を示す係数をつぎのように定義し，それぞれを《複生産誘発係数》，《複投入誘発係数》とよぶことにする。

(16)　$M_i^k A^k{}_{ij}=\alpha^k{}_{ij}$……第 j 部門→第 i 部門の複生産誘発係数（$l_i\times l_j$ 行列）

(17)　$A^k{}_{ij}M_j^k=\beta^k{}_{ij}$……第 j 部門→第 i 部門の複投入誘発係数（$l_i\times l_j$ 行列）

ここで，前者は(8)，(14)を用いて変形すれば

(16)′　$\alpha^k{}_{ij}=K_i^k(B_iA_{ij}+B_iA_{ik}B_kA_{kj})$

となるが，右辺のカッコの中をみると，第1項は第 j 部門の第 i 部門産品の投入（A_{ij}）が誘発する第 i 部門の内部波及（B_i）であるから，直接的な $j\to i$ の生産誘発効果を示している。これに対して第2項は，第 j 部門の第 k 部門産品の投入（A_{kj}）によって誘発される第 k 部門の内部波及（B_k）が，第 i 部門産品の投入（A_{ik}）を必要とすることによって第 i 部門の内部波及（B_i）をどれだけ誘発するかを示すものであるから，第 k 部門を経由する間接的な $j\to i$ の生産誘発効果を示すものである。したがって複生産誘発係数 $\alpha^k{}_{ij}$ は，直接的・間接的ルートを通ずる $j\to i$ の生産誘発が，第 k 部門との波及関係によって，さらに外部乗数倍（K_i^k）された総効果にほかならない。

複投入誘発係数についても同様に変形すれば，次式

(17)′　$\beta^k{}_{ij}=(A_{ij}+A_{ik}B_kA_{kj})K_j^kB_j$

が成立する。つまり，第 j 部門での産業間内部波及（B_j）が第 k 部門との波及

関係によって外部乗数倍 (K_j^k) された総効果は，一方では直接的に第 i 部門産品の投入 (A_{ij}) を誘発し，他方では第 k 部門を経由して間接的に第 i 部門産品の投入 ($A_{kj}\to B_k\to A_{ik}$) を誘発しているわけであって，直接的・間接的両ルートを通ずる $j\to i$ の投入誘発連関の総効果が複投入誘発係数として把えられているのである。

つぎに，3部門における外部乗数を，2部門の場合と同様に，つぎのように定義することができる。

(18)　$(I-\alpha^k{}_{ij}\alpha^k{}_{ji})^{-1}=\overline{K}_i^k$……第 i 部門の複外部乗数 ($l_i\times l_i$ 行列)

これを，2部門における偏外部乗数と区別して，《複外部乗数》とよぶことにすれば，それは第 i 部門の生産活動を実現するために生ずる $A^k{}_{ji}\to M_j^k\to A^k{}_{ij}\to M_i^k\to A^k{}_{ji}$ という波及過程の究極的総効果を示している。2部門の場合には，$i\to j$, $j\to i$ の誘発連関において直接的ルートを通ずる効果のみが集計されているのに対して，3部門においては，第 k 部門を経由する間接的ルートを通ずる効果もまた集計されているのである。

さて，このように3部門の外部乗数を定義するとき，それに対応する内部乗数が M_i^k となることは，外部乗数の定義からただちに予想されるが，それは次のように示されている。まず，複外部乗数と偏レオチェフ乗数の積を考えると，つぎのごとくなる。

$$\begin{aligned}\overline{K}_i^k M_i^k &= (I-\alpha^k{}_{ij}\alpha^k{}_{ji})^{-1}(I-A^k{}_{ii})^{-1}\\ &=\{(I-A^k{}_{ii})(I-M_i^k A^k{}_{ij}M_j^k A^k{}_{ji})\}^{-1}\\ &=(I-A^k{}_{ii}-A^k{}_{ij}M_j^k A^k{}_{ji})^{-1}\\ &=\{I-(A^k{}_{ii}+A^k{}_{ij}M_j^k A^k{}_{ji})\}^{-1}\end{aligned}$$

ここで右辺は，次節で明らかにされるように，3部門における自部門の逆行列係数そのものであり，レオンチェフ乗数 C_{ii} にほかならない。そこで

(19)　$A^k{}_{ii}+A^k{}_{ij}M_j^k A^k{}_{ji}=\overline{A}^k{}_{ii}$

とおくならば，次式が成立する。

(20)　$\overline{K}_i^k M_i^k=(I-\overline{A}^k{}_{ii})^{-1}=C_{ii}$

これに対して，単内部乗数 B_i に対応する外部乗数を定義することも可能である。それは，(1)′の投入係数行列を前提した上で，それを(1)″のように２部門に分割すれば，２部門における外部乗数と同様に求められる。

$$(1)'' \qquad A=\left[\begin{array}{c:cc} A_{ii} & A_{ij} & A_{ik} \\ \hdashline A_{ji} & A_{jj} & A_{jk} \\ A_{ki} & A_{kj} & A_{kk} \end{array}\right]$$

(1)″ において，(6)の左辺に相当するものを展開すれば，

$$\begin{aligned}
&B_i\begin{bmatrix}A_{ij} & A_{ik}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-A_{jj} & -A_{jk}\\ -A_{kj} & I-A_{kk}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_{ji}\\ A_{ki}\end{bmatrix}\\
&=B_i\begin{bmatrix}A_{ij} & A_{ik}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_j{}^k & M_j{}^k\beta_{jk}\\ \alpha_{kj}M_j{}^k & B_k+\alpha_{kj}M_j{}^k\beta_{jk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{ji}\\ A_{ki}\end{bmatrix}\\
&=B_i\{A_{ik}B_kA_{ki}+(A_{ij}+A_{ik}B_kA_{kj})M_j{}^k(A_{ji}+A_{jk}B_kA_{ki})\}\\
&=B_i(A_{ik}B_kA_{ki}+A^k{}_{ij}M_j{}^kA^k{}_{ji})
\end{aligned}$$

となるから，その外部乗数は次式のように定義される[7]。

$$(21) \qquad \{I-B_i(A_{ik}B_kA_{ki}+A^k{}_{ij}M_j{}^kA^k{}_{ji})\}^{-1}=\overline{\overline{K_i}}$$ ……第 i 部門の総外部乗数

これを，前述の複外部乗数と区別して，《総外部乗数》とよぶことにしよう。そこで，総外部乗数と単内部乗数との積を考えれば，

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{K}}_iB_i&=\{I-B_i(A_{ik}B_kA_{ki}+A^k{}_{ij}M_j{}^kA^k{}_{ji})\}^{-1}B_i\\
&=[(I-A_{ii})\{I-B_i(A_{ik}B_kA_{ki}+A^k{}_{ij}M_j{}^kA^k{}_{ji})\}]^{-1}\\
&=\{I-(A_{ii}+A_{ik}B_kA_{ki}+A^k{}_{ij}M_j{}^kA^k{}_{ji})\}^{-1}\\
&=\{I-(A^k{}_{ii}+A^k{}_{ij}M_j{}^kA^k{}_{ji})\}^{-1}\\
&=(I-\overline{A}^k{}_{ii})^{-1}
\end{aligned}$$

となるから，⒇式によって次式が成立する。

7)　上式の展開において，$\begin{bmatrix}I-A_{jj} & -A_{jk}\\ -A_{kj} & I-A_{kk}\end{bmatrix}^{-1}$ にあたるものとして(9)の４番目の表現形式を採用したが，いま(9)の５番目の表現形式を採用すれば，次のように示される。

$$\begin{aligned}
&B_i\begin{bmatrix}A_{ij} & A_{ik}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_j+\alpha_{jk}M_k{}^j\beta_{kj} & \alpha_{jk}M_k{}^j\\ M_k{}^j\beta_{kj} & M_k{}^j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{ji}\\ A_{ki}\end{bmatrix}\\
&=B_i\{A_{ij}B_jA_{ji}+(A_{ik}+A_{ij}B_jA_{jk})M_k{}^j(A_{ki}+A_{kj}B_jA_{ji})\}\\
&=B_i(A_{ij}B_jA_{ji}+A^j{}_{ik}M_k{}^jA^j{}_{ki})
\end{aligned}$$

したがって，第 i 部門の総外部乗数は，

$$(21) \quad \overline{\overline{K}}_i=\{I-B_i(A_{ij}B_jA_{ji}+A^j{}_{ik}M_k{}^jA^j{}_{ki})\}^{-1}$$

と表わすこともできる。

$$\overline{\overline{K}}_i B_i = \overline{K}_i{}^k M_i{}^k = (I - \overline{A}^k{}_{ii})^{-1} = C_{ii} \tag{22}$$

ここから，ある部門より初発した波及過程がその部門にもたらす直接・間接の究極的《自部門総効果》を示すレオンチェフ乗数は，「総外部乗数×単内部乗数」という形にも，また「複外部乗数×偏レオンチェフ乗数」という形にも分解・表示できることが，明らかとなる。そして，上式から

$$\overline{\overline{K}}_i = \overline{K}_i{}^k K_i{}^k \tag{23}$$

がみちびかれるから，総外部乗数は複外部乗数と偏外部乗数との積であることがわかる[8]。さらに $\overline{A}^k{}_{ii}$ は，(19)式に示されるように全体として，他の2つの部門へのすべての波及を考慮した自部門投入係数と考えることができるから，このような他部門へのすべての誘発連関を含めた投入係数を波及因子とする乗数過程のもたらす総効果を考えると，それはレオンチェフ乗数そのものになっているわけである。

以上において，3部門間の交流関係を分析する際の基本的な概念はすべて提示することができた。さらに進んだ分析については，次節における数学的展開によって可能となるであろう。

Ⅲ　3部門分割モデルの数学的構造

まず，3部門に分割した産業連関モデルは次式のように示される。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \tag{24}$$

ここで，

X_i……第 i 部門の産出高（列ベクトル，l_i 次）

f_i……第 i 部門に対する最終需要（列ベクトル，l_i 次）

---

8)　なお，第 i 部門の複外部乗数として，$\overline{K}_i{}^j = (I - \alpha^j{}_{ik}\alpha^j{}_{ki})^{-1}$，これに対応する内部乗数として $M_i{}^j$ を考え，$A^j{}_{ii} + A^j{}_{ik} M_k{}^j A^j{}_{ki} = \overline{A}^j{}_{ii}$ とおけば，レオンチェフ乗数は，$C_{ii} = \overline{K}_i{}^j M_i{}^j = (I - \overline{A}^j{}_{ii})^{-1}$ として与えられる。したがって，第 i 部門の総外部乗数 $\overline{\overline{K}}_i$ として注7）の表現形式を採用すれば，$\overline{\overline{K}}_i B_i = \overline{K}_i{}^j M_i{}^j = (I - \overline{A}^j{}_{ii})^{-1} = C_{ii}$ より，次式の成立をみる。

$$\overline{\overline{K}}_i = \overline{K}_i{}^k K_i{}^k = K_i{}^j K_i{}^j \tag{23'}$$

である。そして，この連立方程式体系の解はつぎのように示される。

$$(25)\quad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I-A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{21} & I-A_{22} & -A_{23} \\ -A_{31} & -A_{32} & I-A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

さて，本節でのわれわれの課題は，部門間の交流関係が明らかとなるように，レオンチェフ逆行列 $(I-A)^{-1}$ のエレメントを前節で定義した諸係数を用いて分解・表示することであるが，それには，大きく分けて２つの方法がある。１つは，ある１部門に関する需給均衡方程式から出発して，順次他の部門に進んでゆくという解法であり，もう１つは，特定２部門に関する一対の需給均衡方程式をまず解いた上でもう１つの残された部門に進む方法である。ここでは前者からはじめるが，あらかじめ(24)式をつぎのように書き改めておく。

$$X_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + f_1 \qquad ①$$

$$(24)' \quad X_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 + f_2 \qquad ②$$

$$X_3 = A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 + f_3 \qquad ③$$

〔１〕 第３部門の需給均衡方程式から出発することにしよう。③から

$$(I-A_{33})X_3 = A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + f_3$$

がえられる。ここで，(2)式から $(I-A_{33})^{-1} = B_3$ であるから，(3)を考慮して

$$X_3 = B_3A_{31}X_1 + B_3A_{32}X_2 + B_3f_3$$

$$= \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}X_2 + B_3f_3$$

をうる。この式を②に代入して整理すれば，

$$X_2 = (A_{21} + A_{23}B_3A_{31})X_1 + (A_{22} + A_{23}B_3A_{32})X_2 + f_2 + A_{23}B_3f_3$$

がえられる。そこで(14)および(4)を用いると

$$X_2 = A^3{}_{21}X_1 + A^3{}_{22}X_2 + f_2 + \beta_{23}f_3$$

$$(I-A^3{}_{22})X_2 = A^3{}_{21}X_1 + f_2 + \beta_{23}f_3$$

となる。そして(13)式によって $(I-A^3{}_{22})^{-1} = M_2{}^3$ であるから次式が成立する。

$$X_2 = M_2{}^3A^3{}_{21}X_1 + M_2{}^3f_2 + M_2{}^3\beta_{23}f_3 \qquad ②'$$

②′を用いれば，X_3 についても次式がみちびかれる。

$$X_3 = (\alpha_{31} + \alpha_{32}M_2{}^3A^3{}_{21})X_1 + \alpha_{32}M_2{}^3f_2 + (B_3 + \alpha_{32}M_2{}^3\beta_{23})f_3 \qquad ③'$$

したがって，②′と③′から，第2・第3部門に関する連立解は次のように示される。

$$(26)\qquad \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} M_2{}^3A^3{}_{21} & M_2{}^3 & M_2{}^3\beta_{23} \\ \alpha_{31}+\alpha_{32}M_2{}^3A^3{}_{21} & \alpha_{32}M_2{}^3 & B_3+\alpha_{32}M_2{}^3\beta_{23} \end{array}\right] \begin{bmatrix} X_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

ここで，第1部門を無視して $X_1=0$ とおき，第2・第3部門間の波及関係にのみ注目すれば

$$(26)'\qquad \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2{}^3 & M_2{}^3\beta_{23} \\ \alpha_{32}M_2{}^3 & B_3+\alpha_{32}M_2{}^3\beta_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

となり，(9)式で示された2部門における逆行列係数の分解・表示の**1**つの形式がえられることになる。

つぎに，第**1**部門の需給均衡方程式①に②′および③′を代入して整理すれば

$$X_1=(A^3{}_{11}+A^3{}_{12}M_2{}^3A^3{}_{21})X_1+f_1+A^3{}_{12}M_2{}^3f_2 + (A_{13}+A^3{}_{12}M_2{}^3A_{23})B_3f_3$$

がえられる。したがって，(4)，(17)および(19)式を考慮すれば

$$(I-\bar{A}^3{}_{11})^{-1}X_1=f_1+\beta^3{}_{12}f_2+(\beta_{13}+\beta^3{}_{12}\beta_{23})f_3$$

となるから，(20)によって $(I-\bar{A}^3{}_{11})^{-1}=C_{11}$ とおけば

$$X_1=C_{11}f_1+C_{11}\beta^3{}_{12}f_2+C_{11}(\beta_{13}+\beta^3{}_{12}\beta_{23})f_3 \qquad ①''$$

が成立する。そこで，①″を②′に代入し，(16)式を考慮して整理すれば

$$X_2=\alpha^3{}_{21}C_{11}f_1+(M_2{}^3+\alpha^3{}_{21}C_{11}\beta^3{}_{12})f_2 + \{M_2{}^3\beta_{23}+\alpha^3{}_{21}C_{11}(\beta_{13}+\beta^3{}_{12}\beta_{23})\}f_3 \qquad ②''$$

がえられる。同様に①″を③′に代入し，(16)を考慮して整理すれば

$$X_3=(\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha^3{}_{21})C_{11}f_1+\{\alpha_{32}M_2{}^3+(\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha^3{}_{21})C_{11}\beta^3{}_{12}\}f_2 + \{B_3+\alpha_{32}M_2{}^3\beta_{23}+(\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha^3{}_{21})C_{11}(\beta_{13}+\beta^3{}_{12}\beta_{23})\}f_3 \qquad ③''$$

をうる。したがって，①″，②″，③″を連立させた解はつぎのようになる。

$$(27)\qquad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} C_{11} & C_{11}\beta^3{}_{12} & C_{11}(\beta_{13}+\beta^3{}_{12}\beta_{23}) \\ \alpha^3{}_{21}C_{11} & M_2{}^3+\alpha^3{}_{21}C_{11}\beta^3{}_{12} & M_2{}^3\beta_{23}+\alpha^3{}_{21}C_{11}(\beta_{13}+\beta^3{}_{12}\beta_{23}) \\ (\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha^3{}_{21})C_{11} & \alpha_{32}M_2{}^3+(\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha^3{}_{21})C_{11}\beta^3{}_{12} & B_3+\alpha_{32}M_2{}^3\beta_{23}+(\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha^3{}_{21})C_{11}(\beta_{13}+\beta^3{}_{12}\beta_{23}) \end{array}\right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

ここにおいて，われわれはレオンチェフ逆行列を分解・表示する場合の１つの形式をみいだすことができた。なお以上においては第３部門から出発して，第２，第１部門へと進んだのであるが，第１部門から出発して，逆に解いてゆくならば，つぎの表現をうることができる。

$$(27)' \quad C=\left[\begin{array}{r:r:r} B_1+\alpha_{12}M_2{}^1\beta_{21}+(\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha^1{}_{23})C_{33}(\beta_{31}+\beta^1{}_{32}\beta_{21}) & \alpha_{12}M_2{}^1+(\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha^1{}_{23})C_{33}\beta^1{}_{32} & (\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha^1{}_{23})C_{33} \\ M_2{}^1\beta_{21}+\alpha^1{}_{23}C_{33}(\beta_{31}+\beta^1{}_{32}\beta_{21}) & M_2{}^1+\alpha^1{}_{23}C_{33}\beta^1{}_{32} & \alpha^1{}_{23}C_{33} \\ C_{33}(\beta_{31}+\beta^1{}_{32}\beta_{21}) & C_{33}\beta^1{}_{32} & C_{33} \end{array}\right]$$

その他，種々の順序で解いてゆけば，それに応じて異った表現をあたえることができる。

〔２〕　第２の方法は，特定２部門の需給均衡方程式に関する局部的な連立解を求めることからはじまる。②，③をその方程式とすると

$$(I-A_{22})X_2=A_{21}X_1+A_{23}X_3+f_2$$

$$(I-A_{33})X_3=A_{31}X_1+A_{32}X_2+f_3$$

がえられるから，(2)および(3)を用いて変形し

$$X_2=\alpha_{21}X_1+\alpha_{23}X_3+B_2f_2$$

$$X_3=\alpha_{31}X_1+\alpha_{32}X_2+B_3f_3$$

をうる。そこで上式を相互に代入して整理すれば

$$(I-\alpha_{23}\alpha_{32})X_2=(\alpha_{21}+\alpha_{23}\alpha_{31})X_1+B_2f_2+\alpha_{23}B_3f_3$$

$$(I-\alpha_{32}\alpha_{23})X_3=(\alpha_{31}+\alpha_{32}\alpha_{21})X_1+\alpha_{32}B_2f_2+B_3f_3$$

がえられる。(7)式によって偏外部乗数$(I-\alpha_{23}\alpha_{32})^{-1}=K_2{}^3$，$(I-\alpha_{32}\alpha_{23})^{-1}=K_3{}^2$を上式のそれぞれに左からかけて整理すると，次式が成立する。

$$X_2=K_2{}^3B_2A^3{}_{21}X_1+K_2{}^3B_2f_2+K_2{}^3\alpha_{23}B_3f_3 \qquad ②^1$$

$$X_3=K_3{}^2B_3A^2{}_{31}X_1+K_3{}^2\alpha_{32}B_2f_2+K_3{}^2B_3f_3 \qquad ③^1$$

したがって，これら２部門に関する連立解は次のように示される。

$$(28) \quad \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{r:r:r} K_2{}^3B_2A^3{}_{21} & K_2{}^3B_2 & K_2{}^3\alpha_{23}B_3 \\ K_3{}^2B_3A^2{}_{31} & K_3{}^2\alpha_{32}B_2 & K_3{}^2B_3 \end{array}\right]\begin{bmatrix} X_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

ここで，$X_1=0$ とおいて，第２・第３部門の波及関係をとりだすならば，

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2{}^3 B_2 & K_2{}^3 \alpha_{23} B_3 \\ K_3{}^2 \alpha_{32} B_2 & K_3{}^2 B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \qquad (28)'$$

がみちびかれ，(9)式で示した２部門における逆行列係数の分解・表示のもう１つの形式がえられるわけである[9]。

つぎに，第１部門の方程式①を変形して

$$(I-A_{11})X_1 = A_{12}X_2 + A_{13}X_3 + f_1$$

をみちびき，$(I-A_{11})^{-1}=B_1$ および(3)によって

$$X_1 = \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + B_1 f_1$$

をうる。そこで，この式に②^1，③^1 を代入し，(4)，(10)，(16)を用いて整理すると

$$\begin{aligned}(I-\alpha_{13}\alpha^3{}_{21}-\alpha_{13}\alpha^2{}_{31})X_1 &= B_1 f_1 + (\alpha_{12}M_2{}^3 + \alpha_{13}M_3{}^2\beta_{32})f_2 \\ &\quad + (\alpha_{12}M_2{}^3\beta_{23} + \alpha_{13}M_3{}^2)f_3 \qquad ①^1\end{aligned}$$

がえられる。ここで，左辺の X_1 にかかる係数行列の逆行列が総外部乗数に等しいこと，すなわち

$$(I-\alpha_{12}\alpha^3{}_{21}-\alpha_{13}\alpha^2{}_{31})^{-1} = \overline{\overline{K}}_1$$

が証明される[10]。また，(11)式の $\alpha_{ij}M_j{}^i = M_i{}^j\beta_{ij}$ なる関係を利用して，①^1 を変形すると

$$\begin{aligned} X_1 &= \overline{\overline{K}}_1 B_1 f_1 + \overline{\overline{K}}_1 B_1 A^3{}_{12} M_2{}^3 f_2 + \overline{\overline{K}}_1 B_1 A^2{}_{13} M_3{}^2 f_3 \\ &= \overline{\overline{K}}_1 B_1 f_1 + \overline{\overline{K}}_1 B_1 \beta^3{}_{12} f_2 + \overline{\overline{K}}_1 B_1 \beta^2{}_{13} f_3 \qquad ①^2 \end{aligned}$$

がえられる。そこで，これを②^1，③^1 に代入して整理すると

---

9)　この式と(26)′式とをあわせて考えれば，(9)を証明したことになる。

10)　第 i 部門の総外部乗数 ($\overline{\overline{K}}_i$) は，(1)″ より次のように定義されるが，$\begin{bmatrix} I-A_{jj} & -A_{jk} \\ -A_{kj} & I-A_{kk} \end{bmatrix}^{-1}$ にあたるものとして，(9)の３番目の表現形式を採用して変形すれば，

$$\begin{aligned} \overline{\overline{K}}_i &= \left\{ I - B_i [A_{ij}\ \ A_{ik}] \begin{bmatrix} I-A_{jj} & -A_{jk} \\ -A_{kj} & I-A_{kk} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{ji} \\ A_{ki} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ I - B_i [A_{ij}\ \ A_{ik}] \begin{bmatrix} K_j{}^k B_j & K_j{}^k \alpha_{jk} B_k \\ K_k{}^j \alpha_{kj} B_j & K_k{}^j B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ji} \\ A_{ki} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &= \{ I - \alpha_{ij} M_j{}^k (A_{ji} + A_{jk} B_k A_{ki}) - \alpha_{ik} M_k{}^j (A_{ki} + A_{kj} B_j A_{ji}) \}^{-1} \\ &= (I - \alpha_{ij} M_j{}^k A^k{}_{ji} - \alpha_{ik} M_k{}^j A^j{}_{ki})^{-1} \\ &= (I - \alpha_{ij}\alpha^k{}_{ji} - \alpha_{ik}\alpha^j{}_{ki})^{-1} \end{aligned}$$

を得る。いま上式において，$i \to 1$，$j \to 2$，$k \to 3$ とおけば

$$\overline{\overline{K}}_1 = (I - \alpha_{12}\alpha^3{}_{21} - \alpha_{13}\alpha^2{}_{31})^{-1}$$

$$X_2=\alpha^3{}_{21}\overline{\overline{K}}_1B_1f_1+(M_2{}^3+\alpha^3{}_{21}\overline{\overline{K}}_1B_1\beta^3{}_{12})f_2$$
$$+(M_2{}^3\beta_{23}+\alpha^3{}_{21}\overline{\overline{K}}_1B_1\beta^2{}_{13})f_3 \qquad ②^2$$
$$X_3=\alpha^2{}_{31}\overline{\overline{K}}_1B_1f_1+(M_3{}^2\beta_{32}+\alpha^2{}_{31}\overline{\overline{K}}_1B_1\beta^3{}_{12})f_2$$
$$+(M_3{}^2+\alpha^2{}_{31}\overline{\overline{K}}_1B_1\beta^2{}_{13})f_3 \qquad ③^2$$

をうる。そこで，これらを連立解として示すならば，つぎの形となる。

$$(29)\quad \begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\overline{K}}_1B_1 & \overline{\overline{K}}_1B_1\beta^3{}_{12} & \overline{\overline{K}}_1B_1\beta^2{}_{13}\\ \alpha^3{}_{21}\overline{\overline{K}}_1B_1 & M_2{}^3+\alpha^3{}_{21}\overline{\overline{K}}_1B_1\beta^3{}_{12} & M_2{}^3\beta_{23}+\alpha^3{}_{21}\overline{\overline{K}}_1B_1\beta^2{}_{13}\\ \alpha^2{}_{31}\overline{\overline{K}}_1B_1 & M_3{}^2\beta_{32}+\alpha^2{}_{31}\overline{\overline{K}}_1B_1\beta^3{}_{12} & M_3{}^2+\alpha^2{}_{31}\overline{\overline{K}}_1B_1\beta^2{}_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}$$

これは，第1部門の総外部乗数と単内部乗数がどのように作用しているかを明示的に表わした形であるが，$\overline{\overline{K}}_1B_1=C_{11}$ を用いると，より簡潔に，つぎのように表わせる。

$$(29)'\quad \begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{11}\beta^3{}_{12} & C_{11}\beta^2{}_{13}\\ \alpha^3{}_{21}C_{11} & M_2{}^3+\alpha^3{}_{21}C_{11}\beta^3{}_{12} & M_2{}^3\beta_{23}+\alpha^3{}_{21}C_{11}\beta^2{}_{13}\\ \alpha^2{}_{31}C_{11} & M_3{}^2\beta_{32}+\alpha^2{}_{31}C_{11}\beta^3{}_{12} & M_3{}^2+\alpha^2{}_{31}C_{11}\beta^2{}_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}$$

以上においては，われわれは第2・第3部門に関する局部的連立解を求めることから始めたのであるが，同様に第1・第2部門から出発することも可能である。その場合には，逆行列はつぎのように，分解・表示される。

$$(29)''\quad C=\begin{bmatrix}M_1{}^2+\alpha^2{}_{13}C_{33}\beta^2{}_{31} & M_1{}^2\beta_{12}+\alpha^2{}_{13}C_{33}\beta^1{}_{32} & \alpha^2{}_{13}C_{33}\\ M_2{}^1\beta_{21}+\alpha^1{}_{23}C_{33}\beta^2{}_{31} & M_2{}^1+\alpha^1{}_{23}C_{33}\beta^1{}_{32} & \alpha^1{}_{23}C_{33}\\ C_{33}\beta^2{}_{31} & C_{33}\beta^1{}_{32} & C_{33}\end{bmatrix}$$

同様に，第1・第3部門から出発すれば，もう1つの表現をうる。そこで，それらをもとにして，レオンチェフ逆行列を自部門逆行列係数 C_{ii} と複生産誘発係数 $\alpha^k{}_{ij}$ もしくは複投入誘発係数 $\beta^k{}_{ij}$ のみによって，次のように分解・表示することもできる。

$$(30)\quad C=\begin{bmatrix}C_{11} & \alpha^3{}_{12}C_{22} & \alpha^2{}_{13}C_{33}\\ \alpha^3{}_{21}C_{11} & C_{22} & \alpha^1{}_{23}C_{33}\\ \alpha^2{}_{31}C_{11} & \alpha^2{}_{31}C_{22} & C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{11}\beta^3{}_{12} & C_{11}\beta^2{}_{13}\\ C_{22}\beta^3{}_{21} & C_{22} & C_{22}\beta^1{}_{23}\\ C_{33}\beta^2{}_{31} & C_{33}\beta^1{}_{32} & C_{33}\end{bmatrix}$$

以上のことから，逆行列係数の分解・表示の方法には幾通りも存在することが明らかとなった。そして，それから一般的につぎの関係式が成立する。

まず自部門総効果を示す逆行列係数 C_{ii} については

$$C_{ii}=\overline{\overline{K}}_iB_i \quad ①$$
$$=\overline{K}_i{}^kM_i{}^k=\overline{K}_i{}^jM_i{}^j \quad ㋺$$
(31)
$$=\overline{K}_i{}^kK_i{}^kB_i=\overline{K}_i{}^jK_i{}^jB_i \quad ㋩$$
$$=M_i{}^k+\alpha^k{}_{ij}C_{jj}\beta^k{}_{ji}=M_i{}^j+\alpha^j{}_{ik}C_{kk}\beta^j{}_{ki} \quad ㋺'$$
$$=B_i+\alpha_{ik}M_k{}^i\beta_{ki}+\alpha^k{}_{ij}C_{jj}\beta^k{}_{ji} \quad ㋩'$$
$$=B_i+\alpha_{ij}M_j{}^i\beta_{ji}+\alpha^j{}_{ik}C_{kk}\beta^j{}_{ki}$$

また，部門間交叉効果を示す逆行列係数 C_{ij} については

(32)
$$C_{ij}=\alpha^k{}_{ij}C_{jj}=C_{ii}\beta^k{}_{ij} \quad ①$$
$$=\alpha_{ij}M_j{}^i+\alpha^j{}_{ik}C_{kk}\beta^i{}_{kj}=M_i{}^j\beta_{ij}+\alpha^j{}_{ik}C_{kk}\beta^i{}_{kj} \quad ㋺$$

のように変形することができ，したがってその中のいずれの表現形式をもとりうることが判明する。

Ⅳ　逆行列係数の分解分析

(31)，(32)式は，われわれが到達した結論を数式でもって表示するものである。そこで最後に，3部門分割モデルにおける逆行列係数の分解分析のもつ意義を検討しよう。

まず第1に，逆行列係数すなわちレオンチェフ乗数は，自部門内の波及効果と他部門を経由する波及効果とを集計する究極的総効果であることが明示的に表現されているが，さらにそれは，第Ⅱ節で定義した諸係数を用いて積の形によっても，また和の形によっても表示されることが示されている。

すなわち，積の形で自部門総効果を示すものとしては，①「総外部乗数×単内部乗数」あるいは，㋺「複外部乗数×偏レオンチェフ乗数」のごとく分解することも可能であれば，㋩のように「複外部乗数×偏外部乗数×単内部乗数」という形にも分解できることがわかる。そして，これらに対応して，たとえば㋺に対応しては㋺′のように「2部門内部波及効果（偏レオンチェフ乗数）＋第3の部門を経由する波及効果」として，また㋩に対応しては㋩′のごとく「自

部門波及効果＋第２の部門を経由する波及効果＋第３の部門を経由する波及効果」として，和の形で分解・表示することができるのである。

そこから，偏外部乗数 K_i^j は「第２の部門を経由する波及効果」を，複外部乗数 $\overline{K_i^j}$ は「第３の部門を経由する波及効果」を，内部乗数に対する乗数の形でとらえたものに他ならないことが明らかとなる。したがって，総外部乗数 $\overline{\overline{K_i}}$ はこれら双方の効果を集計したものとして，「複外部乗数×偏外部乗数」すなわち $\overline{K_i^j} \times K_i^j$ の形でとらえることができるのである。

部門間交叉効果についても同様に，㋑「複生産誘発係数×波及の初発点となる部門の自部門総効果」あるいは「波及を受ける部門の自部門総効果×複投入誘発係数」という積の形でとらえることもできるが，また㋺のように「２部門間の交叉効果＋第３の部門を経由する交叉効果」という和の形によってもとらえることができるのである。

第２に，逆行列係数が幾通りかの代替的な表現形式をとることによって，部門間依存関係の比較検討が可能となることがあげられる。

たとえば，自部門総効果について，第３の部門としていずれを採用しても，その総効果は同じとなることが明示されていることから，２部門間の相互依存関係の強度を示す１つの指標が与えられる。すなわち，㋩において K_i^k と K_i^j とを比較するならば，第 i 部門が第 k 部門と第 j 部門のいずれと，より相互依存度が高いかが判定される[11]。ところで，$\overline{K_i^k} K_i^k = \overline{K_i^j} K_i^j = \overline{\overline{K_i}}$ であるから，$\overline{K_i^k}$，$\overline{K_i^j}$ は K_i^k，K_i^j を補整するものとなる。したがって，$K_i^k > K_i^j$ ならば，$\overline{K_i^k} < \overline{K_i^j}$ である。つまり，偏外部乗数が２部門間の相互依存関係を示すものであるのに対して，複外部乗数は第３の部門を経由する乗数的波及効果を示すものであるから，i—k 間の結合度が i—j 間のそれより強ければ，当然 $\overline{K_i^k}$ と $\overline{K_i^j}$ はそれと逆に動くわけである。

また，B_i と M_i^j との比をとることによって，第 i 部門の――第 j 部門のみ

11)　㋺，㋺′ における M_i^k と M_i^j を比較してもよい。あるいは，㋩′ において K_i^k と K_i^j に対応するものとして，$\alpha_{ik} M_k^i \beta_{ki}$ と $\alpha_{ij} M_j^i \beta_{ji}$ とを比較してもよいが，K_i^k と K_i^j との比較がもっとも簡潔であろう。

を考慮した場合における——内部波及率が求められるが，同様にして B_i と C_{ii} との比をとることによって，第 i 部門の——第 j・k 両部門を考慮した場合における——内部波及率が求められる。そして上式の関係を用いれば，前者は $1/K_i{}^j$ となり，後者は $1/\overline{\overline{K_i}}$ となることが容易に判明する。また，$M_i{}^j$ と C_{ii} との比をとることによって，第3の部門を考慮した場合における第1・第2両部門の内部波及率を求めることができ，これは $K_i{}^j$ と $\overline{\overline{K_i}}$ との比に他ならないことが明らかとなる。

さらにまた，3部門分割モデルにおける生産・投入誘発関係を表わす係数として，われわれは $\alpha^k{}_{ij}$, $\beta^k{}_{ij}$ を提案した。これらは，(16)′，(17)′ で示したように，$j \to i$ の直接的な誘発効果を示す α_{ij}, β_{ij} と，第 k 部門を経由する間接的な誘発効果とに分離可能である。したがって，α_{ij} と $\alpha^k{}_{ij}$ とを比較することによって，第 k 部門を経由することによって $j \to i$ の誘発効果がどれだけ増幅されるかが示されるであろう。

第3に，多部門分割モデルにおいて，戦略的な3部門をとり出して，その部門間波及を明示的に考慮しようとするとき，この3部門分割モデルの適用が可能であることがあげられる。

第4に，逆行列計算実施上のメリットがあげられる。すなわち，現在利用可能な電子計算機の計算能力を上廻るほど高次の行列の逆転も，部門分割を行い，われわれの計算方式を用いることによって，可能となる。

参考文献

〔1〕 Leontief, W. W., *The Structure of American Economy*, 1st ed., 1941, 2nd ed., 1951, 山田勇・家本秀太郎訳「アメリカ経済の構造」1959年。
〔2〕 宮沢健一「経済構造の連関分析」1963年。
〔3〕 宮沢健一，地域経済と産業連関の構造，「横浜市大論叢，社会科学系列」1964年3月。
〔4〕 宮沢健一，地域経済の連関モデルとその適用，「調査月報」日本産業構造研究所，1965年1月。