經濟論叢

第105巻　第1･2･3号

昭和45年1・2・3月

京都大學經濟學會

Nash 解について

瀬地山　敏

I まえがき

複占問題に対するナッシュの解を検討するのが小論の目的である。検討にはいる前に問題のあらましをのべておくのが便宜であろう。

競争に参加する者が1人のケースと2人以上のケースを叙述するばあい，後者では，前者とちがって，各参加者の意思決定とそれにもとづく行動が相互に制約を受ける，という相違を考慮しなければならない。この一見してあきらかな事情のほかに，2人以上のケースには，各参加者の利害が完全に対立するばあいと，利害の対立する側面をもちながら参加者の一部が結托することによって，その結托に参加する者がそうしないばあいよりもそれぞれより大きい効用を達成することが可能なばあいとが，含まれうる点に注目する必要がある。参加者が1人のばあい，つまり独占のケースでは，このような状況のちがいはでてこないからである。参加者2人の競争が，独占のケースとの比較においてもつふたつの特徴のうち，問題を基本的に複雑しているのは，参加者が協調してより大きな効用を獲得するという可能性である。

各参加者の行動が相互に制約を受けるならば，各参加者は自分の行動がすべての競争相手に与える影響をすべて予測して，自分の行動を決定しなければならない。すなわち，自分のとる行動に対し，競争者がとる確定的な，または，蓋然的な反応を予測して，自分にとって最適な戦略を決定するわけである。競争にみられるこの動きと反応の関係は，各参加者の規模が市場の大きさにくらべて小さければ，それほど重要ではないだろう。いうまでもなく，これは純粋競争の一条件であって，「他の事情にして不変ならば」という想定を支えるひ

とつの有力な要件である。したがって，動きと反応の関係が競争の帰結に重要な意味をもってくるのは，参加者が少数のばあいである。なかでも，参加者が2人のケースは，競争における対応を分析するさいの出発点として位置づけることができよう。クールノー〔4〕の複占者は，与えられた市場の需要関数のもとで，たがいに，相手の産出量が自分の意思決定によって影響を受けない，と考えて，自分の利潤を極大化する最適な産出量を決定した。相手の産出量に対する最適な反応を指示する，ふたつの産出量反応曲線のまじわるところが市場の均衡点である。クールノーの均衡解を特徴づけているのは，各競争者が競争相手の行動についておこなっているひとつの特殊な想定である。容易に想像できるように，行動にかんする想定をかえれば，クールノー解はもはや均衡解ではなくなってくる。その後，クールノーの取扱いに加えられた検討は，すべて，競争者の戦略についてのクールノーと異なった想定によっていた，といえるであろう。たとえば，相互に相手の価格を所与と考える市場行動のケース，価格の振動を可能にするような市場構造の想定，あるいは，相互依存関係をもっと高次なものにして，各競争者は相手がこちらの産出量（または価格）に対し最適な産出量（または価格）を決定することを予想して，産出量（または価格）を決定する，というケースなど[1)]。このさまざまな想定についてはたんに論理的な代替としてではなく，複占またはそれに近似した現実の市場関係にその支えをもっているか，をさらに検討する問題がのこされている。いまこの点を無視して，想定そのもののコンシステンシーを考えてみれば，これらの想定には共通した矛盾がふくまれている。

クールノーの想定は，自己の産出量決定が相手の産出量決定に影響をおよぼさない，と考えて，もっぱら，自己の産出量が市場の需要との関連で直接的にもたらす効果だけに注目しているのだから，競争者の決定によって与えられる影響のすべてを考慮にいれなければならないはずの，利潤極大化という要請に

1) 複占問題の広汎な理解には，次の文献が適切である。青山〔1〕，第3章；ボーモル〔2〕，第3章；チェムバリン〔4〕，第3章ならびに補論A。

反することになるだろう。この全体的な相互依存性を強調したチェンバリンのモデルをのぞいて，他の諸モデルはこの種の矛盾をまぬがれていない。したがってこの難点をとりのぞくには行動の決定に相互依存の関係を正確に考慮しなければならない。しかし，各競争者とも相手の行動に同じ一定の反応パターンを前提して自己の最適戦略を決めるということは，その反応パターンが実際におこらないこと，したがって決定は，誤った予測にもとづいているのだから，最適なものでないことを意味する。このようにして，チェンバリンの競争相手の反応に関する想定ならびに均衡解も，利潤の極大化という視点よりみるとき，十分なものではない。言葉をかえていうと，複占モデルのいままでの想定は，クールノーのばあいを含めて，各競争者の利益は完全に対立すると考え，各競争相手に共通の反応パターンをさまざまに与えて，最適な戦略を発見しようとしたが，真に利潤の極大化の要請をみたすには，各競争者の利益の対立する側面だけではなく，協調すればともに利益の拡張が可能であるという側面も同時に処理しなければならない。

ナッシュ〔8〕は，複占を利害の完全には対立しない２人の協力ゲームとみたてて，問題の一般的解を導こうとした。競争者が協調する可能性を組入れることにより，使用できる戦略の数はふえるから，各競争者にとって達成可能な利潤は，完全に対立するケースにくらべて，すくなくとも小さくはないはずである。のちに示すように，クールノー均衡としての最適戦略にもとずく利潤点よりもパレト優位な点が達成可能となる。クールノー点に対し北東に位置する達成可能領域の境界上の点はいずれもパレト最適となり，したがって，パレト・ランキングを境界上の点の比較に適用することはできない。ナッシュはスレット（threat）の概念を用い，問題の解として境界上の特定の点を導いた。

II　ナッシュの解

1　諸前提

(1)プレイヤー1，2はそれぞれ，混合戦略 s_1，s_2 よりなるコムパクトかつ凸

の戦略集合 S_1, S_2 をもっている。

(2)プレィヤー1，2が独立にまたは協調して行なう行動のもたらす利得（u_1, u_2）の集合を B とする（ただし u_1, u_2 はそれぞれプレィヤー1，2の利潤を示す)。また B は凸かつコムパクトである。

(3)戦略（s_1, s_2)$\in S_1 \times S_2$ が行使されるばあいの，プレィヤー1，2の利得を $p_1(s_1, s_2)$, $p_2(s_1, s_2)$ と表わせば，$p_i(i=1, 2)$ は，s_1, s_2 の双一次形式である[2)]。

例　プレィヤー1の利得行列が右のように与えられているとき，$s_1=(\alpha_1, \alpha_2)$, $s_2=(\beta_1, \beta_2)$（ただし，$\alpha_1+\alpha_2=1$, $\alpha_1, \alpha_2 \geqq 0$, β に関しても同様）とすれば，混合戦略 s_1, s_2 が行なわれるばあいのプレィヤー1の利得 $p_1(s_1, s_2)$ は，

		プレイヤー2の戦略	
		I	II
プレイヤー1の戦略	1	a_{11}	a_{12}
	2	a_{21}	a_{22}

プレィヤー1の利得行列

$$p_1(s_1, s_2)=\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\alpha_i\beta_j$$

あきらかに

$$[p_1(s_2, s_2), p_2(s_1, s_2)]\in B$$

(4)プレィヤーはゲームの構造，自分ならびに競争プレィヤーの利得関係について，完全な情報をもち，合理的な行動をとる。

(5)プレィヤーは自分の要求が相手の要求と両立しないときには，スレットにより自分に有利なようにゲームを展開する。

2　ネゴシエィション・モデル

つぎのように4段階よりなるネゴシエィション・モデルを考える。

(1)スレット $t_i(i=1, 2)$ の選択　各プレィヤーは，要求 $d_i(i=1, 2)$ が両立

2)　これはプレィヤーに想定する効用関数の性質によってきまる。フォン・ノイマン，モルゲンシュテルン〔16〕, Chap. 1, Part 3.；ナッシュ〔12〕。

しないとき，混合戦略 t_i をもちいる。

(2)スレットを相互に知らせる。

(3)独立に要求 d_i を行なう。

(4)利得の決定　要求が両立すれば，利得はその要求額にきまり，両立しないときには利得は，スレットの与える利得となる。すなわち，

$(d_1, d_2)\in B$ のとき　d_i　$(i=1, 2)$

$(d_1, d_2)\notin B$ のとき　$p_i(t_1, t_2)$　$(i=1, 2)$

4段階のうち，(2), (4)はプレィヤーの意思決定をふくまないから，ネゴシエィションのゲームは，(1), (3)というふたつの手番よりなるゲームである。また，第2の手番にあたる(3)の段階では，第1手番すなわち(1)の段階におけるスレットの決定を知ったうえで，要求の意思決定を行なうのであるから，モデルを分割して，第2手番だけをふくみ，(1)で選択したスレットにより決定される利得関数をもったひとつのゲームを構成することができる。これを要求ゲームと呼ぶ。

3　要求ゲーム

(1)で，プレィヤー1，2がそれぞれ t_1, t_2 のスレットを選択しているとする。(t_1, t_2) が行なわれるときのプレィヤー1，2の利得をそれぞれ $p_1(t_1, t_2)=u_{1N}$, $p_2(t_1, t_2)=u_{2N}$ であらわす。

$$g(d_1, d_2)=\begin{cases}1 & d_1, d_2 \text{ 両立のとき} \\ 0 & d_1, d_2 \text{ 両立しないとき}\end{cases} \tag{3・1}$$

とおけば，各プレィヤーの利得関数は

$$\begin{array}{ll}\text{プレィヤー1} & d_1g+u_{1N}(1-g) \\ \text{プレィヤー2} & d_2g+u_{2N}(1-g)\end{array} \tag{3・2}$$

である。この利得関数のもとで行なわれる要求ゲームには，一般に無数の均衡解をもつ可能性がある。

ゲームの解をうるために，(3・1) の $g(d_1, d_2)$ を次のように連続な $h(d_1, d_2)$ にかえる。

$$h\begin{cases}(d_1,\ d_2)\in B\ のとき\ 1\\(d_1,\ d_2)\ が\ B\ の外側へはなれるにつれて\ 0\ に近ずく。\end{cases}$$

また効用関数を適当に変換して，$u_{1N}=0$, $u_{2N}=0$ とおけば，連続化をほどこしたゲームの利得関数は，（3・2）にかわって次のとおり。

$$\begin{aligned}p_1&=d_1h\\p_2&=d_2h\end{aligned}\qquad(3\cdot3)$$

各プレィヤーは利得が極大になるように自分の要求をきめるのが合理的であるから，

（3・3）より，

$$\left[\frac{\partial(d_1h)}{\partial d_1}\right]=0\qquad\left[\frac{\partial(d_2h)}{\partial d_2}\right]=0\qquad(3\cdot4)$$

をみたす（d_1^*, d_2^*）が，（3・3）のもとでの均衡点である。ところで，

$$\frac{\partial}{\partial d_1}[d_1d_2h]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}[d_1d_2h]=0$$

を満足する（d_1, d_2）は（3・4）をみたすことがあきらかである。

そこでいま，d_1d_2h を極大にする点を P, u_1u_2 の極大値を ρ とすれば（d_1, d_2 は u_1, u_2 とおきかえることができるから）

$$[d_1d_2h]_{(d_1,\ d_2)=p}=[u_1u_2h]_{(u_1,\ u_2)=p}\geqq[u_1u_2\cdot1]_{(u_1,\ u_2)\epsilon B}$$

$[u_1u_2\cdot1]_{(u_1,\ u_2)\epsilon B}$ の極大値 ρ, $0<h\leq1$ に注目して

$$[u_1u_2]_{(u_1,\ u_2)=p}\geqq\rho$$

$[u_1u_2]$ が B 上で極大になる点を Q とすれば，上の関係は次頁の図のとおりになる。（d_1, d_2）が両立しないとき，P は $u_1u_2=\rho$ の上方にある。またこのとき h が1に近い値をとるためには，P は B に十分近くなければならない。したがって，$h(d_1,\ d_2)$ の連続的になめらかな程度を少なくすればするほど，P が B を離れるにつれ，h はますます急速に低下するから，d_1d_2h の極大点

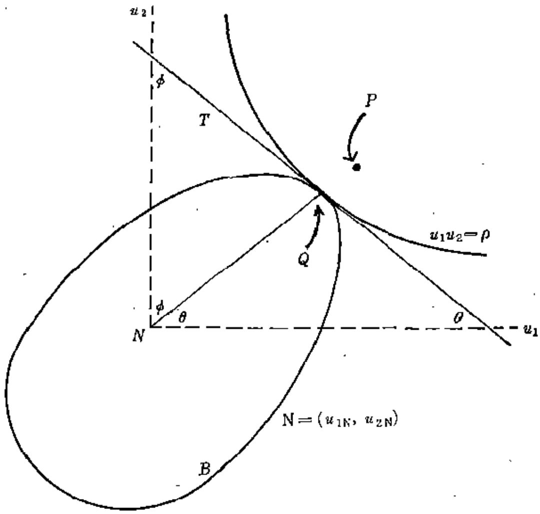


Fig. 1 要求ゲームの解

P はますます B に近くなければならない。h のなめらかさを減じて g に近づければ近づけるほど，Q は B と $u_1u_2=\rho$ の上方にある領域との唯一の接点であるから，P は Q に接近する。

Q は（3・3）により連続化されたゲームの均衡の唯一の極限点であるから，Q における $(u_1,\ u_2)$ は最適要求であって，Q は（3・2）のもとでの本来の要求ゲームの解である。

要求ゲームの最適解 Q と与えられたスレットが保証する利得 N のあいだに次の関係が成立している。

Q は N を原点とする座標上で u_1u_2 を極大にする点であるから，いま B の境界を $f(u_1,u_2)=0$ とおけば，Q において，

$$\max\left[(u_1-u_{1N})(u_2-u_{2N})-\lambda f(u_1,\ u_2)\right]$$

より

$$\frac{u_2-u_{1N}}{u_1-u_{1N}}=-\frac{du_2}{du_1} \qquad (3\cdot5)$$

の関係が成立つ。

(3・5) の幾何学的関係は，NQ が正の勾配をもち，B の支持線 T がそれと反対の符号をもって Q をとおるとき，Q が N のもとでの最適解であることを意味する (Fig. 1 参照)。

Q が N をとおる水平線上（または垂直線上）にあるばあい，Q は N のもとでの解となる，このとき，Q における支持線の勾配を適当に解釈すれば，この点でも (3・5) が成立していると考えることができるから，(3・5) は，Q が最適解であるための必要十分条件である。

ところで，B の境界における接線の勾配 $\dfrac{du_2}{du_1}$ は連続的に変化するから，接点をとおり，$-\dfrac{du_2}{du_1}$ なる勾配をもつ直線（以下この直線を補助線と呼ぶ）も連続的に変化する[3]。したがって，いま Q を N の関数 $Q(N)$ と考えれば，任意の小さな正の数 ε に対して適当な δ が存在して，

$$\|N-N'\|<\delta \text{ のとき } \|Q(N)-Q(N')\|<\varepsilon \qquad (3\cdot6)$$

が成立するようなスレット N' を選ぶことができる。すなわち Q は N に関して連続である。

4　スレット・ゲーム

要求ゲームの解を利得関数として前提し，ネゴシエィション・モデルの第1段階のみを手番とするゲームを考える。つまり，ある Q を前提として最適スレットを決定するわけであるが，前提した Q は，3でみたように，スレットの位置に依存しているから，要求ゲームとスレット・ゲームは相互に連関してネゴシエィション・モデルを完成している。

いまプレィヤー1のスレットが $\overline{t_1}$ に固定されている，とすれば，前提1(3)より，$p_1(\overline{t_1}, t_2)$, $p_2(\overline{t_1}, t_2)$ は，t_2 の連続な一次関数である。したがって

$$\Psi(t_2)=N[p_1(\overline{t_1}, t_2), p_2(\overline{t_1}, t_2)]$$

なる一次変換 Ψ が存在する。Ψ による S_2 の写像 $\Psi(S_2)$ のうち，プレィヤー

3) 要求ゲームの解にとって意味があるのは，Nの北東の境界のうち右下りとなっている部分である。Bは凸体であるからこの部分はNにむかって凹となっている。そのため，この部分に属する各点の補助線は左より順にその傾きがつよくなるから，交わるとしても境界上においてだけである。

2にとってもっとも有利な補助線 K 上に落ちる部分を Ψ^* とすれば，Ψ^* が $\overline{t_1}$ に対するプレィヤー2の最適スレットの写像である[4]。

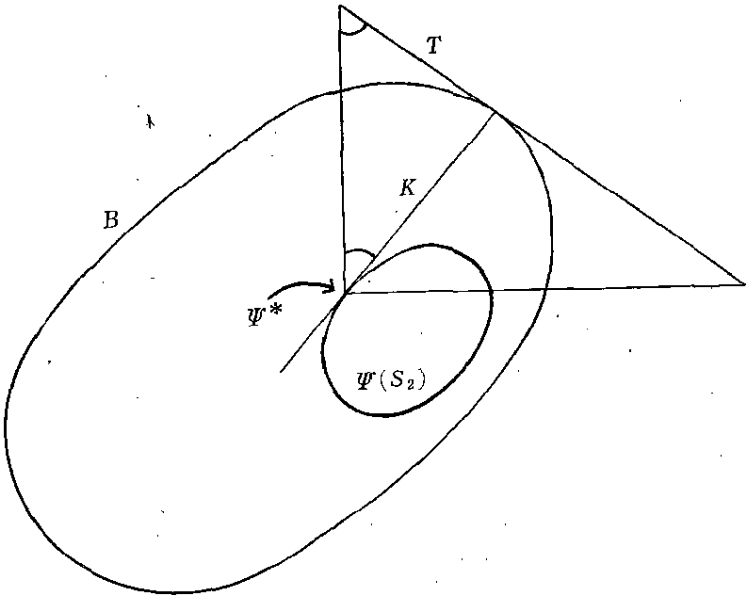


Fig. 2　最適スレットの写像

$\overline{t_1}$ に対するプレィヤー2の最適スレットが S_2^* であるとき，S_2^* に対するプレィヤー1の最適戦略が $\overline{t_1}$ である，という保証はない。スレット・ゲームに均衡解が存在するとすれば，そのとき両プレィヤーの採用するスレットはそれぞれ同時に，相手に対する最適なスレットでなければならない。このような最適のスレットの組合わせが存在することを示すが，その前に諸変数の間の数学的関係に注目しておく。

命題1　S_2 の写像 $\Psi(S_2)$ はコムパクトかつ凸である。

証明　S_2: コムパクトかつ凸 (II 1 (1))，Ψ: 連続な一次変換より自明。

命題2　Ψ^* を与えるプレィヤー2の最適スレット S_2^*（すなわち $\Psi^*=$

4) 前注参照。

$\Psi(S_2^*)$) は S_2 のコンパクトかつ凸の部分集合である。

証明　(i) Ψ^* は $\Psi(S_2)$ と K の共通部分。$\Psi(S_2)$ は閉集合（命題1），K を B の境界によって区切られた線分とみなせば K は閉集合。$\therefore\ \Psi^*=\Psi(S_2)\cap K$ は $\Psi(S_2)$ の閉集合。ところで $\Psi: S_2\rightarrow\Psi(S_2)$ においては Ψ 連続な一次変換であるから，値域 $\Psi(S_2)$ の閉集合 Ψ^* の逆像 $\Psi^{-1}(\Psi^*)=\Psi^{-1}[\Psi(S_2^*)]=S_2^*$ は定義域 S_2 の閉集合。S_2: コムパクトより，S_2^*: コムパクト　(ii) Ψ^* は直線 K 上にあるからあきらかに凸。したがって，Ψ^* 上の任意の2点 Ψ_1^*, Ψ_2^*（ただし $\Psi_1^*=\Psi(S_2^1)$, $\Psi_2^*=\Psi(S_2^2)$, S_2^1, $S_2^2\in S_2^*$）をとれば，$0\leqq\alpha\leqq1$ なる α に対して，　$\alpha\Psi_1^*+(1-\alpha)\Psi_2^*=\alpha\Psi(S_2^1)+(1-\alpha)\Psi(S_2^2)=\Psi[\alpha S_2^1+(1-\alpha)S_2^2]\in\Psi^*$。　$\therefore\ \alpha S_2^1+(1-\alpha)S_2^2\in S_2^*$

(i), (ii) より S_2^* はコムパクトかつ凸である。

命題3　　プレィヤー1のスレット t_1 に対するプレィヤー2の最適スレットを $S_2^*(t_1)$ とすれば，$S_2^*(t_1)$ は t_1 に関して上半連続である。

証明　$N[p_1(t_1, t_2), p_2(t_1, t_2)]$ は t_1, t_2 に関して連続，また，Q は N に関して連続であるから，Q は t_1, t_2 に関して連続である（3参照）。プレィヤー1が $t_1^\nu(\nu=1, 2, \ldots\ldots)$ なるスレットをとるとき，プレィヤー2のそれに対応する最適スレットの集合を $S_2^*(t_1^\nu)$ とする。t_1^ν とそれに対するプレィヤー2の最適スレット $t_2^\nu\in S_2^*(t_1^\nu)$ によって決まるゲームの利得を $Q(t_1^\nu, t_2^\nu)$ であらわせば，Q の連続性より，$\lim_{\nu\to\infty} t_1^\nu=t_1$, $\lim_{\nu\to\infty} t_2^\nu=t_2$ のとき，$\lim_{\nu\to\infty} Q(t_1^\nu, t_2^\nu)=Q(t_1, t_2)$。いま t_2 が t_1 に対するプレィヤー2の最適スレットでない ($t_2\notin S_2^*(t_1)$) とすれば，$S_2^*(t_1)$ に属する最適スレット t_2' をとるとき，$Q(t_1, t_2)$ より $Q(t_1, t_2')$ の方がプレィヤー2にとってより大きな利得を与える。したがって (t_1, t_2) に十分近似したスレットの組合わせ (t_1^N, t_2^N) をとれば，Q の連続性より，$Q(t_1^N, t_2^N)$ よりもプレィヤー2には好ましい $Q(t_1^N, t_2^{N'})$ を与えるようなスレット $t_2^{N'}$ があることになる。しかし，$t_2^N\in S_2^*(t_1^N)$ であるから，これは矛盾する。　$\therefore\ t_2\in S_2^*(t_1)$　すなわち $S_2^*(t_1)$ は t_1 に関し上半連続。

一方，t_2 を固定して $\Phi(t_1)=N[p_1(t_1, \bar{t_2}), p_2(t_1, \bar{t_1})]$ なる一次変換 Φ をもちいれば，$\Phi(S_1)$, Φ^*, $S_1^*(t_2)$ に関しても，それぞれ上記の命題が成立する。

さて任意のスレットの組合わせ (t_1, t_2) をとると，t_2 に対しプレィヤー1は $S_1^*(t_2)$, t_1 に対しプレィヤー2は $S_2^*(t_1)$ なる最適スレットの集合をもつ。いま $R(t_1, t_2)$ を，$S_1^*(t_2)$, $S_2^*(t_1)$ より取出してつくった最適スレットの組合せとすれば（すなわち $R(t_1, t_2)=S_1^*(t_2)\times S_2^*(t_1)$），

命題4　　$R(t_1, t_2)$ は (t_1, t_2) の上半連続関数で，かつ $S_1\times S_2$ における凸

部分集合である。

証明　$S_1^*(t_2)$, $S_2^*(t_1)$ は，それぞれ t_2, t_1 に関して上半連続である（命題3）から，$S_1^*(t_2)\times S_2^*(t_1)$ は (t_1, t_2) に関して上半連続。また $S_1^*(t_2)$, $S_2^*(t_1)$ はそれぞれ S_1, S_2 の凸部分集合である（命題2）から，$S_1^*(t_2)\times S_2^*(t_1)$ は $S_1\times S_2$ の凸部分集合である。

命題**4**より，角谷の定理の条件がみたされているから，$(\hat{t}_1, \hat{t}_2)\in R(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ なる $(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ が存在する。すなわち，各スレットが同時に相手に対する最適スレットとなる関係が成立する。これがスレット・ゲームの均衡解である。

III　解の経済的意味

任意のスレット (t_1^1, t_2^1) を出発点として，要求ゲームの最適解 $Q(t_1^1, t_2^1)$ が決まるが，プレィヤー**1**は t_2^1 が不変ならば $t_1^2\in S_1^*(t_2^1)$ を，プレィヤー2は t_1^1 が不変ならば $t_2^2\in S_2^*(t_1^1)$ を行使することにより，それぞれ自分の要求をより大きく達成できると期待するために，結局 $Q(t_1^2, t_2^2)$ なる要求ゲームの解が得られる。このような反応を相互にくりかえすと，$(\hat{t}_1, \hat{t}_2)\in S_1^*(\hat{t}_2)\times S_2^*(\hat{t}_1)$ なるスレットに到達するから，それ以後の反応をいくらくりかえしても，同一の $Q(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ が要求ゲームの解として与えられる。すなわち $Q(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ がネゴシエィションョン・モデルの均衡要求解であり，$(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ が均衡をもたらす最適スレットである。

このモデルはIIにあきらかなとおり抽象的であって，それゆえに使用者と被使用者間の交渉，2国間の通商問題または双方独占など，さまざまなケースに適用可能である。ここではプレィヤーをクールノーの2人の鉱泉の所有者にスペシファイして，解の経済的意味をあきらかにしよう[5)]。

いま市場の需要関数が次式で与えられているとする。

---

5) メイベリー〔11〕では，逓増する異なった費用関数をもつ複占者の数字例を設けて，クールノー，フォン・ノイマンの解とナッシュの解を比較している。ビショップ〔3〕は，一定の高い平均費用の生産者と一定の低い平均費用の生産者の複占モデルを例示し，レイファ，シャプリー，ナッシュ，ツォイテン等の解を包括的に比較検討している。

$$p=10-2(q_1+q_2)$$

p 価格
q_1 独占者1の供給量
q_2 独占者2の供給量

したがって，独占者1，2の利潤 Π_1，Π_2 は

$$\begin{aligned}\Pi_1&=q_1p=10q_1-2q_1^2-2q_1q_2\\ \Pi_2&=q_2p=10q_2-2q_2^2-2q_1q_2\end{aligned} \tag{1}$$

独占者がクールノー的行動をとるときには，

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial q_1}=0,\ \frac{\partial\Pi_2}{\partial q_2}=0 \tag{2}$$

を同時にみたす q_1，q_2 がクールノーの均衡産出量である。(1)，(2)より，均衡産出量とそのときの利潤は

$$q_1=q_2=\frac{3}{5}$$

$$\Pi_1=\Pi_2=\frac{50}{9}$$

ところで，独占者1，2が協調的に産出量を決定することを認めるならば，(1)式の q_1，q_2 は，$p\geq0$ をみたすかぎり，自由な値をとってよい。このとき，(1)により，(Π_1，Π_2) の達成可能領域が与えられる。領域の境界において次の関係式が成立する。

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Pi_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\Pi_2}{\partial q_1}\\[2ex] \dfrac{\partial\Pi_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial\Pi_2}{\partial q_2}\end{vmatrix}=0$$

したがって

$$\left\{q_1-(5-q_2)\right\}\left\{q_1-\left(\frac{5}{2}-q_2\right)\right\}=0$$

$q_1=5-q_2$ のとき $p=0$ となるから，結局

$$q_1=\frac{5}{2}-q_2 \tag{3}$$

のとき (Π_1，Π_2) は境界上にあって，Π_1，Π_2 の間に次式が成立する。

$$\Pi_2=\frac{25}{2}-\Pi_1 \tag{4}$$

いま独占者１の産出量を $\hat{q}_1$ に固定すれば，次式をみたす（Π_1, Π_2）の組合わせができる。

$$\Pi_1=10\hat{q}_1-2\hat{q}_1^2-2\hat{q}_1q_2$$
$$\Pi_2=10q_2-2q_2^2-2\hat{q}_1q_2$$

すなわち

$$\Pi_2=-\frac{1}{2\hat{q}_1^2}\Pi_1\left\{\Pi_1-2\,\hat{q}_1(5-\hat{q}_1)\right\} \tag{5}$$

独占者２の産出量を $\hat{q}_2$ に固定すれば，同様にして

$$\Pi_1=-\frac{1}{2\hat{q}_2^2}\Pi_2\left\{\Pi_2-2\,\hat{q}_2(5-\hat{q}_2)\right\} \tag{6}$$

独占者１はできるだけ大きい利潤を達成するため，(6)が自分にとってもっとも有利な補助線と接するようなスレットを選択する。独占者２も同様にして，(5)がもっとも有利な補助線と接するように，スレットを決定する。このようにして独占者１は $\hat{q}_2$ に対するある最適スレットを採用し，独占者２は $\hat{q}_1$ に対する最適スレットをきめる。いま $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ がたがいに他に対する最適スレットであるならば，$\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ に関して，次の必要十分条件が成立している。

（i）(5), (6)において同じ（$\bar{\Pi}_1$, $\bar{\Pi}_2$）の達成

（ii）（$\bar{\Pi}_1$, $\bar{\Pi}_2$）の点で，(5)および(6)の接線の勾配 $\dfrac{d\Pi_2}{d\Pi_1}$ は等しく，その値は１である。

（i）と（ii）の前半の条件より，

$$(\bar{\Pi}_1,\ \bar{\Pi}_2)=(0,\ 0) \tag{7}$$

(5)において $\left[\dfrac{d\Pi_2}{d\Pi_1}\right]_{\substack{\Pi_1=0\\ \Pi_2=0}}=\dfrac{5-\hat{q}_1}{\hat{q}_1}$，(6)において $\left[\dfrac{d\Pi_2}{d\Pi_1}\right]_{\substack{\Pi_1=0\\ \Pi_2=0}}=\dfrac{\hat{q}_2}{5-\hat{q}_2}$ であるから，

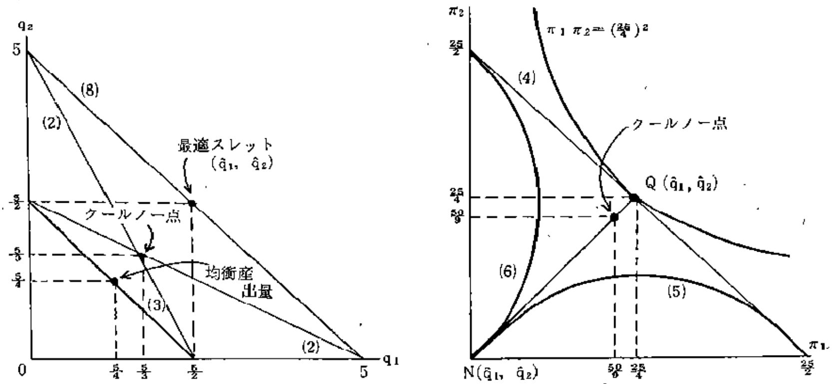
$$\hat{q}_2=5-\hat{q}_1 \tag{8}$$

ところで，利潤の達成可能領域の境界(4)において，$\dfrac{d\Pi_2}{d\Pi_1}=-1$ であるから，（$\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$）が最適スレットであるならば，すでに II 3 で論じたように，

$$\frac{5-\hat{q}_1}{\hat{q}_1}=\frac{\hat{q}_2}{5-\hat{q}_2}=1$$

$$\therefore\quad \hat{q}_1=\hat{q}_2=\frac{5}{2} \tag{9}$$

(7)は，(8)の関係をみたすスレットが相互にとられるばあい，とりわけ，$\hat{q}_1=\hat{q}_2=\dfrac{5}{2}$ なる最適スレットが行使されるときに達成される利潤を与えている（cf. II 4 における $N(\hat{t}_1,\ \hat{t}_2)$）。$\hat{q}_1$，$\hat{q}_2$ がそれぞれ $\dfrac{5}{2}$ の最適スレットを意味しているとすれば，(5)は II 4 の $S_2{}^*(t_1)$，(6)は $S_1{}^*(t_2)$ に対応している。以上の関係を図示すれば，次のとおり。



(a) 産出量　　(b) 利　潤

Fig. 3　複占モデルの均衡解

ナッシュの方法によれば複占モデルの均衡産出量は，クールノーの均衡産出量よりも制限的であることがあきらかである。供給量を協調的により制限することにより，したがって，需要関数(1)より，価格を引き上げることにより，独占者はクールノー均衡のばあいにくらべて，より大きな利潤を獲得する。

つぎにナッシュの解の安定性を検討してみよう。

いま $p=10-2(q_1+q_2)\geqq 0$ をみたす任意のスレット $\overline{q_1}$，$\overline{q_2}$ が選択されたとする。独占者1は(6)がもっとも有利な補助線に接するように，新しいスレット

を決定する。設例において，補助線の勾配はすべて1であるから，

$$\frac{d\Pi_1}{d\Pi_2}=1 \qquad \therefore \quad \Pi_2=\bar{q}_2(5-2\bar{q}_2)$$

未知のスレット $\hat{q}_1$，与えられた $\bar{q}_2$ のもとで，$\Pi_2=\bar{q}_2(5-2\bar{q}_2)$ が達成されるわけであるから，(1)より，

$$\bar{q}_2(5-2\bar{q}_2)=10\bar{q}_2-2\bar{q}_2{}^2-2\bar{q}_2\hat{q}_1$$

$$\therefore \quad \hat{q}_1=\frac{5}{2}$$

独占者2の，$\bar{q}_1$ に対する最適スレット $\hat{q}_2$ も同様の方法でもとめると，$\hat{q}_2=\frac{5}{2}$ をうる。$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ なる組合わせのスレットに対する最適スレットもまた $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ であることを確かめることができるから，$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ は複占モデルの最適スレットである。

任意のスレット $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ から出発して，

$$(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \Rightarrow N(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \rightarrow Q(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow N\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \rightarrow Q\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \cdots\cdots$$

なるシークェンスが生じるから，ナッシュの解は安定的である[6]。

VI　スレットの意義

1　公準による接近

ナッシュはまた解のもつべき性質をいくつかの公準として前提し，それらの公準をみたす解を導くという方法で問題のゲームを解いている。

S_1, S_2 をそれぞれプレィヤー1，2の混合戦略の集合，B を利得集合とすれば，プレィヤー1，2に対するゲームの解 v_1, v_2 は次の公準をみたさねばなら

6)　さきのスレット・ゲームの均衡解は安定的である。最適スレットを $(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$，スレット・ゲームの利得を $[Q_1(t_1, t_2), Q_2(t_2, t_2)]$ とすれば，B の境界は右下りであるから，

$$Q_1(t_1, \hat{t}_2) \leqq Q_1(\hat{t}_1, \hat{t}_2) \leqq Q_1(\hat{t}_1, t_2)$$
$$Q_2(\hat{t}_1, t_2) \leqq Q_2(\hat{t}_1, \hat{t}_2) \leqq Q_2(t_1, \hat{t}_2)$$

$(\hat{t}_1, \hat{t}_2)$ は鞍点となっている。

ない。

公準1 〔パレト最適性〕 一意的な解 (v_1, v_2) が存在して，解は B の他のいかなる点によっても支配されない。(u_1, u_2)$\in B$, $u_1 \geqslant v_1$, $u_2 \geqslant v_2$ ならば (u_1, u_2) が解である。

公準2 〔利得(効用)の一次変換のもとでの解の不変性〕 順序を維持する一次変換を利得(効用)にほどこしても，一次変換前の解と変換後の解は，おなじ変換により関連をつけることができる。つまり変換しても解は実質的には不変である[7]。

公準3 〔解の対称性〕 B が対称的であれば両プレィヤーの解は同一である。すなわち任意の (v_1, v_2) が B にあれば，(v_2, v_1) も B の領域にあるばあい，解は $v_1=v_2$ となって，プレィヤーの名前に左右されない。

公準4 〔不適切な代替解から独立であること〕 戦略集合 S_1, S_2 で利得集合が B' (ただし $B'\subset B$) となる新らしいゲームにおいて，B の解 (v_1, v_2) が B' にふくまれるならば，(v_1, v_2) が B' の解である。

これらの公準をみたす唯一つの解が，さきに説明したネゴシェイションの非協力ゲームの解であることが証明できる[8]ところから，ナッシュの方法は彼自身も主張しているように，広い適用範囲をもつといってよい。しかし，一見妥当とおもわれる公準にも，たちいってみればいくつかの難点が存在する[9]。ここではこれからの議論に関連する効用の個人間比較の問題を中心に，それらの難点をとりあげることにする。

いうまでもなくナッシュ自身は，効用の個人間比較は不可能とする基本的立場にたっている，と考えてよい。理論の組立てのなかで個人間の効用比較を明示的に前提としていないことは確かである。しかし，得られた解を対称性の公準との関連で検討してみると，個人間の効用比較の問題にきわめて接近した状

---

7) フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン的線形の効用関数のもとでは，利得フロンティアと効用フロンティアを同じ性質をもつものとして取扱うことができる。

8) ここにかかげた公準はナッシュ〔12〕による。〔13〕ではさらにふたつの公準がつけくわえられて，公準をみたす解がネゴシエィション・モデルの解と同一であることが証明されている。公準1—4のもとで同一性の証明についてはなおルース・レイファ〔10〕, pp. 127-128。

9) ルース・レイファ〔10〕, pp. 128-137；ビショップ〔3〕, pp. 785-582 はこの点にたちいった検討を行なっている。この点の理解をすすめるためにはさらに，ナッシュの公準をみたすゲームを考案してその結果と公準の間の関係を検討するという諸実験が参照されなければならない。鈴木編〔15〕第9章は著者たちの実験の結果を与えている。なお同書，第7，8章では交渉ゲームの理論のサーヴェイがなされている。あわせて参照されたい。

況が生じていることがあきらかとなる。

Ⅲの数字例において解の可能な領域はあきらかに対称的であり，ナッシュ解は，最適スレット $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ によってきまる利得の基準点 (0, 0) から，両複占者に対しそれぞれ等しい利得の増加を与える点 $\left(\frac{25}{4}, \frac{25}{4}\right)$ でもとまっている。解は公準Ⅲをみたしているから，公準の内容に託されたある種の望ましさ，あるいは公正をもっているとみなさなければならない。ところで，いま，複占者の1人が利得（貨幣）に対し，急速に低下する限界効用をもち，他の1人はゆるやかに低下する限界効用をもっている，とすれば，利得において等額の増分は社会的公正をみたさないだろう[10]。複占者の利得の増分に関する評価の違いは，まれにしかない特殊のケースではなく，複占者のこれまでの蓄積状況，将来追求する企業政策との関係からみた資金の必要度の違いから生まれてくるごく一般的なことがらと考えてよい。また一般の交渉において，両当事者の利得に対する評価は異なるとするのが自然である。このような状況に対し，個人間の効用比較をまったく排除すれば，ナッシュの解は社会的公正から背離した，ある種の望ましさをみたすにすぎなくなる。社会的公正と一致するのは，たまたま両当事者が利得に対し同一の限界効用をもつばあいだけである。一方，個人間の効用比較を明示的に前提するとすれば，両当事者が受けとる利得の増分の積を極大にするという解決が，社会的厚生とどういう関係にあるかが明確にされねばならない[11]。ともあれ，ナッシュ解の対称性にみられるこのディレンマは，のちにスレットとの関連においてあきらかとなるように，解のもつべきポジティヴなあるいは規範的な性格に大きな影響を与えている。

2　スレットの評価

ナッシュ解の意義が，従来の理論より一歩進んで協調利得のフロンティア上

10) ビショップ〔3〕, pp. 576–577。

11) 利得の積を極大にするという解決は，ハーサンイ〔8〕により，ツォイテンの解とおなじであることがあきらかである。こうしてナッシュ解は，それぞれの利得の期待値を極大化しようとする当事者たちのビヘィヴィアによって裏打ちされたのであるが，社会的厚生との関連では，事情はまったくおなじである。

の一つの点，すなわち契約曲線上のある領域内の一つの点を均衡点として指定したところにあることは，論をまたない。この一つの点を確定するにあたって，スレットの行使が重要な要因となっていることは先に見たとおりである。要約すれば，ある任意のスレットにより与えられる固定した基準点のもとで要求ゲームの解がもとまるが，プレィヤーは相手のスレットに対し，次の要求ゲームでより有利な要求を獲得するようなスレットを相互に対置させて，新らしい解に到達する。交渉の均衡解は，このような手番のくりかえしが最終的に到達する点である。スレットの行使は，一つの要求ゲームを次の要求ゲームに進めて均衡解を指定する競争的手段となっているから，要求ゲームそのものの解にみられる前節で指摘した難点を無視すれば，交渉解の性格は究極的にはスレットの行使が事実に即したものであるか，どうかという事情にかかわっている。逆にいえば，いまある裁定者が交渉の両当事者の間にはいって，ナッシュの公準をみたす裁定案を提示するというケースを考えてみると，当事者のうちすくなくともだれかひとりがその提案に反対するということは，要求ゲームそのものの解に問題がないとしても，スレットの行使を現実的にすぐれた政策だとみなしていないことを意味する。裁定案の本来的意義ならびに実効性は，交渉の決着を裁定に委ねず，当事者間の非協力的な競争を放置するばあいに，その結果として出てくる方向を読みとって，コストのかかる角逐を排除するところにあるのだから，もし裁定案が両当事者の利得および効用関数，戦略の集合に関する現実的判断，とりわけ後者のうちスレットに関する判断を誤まっているとすれば，提案は棄却されるだろう。したがってスレットの現実性に検討を加えておくことは，さしあたっての目的であるナッシュ解の理解だけでなく，モデルを当事者たちの現実的ビヘィヴィアを叙述できるように改良していくために必要なことである。

相手に損害を与えて交渉における自分の条件を有利にしようとする戦略がスレットであった。注意しておくべきことは，この戦略は相手に損害を与えるだけでなく，自分もそれを採用することによって，一定の損害をこおむる可能性

をふくむことである。この概念の特色を強調する目的からいえば，むしろ，相手ともども損害をこおむるような戦略をスレットと呼ぶ方が正確であろう。たとえば，先の複占の数字例において，複占者1，2が産出量それぞれ1，2としてゲームをはじめるとすれば，基準点は（4，8）となり，さしあたったの均衡解は $\left(\frac{17}{4},\ \frac{33}{4}\right)$ という利潤の配分になる。この配分を不服とみる複占者1は $\frac{5}{2}$ というスレットを行使して，結局最適スレットの組合わせ $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ によってきまる利潤（0，0）を最終的な交渉の基準点とすることに成功する。スレットを戦略としてもちいたために，相手に $\frac{33}{4}$ の損失を与えただけでなく，自分もまた $\frac{17}{4}$ の損失を招いている。スレットはまた，この例からあきらかなように，単なるおどしやブラフィングではなくて，実際に行使されるものでなければならない。複占者は相互に相手に対する完全な知識を所有しているために，真のスレットと単なるおどしとの区別が可能であるからである。

スレットが有効であるためには次の条件をみたしていなければならない。

利得集合において，あるスレット T の与える基準点 $U(T)$ から利得の積の極大点 $(\overline{U}_1,\ \overline{U}_2)$ までの両座標軸にそったそれぞれの距離をプレィヤー1および2の衝突のコストと定義する[12]。T が最適でなく，プレィヤー1が新しいスレットをもちいることにより，プレィヤー2の衝突のコストを $b\overline{U}_2$，自分のコストを $a\overline{U}_1$ だけさらに増加させ，しかも $b>a$ とすることができるならば，そのスレットは有効である。すなわち新らしいスレットの組合わせ T' にともなうあらたな基準点 $U(T')$ のもとでの要求ゲームの解 $(\overline{U}_1',\overline{U}_2')$ は，$\overline{U}_1'>\overline{U}_1$ となってプレィヤー1により有利である。

$b>a$ の条件は次の三つのケースにわけて考えることができる。

(1) $b>a\geqq 0$

(2) $b\geqq 0>a$

(3) $0>b>a$

(3)は新基準点 $U(T')$ が，$U(T)$ と $\overline{U}$ を結ぶ線，U_1 軸，ならびにフロンテ

12) ハーサンイ〔8〕, pp. 152-153. 図はそこでのハーサンイの説明を具体化したものである。

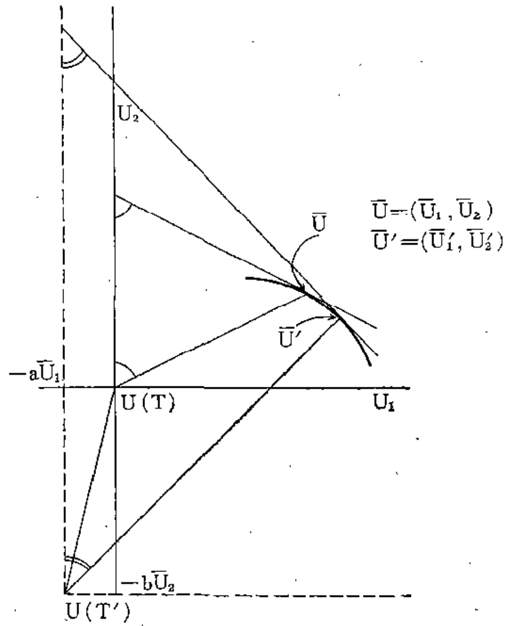


Fig. 4 スレットの有効性

ィアによって囲まれる領域にくるケースである。(2)のケースでは，$U(T')$ は $U_1 \geqslant 0$, $U_2 \leqslant 0$ の領域にくる。(2), (3)のケースとも，新らしいスレット戦略はそれ自体として（交渉をまたなくても），プレィヤー1により大きな利得を与えるから，通常の意味で，よりすぐれた戦略である。

スレットという概念の独自性は(1)のケースをふくむところにある。伝統的な競争の概念のなかで，そのケースにもっとも近いものとしてカットスロート・コムペティションを考えることができるだろう。この価格戦争は主としてふたつの異なった動機にもとづいている。ひとつは，価格引下げにより相手の市場を奪って直接的に利潤の拡張をはかろうとするため，価格引下げ競争に発展するばあいである。もうひとつは相手を完全に市場から駆逐するため，当面の利

潤を無視して価格引下げ競争を行なうばあいである。前者は通常の意味での価格競争が発展したものであるから，しいて対応づければ(3)のケースに近いのは後者のばあいであろう。

ところで現実には(3)のケースにあたるスレットの行使が有利でないようないくつかの事情が存在する。

まず第一に交渉に要する時間の問題である。ビショップ〔3〕の複占の数字例では，最適スレットは直接の利潤として，低費用複占者には正，高費用複占者には負の利潤を与えている。交渉の妥結に長い時間を要するとすれば，高費用複占者の利潤（貨幣）の効用関数はフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン的な線型関数ではなく，限界効用の逓減を示すような形に変わるだろう[13]。したがって，交渉時間というコストのために，低費用複占者のスレットに対し，高費用生産者は自分に直接負の利潤を与えるスレット（それがナッシュ的な最適性をみたしていても）の行使をひかえることになるかもしれない。

つぎに考慮されるべき事情として当事者の経済的力の差異がある。経済的力という用語には明確な定義を必要とするが，ここでは便宜上，損失に耐えうる力としておく。たとえば労働争議において，組合は譲歩を拒んでストに突入するというスレットをもちいれば，自分たちのこおむる損害よりもより大きな損害を経営者に与えることがはっきりと予想されるケースを考えよう。スレットとしての有効条件はみたされているから，スト突入は次回の交渉を組合側に有利にみちびくはずである。しかし，組合の闘争資金がスト突入にともなう賃金カットその他の不利益処分ならびに闘争費のコストにみたないとすれば，スト突入は断念せざるをえないだろう。このばあいも，先のばあいと同様に，組合側の貨幣に対する限界効用は逓減する。

同じ事情を低費用複占者ならびに経営者の立場から検討してみよう。低費用生産者は自分に $b\overline{U}_2$ というあらたなコストを強いるスレットがもちいられて

13) いうまでもなく線型の効用関数のもとでは，利潤の正負にかかわらず，限界効用一定であるから，スレットに対するこのような評価は生じない。

も，交渉上不利な立場にたたなくてもよい。経営者についてもおなじことがいえる。したがって，スレットが真に有効であるためには，$b\overline{U}_2$ という損失のプレィヤー2に与える真の苦痛度が，$a\overline{U}_2$ という損失のプレィヤー1にあたえる真の苦痛度よりも大きくなければならない。しかしこのことは，対称性の公準を検討したさいのべたように，効用の個人間比較という問題をふくんでいる。ケース(2)および(3)ではこの問題をさけることが可能であるが，真のスレットを行使するケースではそうはいかないことがあきらかである。

さてスレットの現実性に対する以上の見解が正しいものとするならば，交渉問題の解はナッシュのそれと異なったものとなる可能性は十分に存在する。ナッシュの要求ゲームの解法を前提するとしても，シャプリー解のように両プレィヤーの最低保証水準を基準点にとることも可能であれば，ビショップ解のように，交渉が決裂すればクールノー的競争が行なわれて，クールノー点が基準点となるケースも考えられる[14)]。また，ここでとりあげたモデルのわくをこえることになるが，複占者はスレットの行使をさけて，現在得ている利潤を市場の開発に投資して自分の立場をより有利にしようとはかるかもしれない。

3 結びにかえて

ナッシュ解の核心となっているスレットにいくつかの検討を加えた。この検討は次のふたつの方向にそって拡充されなければならない。

ひとつは，交渉過程に要する時間を導入することによってナッシュ解の動学的拡張をはかっているビショップ〔4〕，クロス〔7〕等の文脈のなかで，スレットの動学的解釈を試みることである。

もうひとつはゲームを n 人協力ゲームに拡げたばあいのスレットの考察である。プレィヤーの増加によりもたされる，1プレィヤーの比重の相対的低下と結托の多様性がスレットの有効性をどのように規定するかという問題がそこでの関心の対象である。

14) シャプリー解は最低保証水準を基準点とするため，生産性の格差にもとずくスレットの影響を反映しないと指摘されるが，スレットに対するさきの評価を受けいれるならば，その指摘の適切さは割引いてしかるべきである。

参 考 文 献

〔1〕 青山秀夫「独占の経済理論」昭和12年。

〔2〕 Baumol, W. J., *Business Behaviour, Value and Growth*, 1959.

〔3〕 Bishop, R. L., "Game-Theoretic Analysis of Bargaining", *Quart. Jour. Econ.*, Vol. 77, 1963, pp. 559–602.

〔4〕 ________, "Zeuthen-Hicks Theory of Bargaining", *Econometrica*, Vol. 32, 1964, pp. 410–417.

〔5〕 Chamberlin, E. H., *The Theory of Monopolistic Competition*, 8th ed., 1962, 青山秀夫訳「独占的競争の理論」昭和41年。

〔6〕 Cournot, A., *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, 1838.

〔7〕 Cross, J. G., "A Theory of the Bargaining Process", *Am. Econ. Rev.*, Vol. 55, 1965, pp. 67–94.

〔8〕 Harsanyi, J. C., "Approaches to the Bargaining Problem Before and After the Theory of Games", *Econometrica*, Vol. 24, 1956, pp. 147–57.

〔9〕 Hicks, J. R., *The Theory of Wages*, 1932, 内田忠寿訳「賃金の理論」昭和27年。

〔10〕 Luce, R. D. and Raiffa, H., *Games and Decisions*, 1957.

〔11〕 Mayberry, J. P., Nash, J. F. and Shubik, M., "A Comparison of Treatment of a Duopoly Situation", *Econometrica*, Vol. 21, 1953, pp. 141–154.

〔12〕 Nash, J. F., "The Bargaining Problem", *Econometrica*, Vol. 18, 1950, pp. 155–162.

〔13〕 ________, "Two-Person Cooperative Games", *Econometrica*, Vol. 21, 1953, pp. 128–140.

〔14〕 鈴木光男「ゲームの理論」1959。

〔15〕 鈴木光男(編)「競争社会のゲームの理論」1970年。

〔16〕 von Neumann, J. and Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behaviour*, 2nd ed., 1947.