經濟論叢

第107巻　第2・3号

昭和46年2・3月

京都大學經濟學會

投資決定理論の数理的接近

――不確実性の問題――

薄 井 義 信

I 序 文

従来の投資決定理論は新しい分析方法を導入して，急速な進展を見るにいたっている。これは隣接諸科学で積極的に活用されている計数的プログラムやシュミレーションが投資決定問題の接近法として重要視されていることでも明らかである。確かに，1951年ディーンが「資本予算理論」を公刊して以来[1]，科学的方法として利益率法と現価法が投資決定論の発展を促進した。1955年ローリ・サベージが利益率法の方法的欠陥を指摘して以来[2]，方法論的優位性の問題が活況を呈するにいたったのは周知の事柄である[3]。同時に，企業の急速な成長に伴ない，投資プロジェクトの組合せの問題研究が盛んになる。これがローリ・サベージによって資金制約下の配分問題として取上げられる。1963年ワインガートナーはこの問題を一層効果的に解く線形計画法の分析手法を体系化する[4]。かくて，企業の流動性を考慮しながら，同時に，有機的に関連する収益性の問題が究明される。新しい分析手法は，伝統理論の領域を拡大し，そこで取扱われなかったか，又は，無視されていた問題に解決をもたらす。

1) J. Dean, *Capital Budgeting*, 1951.
2) J. H. Lorie and L. J. Savage, "Three Problems in Rationing Capital", *Journal of Business*, Oct. 1955.
3) この領域の論争を扱ったアメリカの文献，それを引用した邦文献は，数多く，邦文献の紹介が説明されているものと，割合い纒ってる文献を記して置く。後藤幸男，「新訂企業の投資決定理論」p. 139; R. E. Ball and Z. L. Melnyk, *Theory of Management Finance; Selected Readings*, Chapt. 1, 1967.
4) H. M. Weingartner, *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, 1963.

しかしながら，この段階では，未だ一義的な確定の状況が仮定されている。我々の世界は，実際，変動と不確定の世界である。投資決定理論のような，とかく長期的かつ非反復的な場合が多く，しかも，それが企業にとり重要な意味をもつので，不確定な状況を考慮しながら問題の分析が必要となる。この状況の処理技術として，確率の概念が利用され，その方法如何で，状況が危険又は不確実性と称される[5]。ここでは，この区別の問題に触れず，不確実性の状況が仮定される。

実際，不確定は何処にでもある。これを全く取除くことは不可能であり，この要因[6]を出来るだけ予測して，これを避け，かつ又，減少させる分析手法が主要な課題である。この課題に答えるため，各種の分析手法[7]が投資決定理論の形式的・理論的枠組に融合された。これらの分析手法は現価法や利益率法などの基礎的方法論に加えて，効用，確率，統計等の分析技術をも含む基本構造から成り立っている。投資決定問題がこれらの分析によって拡張され，詳細に検討されて，どの程度不確実性を処理し得るのか，又は，どんな現実の状況を新しい方向から捉え得るのか，それが課題になる限り，新しい分析手法が不確実性下の投資理論にどう位置づけられるかを，我々は検討しなければならない。そのために，数多くの分析手法を網羅する展開をしないで，代表的な方法に焦点を置き，その問題が取扱われる。

II　問題の性質

投資決定問題では，従来，資金調達が全く可能な状況の下で，投資機会から

5) M. H. Spencer and L. Siegelman, *Managerial Economics*, Chapt. 1, 1964.

6) D. E. Peterson, *A Quantitative Framework for Financial Management*, 1969, pp. 404–407.

7) 一般に，資本コスト法 (cost of capital method) と確実性等価法 (certainty equivalent method) とが基本的な方法として利用されているが，当該の問題に対処する方法としては，確率的計画法 (stochastic linear programming)，不確定性下の数学的計画法 (mathematical programming under uncertainty，機会制限計画法 (chance-constraint programming) が主たるものである。D. E. Peterson, *ibid.*, pp. 58–63；B. Näslund, "A Model of Capital Budgeting under Risk", *Journal of Business* April 1966, p. 259.

生ずる成果が，将来の不確実性を反映して，確率の概念で取扱われ，更にタイミングの問題を組み込ませて，優れた個別的投資機会の選択がなされてきた[8]。この単一機会選択のフレーム・ワークは，もし企業の投資機会が計画期間に営業活動を行う唯一の資産であるなら，又は，他に資産が存在しても，この投資機会に比べて全く無視出来る程度のものなら，理論的に妥当なものであろう。しかし，現代の企業行動が複雑化又は拡大化しているのを見れば，年間を通じて数多くの投資機会が長期計画，営業部，製品開発部等の多くの部門で設定され，既存や新規の組合せから成立っているのが明らかであろう。その組合せは，一方で，経営の効率化に働くが，他方で，製品の多角化，流通経路の分散化などの投資機会の分散によって，危険の回避，不確実性の削減手段ともなる[9]。投資機会は利益を挙げるものが全て選定されるのでなく，使用可能な資金の枠内で決められるのが現状である。この意味で，一定の資金制約の下で，どんな投資機会の組合せが可能かが問題となる点である。更に，投資機会の性格が反映され，独立的だけでなく，競合ないし補定的な関係を含めて，投資機会が綜合的に測定評価される。

また，投資という財務の決定行動を合理的にするため，企業の目標が明確にされなければならない。企業の行動が複雑化している現状で，企業の目標の多元化が認識出来る。ここに，財務決定のための企業の目標という問題が存在する。周知のごとく，目標の設定は予測のため，より信憑性がある data の収集を可能にし，より合理的な意思決定に導き，その上，決定の効果を測定する尺度となる。財務決定の企業目標は，通常，普通株の市価の最大化[10]とか，企業の効用最大化[11]又は正味現価の最大化[12]などが想定される。この根拠は，株主

8) F. S. Hillier, "The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments", *Management Science*, April 1963; J. C. T. Mao, *Quantitative Analysis of Financial Decisions*, 1969, pp. 271–280.

9) H. Bierman and S. Smidt, *The Capital Budgeting Decision*, 2nd ed., 1966, pp. 207–208.

10) J. Porterfield, *Investment Decisions and Capital Costs*, 1965.

11) R. M. Adelson, "Criteria for Capital Investment: An Approach through Decision Theory", *Operational Research Quarterly*, March 1965.

12) E. Solomon, *The Theory of Financial Management*, 1963, pp. 15–25.

と企業とがどんな関係にあるのか，又は，企業は誰のための行動をなすかにある。我々は，この目的論の論争に深入りをしないで，正味現価の最大化に類似する，Weingartner の正味終価の最大化を用いることにする。この考え方に立脚するのは，有限の期間（time horizon）を見積る困難はあるが，複数の割引率や新しい資本コストを技術的により良く処理出来るし[13]，計画予定後の潜在的キャッシュフローをも配慮出来るからである。

要するに，収益性の最大化という一元的目標の下で，不確実性の処理，問題の状況の解決に関して，我々は，Weingartner 流の basic horizon model[14]を基盤として，それを修正しながら，新しい方法論を展開する。

III 基本モデル

まず，この方法論に接近する手始めに，Weingartner model の基本構造を準用して，次の前提条件から出発する。

1) 個々の投資プロジェクトは他の投資プロジェクトから影響を受けない独立的な性質を仮定する。

2) 個々の投資プロジェクトのキャッシュフローは不確定な変数，つまり確率変数として把える。よって，その確率分布から期待値が計算される。この変動の環境を前提とするのが，Weingartner model とは違う，修正される主要な要件である。

3) 各期の予定される制約資金は，やはり，同じく，確率の変数で把握される。

4) 借入れ，貸出しの短期的な金融取引の状況が導入される。もし投資プロジェクトが内部資金で賄えるなら，借入れ取引は零とすれば良い。借入れする場合，市場で無限に調達が可能であるはずがなく，ある特定の制約を加える意味で，不完全市場下の状況が仮定される。ここでの短期の金融取引は一年ごと

13) J. Porterfield, *op. cit.*, p. 41.
14) H. M. Weingartner, *op. cit.*, Chapt. 8；柴川林也，「投資決定論」第11章，昭和44年，ここでの記号は基本的に Weingartner に従う。

の更新で，利息は年度末の支払いがなされる。

以上の下で，基本モデルは，

記号を次のように規定すると，

$\hat{a}_j$：計画終了時点（time horizon）の後に生ずる全てのキャッシュフローを r の市場利子率など，導出される利子率で割引いた正味終価の期待値。

x_j：採用される j 番目のプロジェクトの単位数。

T：計画終了時点（horizon year）

$\bar{a}_{tj}$：t 期に j 番目のプロジェクトの採用から生ずるキャッシュフロー(a_{tj})の期待値〔$\mathrm{Exp}(a_{tj})$〕。

$\bar{D}_t$：t 期に企業の活動から予定される資金額（D_t）の期待値〔$\mathrm{Exp}(D_t)$〕。

V_t：t 期に貸出すか，又は，次期に繰越される資金量。

W_t：t 期に借入れる資金量。

r：金融取引の短期利子率，ただし，借入れも貸出しも同じ率。

B_t：t 期に借入れの可能な総資金量。

次のように，定式化される。

$$\mathrm{Max}\ \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + V_T - W_T \qquad (\mathrm{III} \cdot 1)$$

制約条件：

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{1j} x_j + V_1 - W_1 \leq \bar{D}_1 \qquad (\mathrm{III} \cdot 2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{tj} x_j + V_t - (1+r) V_{t-1} - W_t + (1+r) W_{t-1} \leq \bar{D}_t$$

$$(t=2\ \dots,\ T) \qquad (\mathrm{III} \cdot 3)$$

$$W_t \leq B_t \qquad (\mathrm{III} \cdot 4)$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \qquad (j=1\ \dots,\ n) \qquad (\mathrm{III} \cdot 5)$$

15）ただし，inflow はマイナスの符号で，outflow はプラスの符号である。これを説明すれば，$\bar{a}_{tj}$ の inflow を $\overline{a_{tj}}^{+}$, outflow の $\overline{a_{tj}}^{-}$ と仮定すれば，第１期は $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{1j}^{-} + V_1 \leq \bar{D}_1 + \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{1j}^{+} + W_1$ これを整理すれば，$\sum_{j=1}^{n} (\overline{a_{1j}}^{-} - \overline{a}_{1j}^{+}) + V_1 - W_1 \leq \bar{D}_1$ が成立する。ここで $\overline{a_{1j}} = -(\overline{a_{1j}}^{+} - \overline{a}_{1j}^{-})$ と置けば，$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{1j} + V_1 - W_1 \leq \bar{D}_1$ となり，制約条件式（III・2）が説明される。どの投資プロジェクトも，第１期は $a_{1j}^{+}=0$ となるから，$a_{1j} = a_{1j}^{-}$ となり，これから，cashflow の outflow は正とすることが明らかになるだろう。

$$V_t, W_t \geq 0 \qquad \text{(IIII・6)}$$

さて，このモデルはこれらの制約条件式の下で，(III・1) 式の目的関数，つまり，終価を最大にする投資プロジェクトが探索される。これが，通常，投資決定モデルの原問題 (primal problem) である。ただし，パラメーターが確率変数の期待値と推定される特徴が示されるだけで，通常のL・Pのシンプレックス法を適応して解くことが出来る[16]。投資機会は，原則として，棄却するか，承認するかの二者択一の決定問題である場合を考慮するなら，$x_j=(0, 1)$，($j=1\ldots, n$) の整数条件を附して，より的確な解が導き出される[17]。ただし，V_t，W_t が整数の資金量である必要は決らずしもないので，この追加条件を伴なうモデルは混合整数計画モデルと言えよう。投資決定モデルの原問題に対して，より簡単に解くため双対問題 (dual problem) が定式化され，その双対変数の最適解が極めて有効な情報を提供する。例えば，Weingartner に依れば，1ドル追加による正味現金の増分を示す評価係数，つまり，機会原価としての利子率が内生的に導き出される。かくて，資金制約条件での双対価格としての資本コストが一つの情報として得られる。

ここでの基本モデルでは，各々の投資プロジェクトのキャッシュフローや予想される制約資金が単純な確定値として取扱われた。しかし，それぞれのパラメーターが確率変数であるがため，時には，プロジェクトのキャッシュアウトフローが非常に大きいとか，反対に，キャッシュインフローが極めて小さいとかの極端な変動が，現金収支の維持を損ねて，資金不足という危険を生ずる可能性がある。したがって資金の制約が保証されなくなる。そのため，資金が緊急の必要にせまられたり，債務支払い超過の必要にせまられても，どの程度ま

16) パラメーター (a_{tj}, D_t) が確率変数であるので，計算される期待値解は必ずしも絶対的実行可能解に収束するとは言い難い，従って，その実行可能性を検討する方法の説明は，下記の文献を参照されたい。古瀬大六，「生産の経済学」昭和39年，311–213ページ。

17) E. M. L. Beale, "Survey of Integer Programming", *Operational Research Quarterly*, Vol. 16, 1965; Balinski, "Integer Programming: Methods, Uses, Computation", *Management Science*, Vol. 12, 1965.

18) H. M. Weingartner, *op. cit.*, pp. 143–152; 浅沼万里，整数計画問題における双対価格，「経済論叢」昭和41年5月。

でこの資金制約の違反を認めるかの問題が解かれねばならない。この問題に答える方法として，パラメーターが不確定の条件で，線型問題の接近法の一つである機会制限計画法[19] (chance-constrained programming) を取り上げ，この分析手法を，我々は次に説明してみる。

IV 機会制限計画モデル

このモデルの基本的特徴は，各期の現金残高が負にならないように，資金制約が満たされる確率 (dt) 以上を維持しながら，T 期の終価の期待値が最大になる投資プロジェクトの選択をなすことになる。

したがって，基本モデルの制約式 (III・2), (III・3) のパラメーター，又は，それ自体が次のように修正される。

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + V_1 - W_1 \leq D_1\right\} \geq d_i \qquad \text{(IV・1)}$$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{i=1}^{t-1} rV_i + \sum_{i=1}^{t-1} rW_i + V_t - W_t \leq \sum_{i=1}^{t} D_i\right\}$$
$$\geq d_t \qquad (t=2 \ldots,\ T) \qquad \text{(IV・2)}$$

ただし，確率 (d_t) をどう規定するかは財務政策の問題であり，意思決定者の信頼水準が反映される。

かくて，変形制約式に依れば，各期の投資プロジェクトに利用される資金は，前期の投資プロジェクトから取得される資金に，前期の貸出しの利息を加え，前期の借入れ利息を差し引き，前期の借入れと貸出しの資金を加減して，最後に企業の営業活動から生ずる利益を加算したものと等しくなる。しかも，各期の現金残高は，万が一，現金不足を示す ($1-d_t$) の条件確率を除いて，予定される資金量を下まわっては望ましくない状態である。この確率 (d_t) が100パーセントの状態は，この資金制約条件が最も満足されることである。

19) A. Charnes and W. W. Cooper, "Chance-Constrained Programming", *Management Science*, Oct. 1959. 財務的投資のみを対象とした論稿には，B. Näslund and A. Whinston, "A Model of Multi-Period Investment under Uncertainty", *Management Science*, Jan. 1962.

かくして，こうした制約式の影響ないし解釈は，このモデルを解く一段階として，確定的等価 (deterministic equivalent) の近似式を齎らす。したがって，パラメーター a_{ij}, D_i の確率分布が正規分布なら，変形制約式も又正規分布を有するが，もし，任意の分布ならば，中心極限定理[20] (central limit theorem) を用いて，その制約式を正規分布に近似化する。実際，後者の状況が多く，その下で，変形制約式は次の確定的等価条件式 (IV・4), (IV・5) に置き換えられる。

要するに，機会制限計画モデルは通常の非線型計画問題に変形される[21]。

$$\mathrm{Max}\ \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j x_j + V_T - W_T \qquad \text{(IV・3)}$$

制約条件：

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{1j} x_j + V_1 - W_1 + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{1j}^2 x_j^2 + Var(D_1)} \cdot F^{-1}(d_1) \leq \overline{D}_1 \qquad \text{(IV・4)}$$

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij} x_j - \sum_{i=1}^{t-1} r V_i + \sum_{i=1}^{t-1} r W_i + V_t - W_t + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{tj}^2 x_j^2 + Var(D_t)} \cdot F^{-1}(d_t) \leq \sum_{i=1}^{t} \overline{D_i} \qquad \text{(IV・5)}$$[22]

20) A. Charnes and W. W. Cooper, "Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisfying under Chance Constraints", *Operations Research*, Vol. 11, 1963. pp. 30–31.

21) 線型計画法や整数線型計画法のアルゴリズムが用いられるように，条件式を線型化する接近法には，つまり，平方根の二次性を，上限 (tighter) 又は下限 (looser) の線型近似に書き直して，正解もしくは近似解を導き出す分析方法には，F. S. Hillier の機会制限計画法の所論がある。例えば，x_j が 0-1型で，しかも，独立的な性格なら，

$$\sqrt{Var\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - D_t\right\}} \leq \sigma_t - \sum_{j=1}^{n}\left[\sigma_t - \sqrt{\sigma_t^2 \sigma_{tj}^2}\right](1 - x_j)$$

が成立する。ただし，$\sigma_t^2 = \sum_{j=1}^{n} Var(a_{tj}) + Var(b_t)$ で，$\sigma_{tj}^2 = Var(a_{tj})$, $(t=1, \dots T)$, $(j=1 \dots, n)$ とする。この問題の 0-1 型の場合を，更に，相互関係の問題も含めて，仮定するなら，F. S. Hillier, *The Evaluation of Risky Interrelated Investments*, 1969, pp. 77–82. 更にこの仮定を緩和し，より詳細な計算の説明については，F. S. Hillier, "Chance-Constrained Programming with 1–0 or Bounded Continuous Decision Variables", *Management Science*, Sept. 1967. を参照されたい。

22) $Var\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - D_t\right\} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{tj}^2 x_j^2 + Var(D_t)$
ただし，$Var\ a_{tj} = \sigma_{tj}^2 \quad (t=1 \dots T, j=1 \dots n)$

$$W_t \leq B_t \qquad (\mathrm{IV} \cdot 6)$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad (\mathrm{IV} \cdot 7)$$

$$V_t,\ W_t \geq 0 \qquad (\mathrm{IV} \cdot 8)$$

ただし，各投資プロジェクトの間に独立性が仮定されているので，パラメーターの確率変数も又全く独立している。

さて，制約式 (IV・4), (IV・5) は，左辺の平方根の部分までが，正味キャッシュフローの平均値を表わす。平方根自体は，財務の流動性を保ち，危険を回避するために，投資活動に用いないで保有される資金量である。これが安全弁の役割を果たす財務的な余裕資金である。

かくて，安全性の限界を確率の概念で表現し，含まれる危険の程度が，具体的に，資金スラックス (financial slack) で得られる。

次に，この非線型計画問題は，投資プロジェクト採用の基準を導くため，クーン＝タッカーの条件[23]を用いることが出来る。このクーン＝タッカー条件を適応することにより極めて興味ある情報が得られる。

まず，この情報から簡単に説明するとしよう。制約条件式(IV・4), (IV・5) に関連する双対変数を μ_t， 制約条件式 (IV・6) に関連する双対変数を β_t とすれば，T, $T-1$, $T-2$ 期ごとに，V, W の変数にクーン＝タッカー条件を適応して，次の条件が得られる。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & 1-\mu_T \leq 0 \\ \text{(b)} & -1+\mu_T-\beta_T \leq 0 \\ \text{(c)} & -\mu_{T-1}+r\mu_T \leq 0 \\ \text{(d)} & \mu_{T-1}-r\mu_T-\beta_{T-1} \leq 0 \end{array}\right. \qquad (\mathrm{IV} \cdot 9)$$

---

23) 古くからのラグランジュの未定乗数法から発展したもので，$g_j(x_i)<b_j$, ($j=1 \ldots m$), $x_i>0$, ($i=1 \ldots n$), の下で，目的関数 $f(x_i)$ が x_i^0 で最大になるための必要十分条件は，次の条件式を全て満足するm個の非負の μ_j が存在することである。

$$x_i^0>0 \text{ なら } \frac{\partial f}{\partial x_i^0}-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i^0}=0 \qquad (i=1 \ldots n)$$

$$x_i^0=0 \text{ なら } \frac{\partial f}{\partial x_i^0}-\sum_{j=1}^{m}\mu_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i^0}\leq 0 \qquad (i=1 \ldots n)$$

が成立する。

(e)　$-\mu_{T-2}+r\mu_{T-1}+r\mu_T \leq 0$

(f)　$\mu_{T-2}-r\mu_{T-1}-r\mu_T-\beta_{T-2} \leq 0$

これから次のことが説明される[24]。第一に，$W_T<B_T$ の条件なら，$\beta_T=0$ となり，当然(a)式と(b)式を変形して，$1 \leq \mu_T \leq 1$ から $\mu_T=1$ が得られる。これはT期における追加資金1ドルが関数の値を1ドル増加させることを示している。同じく，(c)式と(d)式から，$r \leq \frac{\mu_{T-1}}{\mu_T} \leq r$ を得て，$\frac{\mu_{T-1}}{\mu_T}=r$ となる。これは双対変数の比率が追加1ドル当りの利子率 r であることを示す。同様に，(e)式と(f)式から，$\mu_{T-2}=r\mu_{T-1}+\mu_T$ を得て，この式に $\mu_{T-1}=r\mu_T$ を代入して，$\frac{\mu_{T-2}}{\mu_T}=r^2+r=r(r+1)$ を得る。これは，$T-2$ 期の1ドルの値が T 期までの各期の双対変数の合計であり，又は，双対変数自体は複利子率であることを示している。

第二に，$W_T=B_T$ の条件から，借入れの限度額まで借りるのは $\beta_t \geqq 0$ であり，(a)式からみて，当然 $\mu_T>1$ となる。これは T 期の最終の時点で追加資金1ドルがそれ以上の機会原価を有することであり，それ以前に有利な投資機会を排除することを反映し，割引率は高く，予定期以後に高いキャッシュフローを持つので $\hat{a}_i$ が高くなることを示している。$T-1$ 期に，同じく，限度額まで借りるなら $\beta_{T-1} \geq 0$ で，(d)式は $\mu_{T-1}-r\mu_T-\beta_{T-1}=0$ が成立する。(b)式の $\mu_T=1+\beta_T$ をこれに代入して変形すれば，$\mu_{T-1}=r(1+\beta_T)+\beta_{T-1}$ を得る。全く同じく(f)式にも用いれば $\mu_{T-2}=r^2+r+(r^2+r)\beta_T+r\beta_{T-1}+\beta_T$ が得られる。これらの式を整理すれば，

$$\mu_{T-1}=r+r\beta_T+\beta_{T-1}$$

$$\mu_{T-2}=r(1+r)+r(1+r)\beta_T+r\beta_{T-1}+\beta_{T-2}$$

つぎに，一般式に書き改めれば，

$$\mu_t=r(1+r)^{T-t-1}+\sum_{k=t}^{T-1} r(1+r)^{k-t}\beta_{k+1}+\beta_t$$

が得られる。この条件式の解釈は t 期における1ドルの値が，その期における利子率の終価であり，その期の双対変数の合計値と一致することを明らかにす

24)　B. Näslund, *op. cit.*, pp. 266–267.

る。ここで，期間を t から s 期までの間と仮定すれば，その期の１ドルの値は，

$$\sum_{i=t}^{S}\mu_i=\sum_{i=t}^{S}r(1+r)^{T-i-1}+\sum_{i=t}^{S}\sum_{s=i}^{T-1}r(1+r)^{s-i}\beta_{s+1}+\beta_t$$

となる。そこで，最後の T 期までを仮定すれば，

$$\sum_{i=t}^{T}\mu_i=(1+r)^{T-t}+\sum_{s=t}^{T}(1+r)^{s-t}\beta_s \qquad (\mathrm{IV}\cdot 10)$$

が得られることになる[25)]。t 期の投資プロジェクトに投下した１ドルの資金は，最後の T 期までに，その価値 $\sum_{i=t}^{T}\mu_i$ が毎期の利子率に借入れ限度まで調達することによる機会原価からなることを示している。

要するに，ある期における資金の価値がその後の期間と共にどう評価されるかが判明する。その評価のための利子率の性質が複合的なものであり，具体的に r か $r+\beta_t$ と表わされる。後者の $r+\beta_t$ なる利子率は，借入れの制約の影響を反映するものであり，それによって，プレミアム要因を含む機会原価としての性格を一層強く特徴づけている。

最後に，投資プロジェクトのフローに，クーン＝タッカー条件を適応して，次の投資プロジェクト選択基準が得られる。

$$\begin{array}{lll} x_j=0 \text{ のとき,} & S_j\leq 0 & \\ 0\leq x_j\leq 1 \text{ のとき,} & S_j=0 & \qquad (\mathrm{IV}\cdot 11) \\ x_j=1 \text{ のとき,} & S_j\geq 0 & \end{array}$$

ただし，

$$S_j=\hat{a}_j-\sum_{s=1}^{T}\sum_{i=t}^{T}a_{i-s+1,\,j}\mu_i-\sum_{i=1}^{T}\frac{\sigma_{ij}{}^2x_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}{}^2x_j{}^2+Var(D_i)}}F^{-1}(d_i)\,\mu_i \qquad (\mathrm{IV}\cdot 12)$$

これは投資プロジェクトを承認するか否かの状況を明示的に表わした形である。この条件から，投資プロジェクトの承認の状況が，最終の投資１単位当りの価値 $\hat{a}_j$ に，キャッシュフローの終価を加算し，次に財務的な資金スラックを控

25) H. M. Weingartner, *op. cit.*, p. 163. 線型問題の双対問題から導き出される資金の機会原価としての割引率を一致する。

除した額 (S_j) が非負であることを一見して分からせる。勿論，(V・12) 式で用いられる μ_i は既に (V・10) 式で規定された i 期の1ドルの終価であり，又，資金調達の不完全さを表わす不確定な要因を含んでいる。更に，資金の調達が借入れの限度一杯までなされるので，このプレミアム要因の β_t は，前年度に多額のキャッシュフローがあるなら，それだけ後の借入れの限度を緩和する性格のプロジェクト，反対に，前の年度が悪い結果に落ちる可能性があり，それだけ後の資本の供給を圧迫する性格のプロジェクト採否に強い影響を加えるのは明らかである。

特に十分留意する必要があるのは，プロジェクトの採否に当たり，唯市場利子率のみを用いることは不適切で，ここで導き出されたプレミアムを含む計算利子率が妥当性を持つことである。これをもって資本コストが解決したとは言い難い，ここで，規定された資本コストは，こういった問題の特定化の下であって，企業全体の資本コストとは決め難いことである[26]。

V　モデルについての再考

これまで，各投資プロジェクトの間に独立の性質がある考察を進めてきた。他の投資プロジェクトの間に相互依存の性質がある時，前節のモデルは当然不適切なものとなる。更に，企業の収益能力，規模，投資機会から見て，借入れ，貸出しなどの金融取引の利子率が異なるとか，しかも期間ごとに異なるとか，資金の調達が，ある期に，少なくとも新株発行増資でなされるとか，それぞれの事態が観察される時，これに対処するモデルの構築が必要とされる。こうした現実的意味をもたせるモデルは，機械的に制約条件を追加するとか変形条件式に置き換えるとか，条件式自体を細分化するとかで処理出来る。これは，分析手法の展開を無益に複雑にするだけなので，便宜上基本的な思考方法を我々は述べてみることにする。

(a)　短期の金融取引利子率の相違

26)　廿日出芳郎，資本予算の計画法，「経済学研究」第6号，p. 58.

さて，借入れ，貸出しの短期取引の利子率がそれぞれ異なり，しかも，期間ごとにも異なる時，利子率は一定の予測値[27]か， 確率分布を既知として，期待値[28]で表わされる。後者にもとづく観察ならば，その状況は前述の基本モデルの制約条件式 (III・3) の財務的部分を次のごとく書き換える。

$$-(1+\bar{r}_{t-1})V_{t-1}+V_t+(1+\bar{r}'_{t-1})W_{t-1}-W_t \qquad (\mathrm{V}\cdot 1)$$

ただし，$t-1$ 期の借入れ期待利子率は $\bar{r}'_{t-1}$ 又は，貸出しの期待利子率は $\bar{r}_{t-1}$ とする。

更に借入れ調達の状況をより一般化すれば， 制約条件式 (III・4) のような借入れ限度額を前もって特定化せず，調達に伴なう危険プレミアムとしての利子率の上昇を考慮して，つまり，資本調達の構造を反映する負債比率の変化を考慮しながら，この段階はこの利子率で，次の段階はこれまでの借入れの状況に伴なう上昇の利子率で，段階的な借入れ調達が行なわれる。この状況も，又，条件式の修正で処理される[29]。

(b)　新株発行増資

次に，或る期に，少なくとも，増資を行なう機会を企業が持つ時，不完全市場の状況下なら，この問題を避けるのは当然片手落ちである。何故なら，増資は企業にとりもう一つの大きな資金調達の手段である。資金調達手段として，新株発行による増資の場合，周知のように，まず，旧株主の利益を損ねないで，企業の増資後の価値が，低くても等しいか，又は，増加する必要がある。次に，その価値を最大にするため，必要な新株発行数の問題が解かれねばならない。この点，Weingartner が説明しているので，それを述べてみれば， 増資前の企業の一株当りの終価を求め，株式発行の手取額を制約条件に追加し，その下で，増資後の企業の一株当りの終価を求め，それが前者より等しいか，それ以上の場合が求められている。ただし，増資後の終価を最大にするため，どれほ

27) H. M. Weingartner, "Criteria for Programming Investment Project Selection", *The Journal of Industrial Economics*, No. V, 1966.
28) D. E. Peterson, *op. cit.*, Chapt. 15.
29) H. M. Weingartner, *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, 1963. pp. 168–172.

どの増資が必要かは，増資パラメーターを動かして，最大の値を試行錯誤的に求めている。

かくて，制約条件式(III・2), (III・3) に自動的に株式発行の増資額$(-P_tS_t)$が追加されて変形される。

ただし，P_t：t 期における発行価格，

S_t：t 期における増資株数，

これまで論じてきたように，さらに，旧株主の利益を損なわない条件が配慮されていることに我々は注意しなければならない[30]。

(c) 安定配当

各投資プロジェクトの決定で，企業が急速に成長している場合，その成長の資金調達が前述のような新株の発行にあるとき，企業の現金配当支払いは，多くの困難な問題点を有し，それがため，批判を受け易く，議論を醸し出す[31]。それは配当政策が企業の成長や企業の価値に関連するからである[32]。しかし，ここでは単純に現金配当が観察されるときの条件式の修正だけに議論を留める。

かくて，配当が，飽くまでも，企業の活動の結果，残る余裕資金から廻されるものなら，各期における現金配当の支払い（$+d_t$）条件が追加されるだろう。しかも，配当政策に，配当支払いの最低金額が想定されるなら，$dmin \leq d_t$ の条件式が追加されるだろう。

以上のことから，予定期間に増資が無く，短期の資金調達は借入れに依存し，金融取引の利子率は源泉ごとに，期間ごとに異なり，しかも，現金の配当に対して安定支払いが一定額以上である事態が観察されるなら，基本モデルの制約条件式（III・2），（III・3）は

---

30) *Ibid.*, pp. 175–177. 追加条件として，$\frac{A^1}{S+\sum_t s_t} \geq \frac{A}{S}$ と最適な発行数を求める $\sum_t s_t \leq \theta$ が規定される。ただし，増資前の企業の最適な終価は A として，発行株数は S とする，増資後は，同じく，A^1 として，$S+\sum_t s_t$ とする。

31) H. Bierman, *Financial Policy Decisions*, 1970, p. 153.

32) F. Modigliani and H. H. Miller, "Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares", *Journal of Business*, Oct. 1961.

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{1j}x_j+V_1-W_1+d_1\leq\bar{D}_1$$

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{tj}x_j+V_t-(1+\bar{r}_{t-1})V_{t-1}-W_t+(1+\bar{r}'_{t-1})W_{t-1}+dt\leq\bar{D}_t$$

と書き換えられ，更に追加条件式 $dmin\leq dt$ が機械的に加えられる。

(d)　相互依存関係

各投資プロジェクトの間に相互依存関係が観察されると，確率変数が独立という前提は自然に外されて，確率変数の依存関係を前提として，モデルの改築がなされる。前節の機会制限計画モデルでは，(IV・4)，(IV・5) 式の平方根自体に共分散が生じてくる。つまり，平方根の内容が，

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}{}^2x_j{}^2+Var(D_t)+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_jx_k}$$

と書き換えられる。ただし，$\sigma_{jk}=cov.\ (a_{ij}, a_{ik})$，$(j, k=1, \dots n)$，$a_{tj}$ と D_t の変数に相互関係はない。次に，投資プロジェクト間の相互関係を表わす条件式が機械的に付加される。この相互関係は，周知のごとく，3つの類型に区分される[33]。

1)　ある投資機会の採用は，他の全ての機会を認め難くする。代替的関係が成立する相互排他的 (mutually exclusive) な投資である。この形式的関係は，もし J の代替的投資プロジェクトの内から，一個の投資プロジェクトが選択されるなら，$\sum_{j\in J}x_j\leq1$ に定式化される。例えば，x_r と x_s が代替的な関係にあるなら，$x_r+x_s\leq1$ が成立つ。実際，競合関係の中で，社員の福利厚生や公害予防設備などの非経済性の投資が採用されるとき，この方式は極めて有効である。

2)　ある投資機会が，他の投資機会の採用に依存する。補完的な関係が成立する補完的 (contingent) な投資である。この形式的関係は，もし投資プロジェクト r が投資プロジェクト s に依存するなら，$x_r\leq x_s$ で表現される。これら

33)　H. M. Weingartner, "Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis", *Management Science*, March 1966.

が一般的な相互依存の関係であるが，

3) 依存的な投資機会が補完的な投資機会と結合する，合成的な関係が成立する合成的 (compound) 投資がある。例えば，投資プロジェクト r と投資プロジェクト s が相互排他的であり，投資プロジェクト μ と投資プロジェクト v のどちらかの承認に依存するなら，その形式的関係は $x_u+x_v\leq 1$ かつ $x_r+x_s\leq x_u+x_v$ と定式化される。

以上の如く，形式的に成立する相互関係が制約条件式として，追加されて行く[34)]。かくて，不確実性下の投資決定問題は，問題の状況に対処して，企業の投資政策や財務政策を織り込みながら，企業の目標を最大にする投資機会が選択されて行くことである。

VI 逐次的投資決定

これまでの理論構成は，問題を一層複雑化しない意味で，各期の投資プロジェクトのキャッシュフローが，前期のキャッシュフローと生起確率で無関係と規定されている。このことは，有限の計画期間に，予想される事象が，どの程度，投資決定に影響するかを吟味しながら，予想される変数が，期間ごとに特定化される。例えば，具体的に，G. N. P.，海外・国内の競争，技術革新，長期需要，公害，政府政策などの，経済，業界，経済外の外生要因，必要投資額，営業費，耐用年数などの内生要因を表わす事象が，感度の強い要因を反映する構造分布に規定され，それにもとづいて，各期ごとのキャッシュフローの分布が測定される。このような要因は，主観的な見積り，相互関係が多いため，適切に調整して，合理的な，しかも，より正確な予測がなされ，これが合理的な投資評価を裏付ける[35)]。

34) H. M. Weingartner, *op. cit.*, pp. 147-152. この制約条件の追加に依る影響と解釈については，上限の制約変更や双対変数の新解釈などが明らかにされる。

35) 線型計画モデルで， data の変動に関する体系的な分析として， sensitivity analysis と parametric linear programming の接近法がある。又，投資決定に影響する要因を詳細に説明する文献は， R. G. Murdick and D. D. Deming, *The Management of Capital Expenditures*, Chapt. 3, 1968, を参照されたい。

ところで，各期プロジェクトのキャッシュフローが前期のキャッシュフローと関連性をもつなら，生起確率は一連の関係を有し，これを処理して，投資決定が行われなければならない。この処理方法として，確率的な多段階の決定過程を前提とした確率的動的計画法 (stochastic dynamic programming) が適応される[36]。確かに，この手法を用いるものに，Joel, Cord の所論[37]があり，この基本的原理はマルコビッツの証券投資原理を背景にしている。ただし，現在価値の代りに利益率を用いているが，本質的に，方法が変わるものではない。しかし，投資機会の相互依存関係が無視されているのを意識して，Weingartnerの所論[38]では，計算を簡易化する Sharpe の共分散消散化の原理を内容とする接近法が展開されている。更には，確定的な，多段階の決定過程を前提としているが，Nemhauser and Ullmann の所論[39]では再投資利益，借入れ，貸出し，資本の繰延べなどの財務政策を織り込んで，Weingartner の所論をより詳細に展開させている。したがって，個々の状況に適合する条件の定式化が適応される時，確率的動的計画法の方法は，より一層，現実的な事態を掘り下げて観察出来る意義を持つ。ここでは，現実の行動が意思決定の連続であるという認識があることは言うまでもない。この方法の基本的な原理は逐次的な最適原理と再帰関係の原理を特徴とし，多段的に意思決定過程が分割される。したがって，この手法は，意思決定が明確に裁断出来るものほど，より大きな効果を挙げる。又は，企業内外の環境の変動を反映させながら，戦略的投資機会の探求

36) 多段階的な決定過程を処理する別の接近法には，D. B. Hertz の risk analysis 方法と J. F. Magee の decision tree の方法を一体化した stochastic decision tree の接近法があり，この文献は，R. F. Hespos and P. A. Strassmann, "Stochastic Decision Trees for Analysis of Investment Decisions", *Management Science*, Aug. 1965. 更に，資金制約を考慮して，それを処理する stochastic linear programming の方法を綜合化した文献は，R. C. Salazar and S. K. Sen, "Inter-Temporal Portfolio Analysis based on Simulation of Joint Returns", *Management Science*, Sept. 1967, を参照されたい。

37) J. Cord, "A Method for Allocating Fund to Investment Project where Returns are subject to Uncertainty", *Management Science*, Jan. 1964.

38) H. M. Weingartner, "Capital Budgeting of Interrelated Projects", *Management Science*, March 1966.

39) G. L. Nemhauser and Z. Ullmann, "Discrete Dynamic Programming and Capital Allocation", *Management Science*, May 1969.

又はその決定のタイミングの問題が処理される。例えば，前半に停滞な利益を特徴としても，後半に利益を急造させる政策で，全体の期間の利益が最も効果を上げげる問題が取扱われる。更には，期間の中間でも，収益性を最大にする投資機会の組合せが測定される。この手法は，過程指向的な分析による，有利な現実的な意義を持つ。以上のように，問題の性質の観察によっては，例えば，資金配分を段階的な配分過程と認識すれば，前節までに論述の方法は，不適切で，ここでの分析方法が適応されるのは明らかであろう。

VII 結 論

我々は，或る一定の期間に，制約された資金内で，個々の投資機会の組合せを基本構造に，不確実性下の状況の立場を首尾一貫して取りながら，そのための投資決定モデルを数理的接近問題に定式化した。したがって，そこでは，物理的な投資決定のみならず，同時に，財務決定の機会が有機的に一体化されている。又は，企業外の環境諸条件の変動と関連して，不確定なキャッシュフローが，確率の概念を援用して，確率分布で，あるいは，その期待値に単一化して測定される。次いで，財務の流動性ないし安定性を維持するために，危険の度合いを反映して，資金スラック（financial slack）に具象化される確率的な制約条件が織り込まれる。これらの分析技術手法を具備したものに，機会制限計画を提唱し，その方法の展開過程が，中核をなす機会原価である資本コストを明らかにし，更に，投資機会の選択評価基準を導出する。最後に，認識の相違から逐次的な過程分析が簡単に取り上げられる。しかし，モデル自体は，出来るだけ観察される状況を解決するため，より精密化される構造が考察される。かくて，新しい方法論の立場が，不完全市場の状況，相互依存関係の状況，更に，投資機会の決定と資金調達と構造の単純な状況の側面から展開される。これが，この方法論の現実的な意義と有効性を明らかにする。

既に展開された新しい分析手法が，こうした考察を通じて，伝統的な分析手法と異なって，新しい見地から，問題の状況を解決する方向に導き，しかも，

投資決定論の領域を拡大している。かくて，この分析手法が，投資決定問題に，現実に欠くべからざるものであると認識すると共に，こうした新しい方法論を投資決定論に位置づけることから，投資決定論が，より一層，現実的な役割を果たすと共に，より有効な妥当性をもつ事に大きな意義がある。しかしながら，実際は，モデルの基本構造が，不確実性を十分に吟味しながら，現実の複雑さを反映して，細分化するか，又は，反対に，問題領域全体の綜合化という高い位置から，複雑な構成の一体化を図るとかの方向が考察され[40]，一層高度の利用がなされるだろう。これが，次に残された課題である。

最後に，見過すことの出来ない分析手法の限界を二三明らかにしてみる。

まず，第一は，モデルの基本構造にインプットされる数値の信頼性とそれに伴なう不確実性の処理である。これは，数値の確率分布がある程度，主観的でも的確に予測されるのを前提とするからである。内生と外生変数間が未知な場合，又定量化出来ない要因の取扱いは極めて困難な問題である。そのため，予測に伴なう不確実性の非数学的処理が，なされる方法で，不正確，又は，精密性を欠く問題が残る。

第二は，この基本構造の主要な変数でもある計画終了期間 (time horizon) の設定である。これは，従来の方法論に比べて，モデルの枠組の内で，論理的に割引率を導出し，且つ，財務の流動性を，別の観点から，把握する有利な点もあるが，長期の予測可能を前提としているため，期間の推定をする極めて無理な点が存する。

第三は，投資機会の選択基準が，企業の終価の最大化と規定していることである。これは，現実に，多元的な選択基準の衝突がある中で，企業の行動に最も妥当し，又は企業の価値を最も有効に表現するかという困難な点がある。

---

40) 投資決定問題が，財務的な意思決定の領域だけでなく，他の生産の領域をも組入れて，綜合化して，統一的な意思決定問題を確立する方向を提供する文献は，J. S. Moag and E. M. Lerner, "Capital Budgeting Decisions under Imperfect Market Conditions — A Systems Framework", *Journal of Finance*, Sept. 1969; D. Vickers, *The Theory of Firm, Capital and Finance*, 1968; "The Comment", *Journal of Finance*, Sept. 1969; and "The Cost of Capital and the Structure of the Firm", *Journal of Finance*, March 1970.

第四は，どのアルゴリズムの方法が，当該の問題を迅速に解明し，しかも，合理的な解に到達するかという，実証性が充分でなく，保証されがたい問題がある。

こうした困難な問題が，実に十分処理されず隠されている。したがって，分析手法が，より説得力を得るためにも，我々は，残された課題と共に，これらの問題への配慮を忘れることが出来ない。