經濟論叢

第113巻　第4·5号

昭和49年4·5月

京都大學經濟學會

確率的優越性 (Stochastic Dominance) 基準について

——EV基準との比較を中心にして——

佐　藤　義　信

序

ポートフォリオ・セレクションの理論においては，マルコビッツ (H. M. Markowitz) の期待値一分散 (An Expected Return-Variance) 基準[1]が，これまで，効率的な投資決定の方法として重要視され，しかも，多く用いられてきた。そのためＥＶ基準は，数々の理論的な成果をポートフォリオ分析において顕著に挙げてきた[2]。しかし，この基準は，収益の確率分布や投資家の効用関数を特定する基本的な諸条件の仮定に関する段階において，多くの論者によって指摘された所であるが[3]，批判の対象となる諸問題を生じた。この批判的な問題を反省する意味で，確率的優越性 (Stochastic Dominance) の基準[4]が，ＥＶ基準に代わる方法であると主張する論者が，最近，見受けられる。この研究の流れを説明してみると，Quirk & Saposnik が[5]，ＳＤ基準の基本的な原理を定義し，次に，Hadar & Russel や Whitmore が[6]，その原理を根底にする効率的な

1) これは EV の略号を用いる。

2) 例えば，Tobin の分離定理 (separation), Sharpe の対角線モデル，体系的な危険 (systematic risk) 等の概念。

3) E. F. Fama, "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, Jan. 1969; W. Breen and J. Savage, "Portfolio Distributions and Tests of Security Selection Models," *Journal of Finance*, Dec. 1968; B. Mandelbrot, "The Valuation of Certain Specutative Prices," *Journal of Business*, Oct. 1963.

4) これは SD の略号を用いる。

5) J. P. Quirk & R. Saposnik, "Admissibility & Measurable Utility Functions," *Review of Economic Studies*, Vol. 29, 1962.

6) J. Hadar & W. R. Russel, "Rules for Ordering Uncertain Prospects," *American Economic Review*, March 1969; G. A. Whitmore, "Third Degree Stochastic Dominance," *American Economic Review*, June 1970.

決定ルールを確立する。また，Hanoch & Levy や Levy & Sarnat や Porter 等[7]はその決定ルールをポートフォリオ・セレクションのための一般的な効率的基準までに展開していった。そこで，本稿では，Markowitz 流の EV 基準の接近法において，これまでに批判されてきた問題点を論ずると共に，この批判点に拘わりなく，効率的な基準としての役割を果たすというSD基準を取上げて，その基本的な原理を述べていく。最後に，この基準が，効率的な組合せを選び出す決定ルールとして，EV基準に代わるほどの決定の能力，つまり，効率性 (efficiency) の効果を有するのであるかどうかという問題を，双方の基準を比較しながら，論じていく。

I　EV基準の問題点

では，EV基準における批判の対象となる問題点を考えることにする。EV基準は，投資における収益の確率分布関数を期待値と分散という二つのパラメーターの集合でもって十分に特定することが出来て，しかも，投資家の効用関数が一般的な危険回避型であるとか，もしくは，投資家が負の二次導関数を有する二次効用関数の型を持っているとかという基本的な諸条件を規定している[8]。これらの仮定の下において最も望ましい組合せを選び出すという決定の論理においては，効率性 (efficiency) の概念と期待効用 (expected utility) の概念が決定ルールと目的最大化のための基本的な原則の役割を果たしている。この基本的な原理は，簡潔で，理解し易いが，収益の確率分布関数や投資家の効用関数を規定する諸条件の仮定を考えてみる限り，二，三の現実的な矛盾を生

7) G. Hanoch & H. Levy, "The Efficiency Analysis of Choices involving Risk," *Review of Economic Studies*, July 1969; H. Levy & M. Sarnat, *Investment and Portfolio Analysis*, 1972; R. B. Porter, "An Empirical Comparison of Stochastic Dominance and Mean-Variance Portfolio Choice Criteria," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Sept. 1973.

8) この接近法の展開は，Tobin & Markovitz の文献を参照されたい (J. Tobin, "Liquidity, Preference as Behavior toward Risk," *Review of Economic Studies*, Feb. 1958; H. M. Markowitz, *Portfolio Selection*, 1959)。

ずる問題を含んでいる。そこで，以下，この矛盾に関する諸問題を指摘して，ＥＶ基準が有する批判点を考えてみるとしよう。

まず，第一の問題は，収益の確率分布が二つのパラメーターである期待値と分散のみでもって十分に特定出来るという仮定の場合である。この仮定における批判点は，分散の指標が確率分布を特定するための役割を十分に果たすことが出来ないということである。この問題が論じられたのは，Fama, Breen & Savage や Mandelbrot 等[9]が証券価格の変動に関する実証分析を行ったとき，投資における収益の確率分布が，四つのパラメーターから成る安定パレーシァン (stable Paretian) 分布の性格を持ち[10]，つまり，ある一定の期間に渡たる収益が，独立した，しかも，同一の分布 (安定分布) の性格を持っていることを主張したからである。そして，その分布は両裾の末端 (tails) が収益の横軸に接することのないような開いた性格をもっており，そのために，分散の性質が無限 (infinite) の型となる。だからこの特性を持つ分布の場合ならば，有限の分散の型を予想するＥＶの接近法は測定上，大きな誤差を生じることであろう。

---

9) E. F. Fama, "The Behavior of Stock-Market Prices," *Journal of Business*, Jan. 1965, pp. 34–105; B. W. Breen & S. J. Savage, "Portfolio Distribution & Tests of Security Selection Models," *Journal of Finance*, Dec. 1968, pp. 805–819; B. Mandelbrot, "The Variation of Certain Speculative Prices," *Journal of Business*, Oct. 1963, pp. 394–419.

10) 安定パレーシアン分布は次のような対数の型の特性関数 (characteristic function) を示す。

$$\log f(t)=\log E(e^{itu})$$
$$=i\delta t-\gamma|t|^{\alpha}[1+i\beta(t/|t|)w(t,\alpha)]$$

ただし，u：確率変数

t：実数

$i=\sqrt{-1}$

$$w(t,\alpha)=\tan\frac{\pi\alpha}{2}\quad(\alpha\neq 1)$$
$$\frac{2}{\pi}\log|t|\quad(\alpha=1)$$

この分布の特性は次の四つのパラメーターに依拠している。

δ：位置 (location) のパラメーター (期待値：$\alpha>1$のとき)

γ：規模 (scale) のパラメーター (分散の$\frac{1}{2}$：$\alpha=2$ のとき)

β：歪みのパラメーター ($-\leq\beta\leq 1$, 対称：$\beta=0$ のとき)

α：特性指標 (characteristic exponent)

$0<\alpha<2$ のとき，無限の分散を示す。

このような実証分析の成果に基づいて，分散の指標としての役割に対する不適切さを指摘することは，必要なことであろう。ただし，その前に，無限の分散をもたらすという安定パレーシァン分布が厳しい前提条件を規定していなければならないような非現実的な側面の問題を見過ごしている。この厳しい前提条件は収益の期間的な測定が同じ分布関数に依拠していることや，収益の規模が期間的な加算でもって大きくなっても，分布自体の型までを変えることがないという安定のパラメーターであることを示している[11]。しかし，実際，収益の確率分布関数を取上げる場合においては，これほどの厳しい前提条件を，まず，考えるという必要性はないであろう。この観点から，確率分布の特性が，二つの指標に依拠している場合においては，純粋な統計上の見地から，有限のサンプルの資料に基づく有限の分散という条件を規定しても，この点は，Tsiangや Feldstein が指摘したところでもあるが[12]，強い批判を受けるほどの対象にはならないであろう。

結局，この仮定の場合における問題点は，第二次の積率である分散が無限もしくは有限の性格をもつのかという論点にあるよりも，第二次の積率までの指標によって，分布の特性が十分に表わすことが出来るのかどうか，つまり，それ以上の高次の積率（例えば，歪みの特性を示す第三次積率など）が必要であるかどうかを考えることであろう[13]。

そこで，積率法のアプローチに基づいて必然的に生ずるこのような基本的な諸問題を取扱うこともなく，それを回避して，確率分布関数を考えるという基本的な理論が，次の章で述べるＳＤ基準の特徴であり，しかも，その基準の必

11) Fama, *op. cit.*, pp. 102–105.

12) S. C. Tsiang, "The Rationale of The Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and The Demand for Money," *The American Economic Review*, June 1972, n. 5. p. 358; M. S. Feldstein, "Mean-Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection," *Review of Economic Studies*, Jan. 1969.

13) 第三次積率の必要性を考慮に入れて，効率的な基準の問題を論じた文献については，拙稿，効率的な投資選択基準についての一考察(2)，経済科学，第21巻第２号，13–21ページを参照されたい。

要性に対する一つの根拠であるに違いない。

第二の問題は，投資家の効用関数を規定する諸条件の仮定の場合である。まず，投資家の効用関数が危険回避の二次効用の型であることを仮定している場合を考えるとしよう。この仮定における批判点は，この効用関数が $u'(r)>0$, $u''(r)<0$, $u(r)=a+br+cr^2$ という条件を規定していることにある。ただし，r は収益を示す。まず，限界効用が正であるという条件 ($u'(r)>0$) は，$r<\frac{-b}{2c}$ の不等式を導出し，その範囲において，投資家は合理的な行動をすることを示す。そこで，仮に，収益の上限が $K=\frac{-b}{2c}$ であるとすると，この K の値を越えれば，負の限界効用という条件が多い収益よりも少ない収益を好むという意味から，投資家の合理的な行動を損うという現実的な矛盾が生ずる[14)]。だから，この仮定は，K 以下の制限された範囲における収益のみを取扱わなければならないという限界がある。つまり，この際，投資家が十分に期待出来るほどの大きな収益の上限値 (K) と，その範囲における投資家の効用関数 $u(r:K)$ という適切な制約条件が規定されるとき，これを満たす条件が最適なものである[15)]。ただし，これは，絶対的なものでなく，仮に，同じ仮定の下において

14) ただし，これが唯一の理論的な矛盾でなく，J. W. Pratt, K. J. Arrow 等が指摘したことであるが，この仮定における批判点を説明してみる。

まず，絶対的危険回避の程度を示す指標 $\alpha(r)$ が $\frac{-u''(r)}{u'(r)}$ (限界効用の相対的変化率) であるとしよう。二次効用関数 ($u(r)=a+br+cr^2$) における第一次，または，第二次導関数を求めると，

$$u'(r)=b+2cr$$
$$u''(r)=2c$$

を得る，この条件を用いて $\alpha(r)$ の指標は

$$\alpha(r)=\frac{-u''(r)}{u'(r)}=\frac{-2c}{b+2cr}$$

と表わされる。

この関数の第一次導関数を求めれば，その符号は $\alpha'(r)=\frac{4c^2}{(b+2cr)^2}>0$

すなわち，常に正の符号であることによって，危険回避の程度が収益の増加関数であることを得る。

この結論は，投資家が豊かになるほど，危険回避の程度が減少して，危険の高い投資が多くなるという通常の一般的な現象に対する一つの矛盾であるとして批判されるところである (拙稿，効率的な投資選択基準についての一考察(1)，経済科学，第21巻第1号，115-117ページ)。

15) 最適 (optimal) という概念は，投資家の好みに関する仮定が提供されているとき，最小の効率的な組合せ (minimal efficient set) を保証するような条件のことである。

ＥＶの効率的な組合せを更に減少出来るという代替的な基準が定義される限りにおいては，十分条件を満たしても，必要条件を満たすことにならないという問題にも留意することが必要であろう[16)]。

次に，投資家の効用関数が一般的な危険回避型 (a concave utility function) であることを仮定している場合を考えてみよう[17)]。

この仮定における批判点は，一般的な効用関数を規定する側面に対してではなくて，確率分布関数を規定する側面に対しての主たる問題である。一つは，確率分布の特性を表わす期待値と分散が同じ分布に基づくパラメーターに依拠しているという場合である。この場合においては，収益の確率分布が対数正規分布の型であることを想定すると，投資家は対数効用関数の型 $(u(r)=a\log r)$ の性格をもつことになって，効率的な組合せの選択は，その性格に依存して，最終的な決定ルールとならない[18)]。そのため，その欠陥を補う条件は，確率分布関数における期待値と分散が，分布を直接に離れて，それぞれ別個のパラメーターの集合である，つまり，二つのパラメーター分布 (two-parameter distribution) であることを規定する。しかしながら，この場合でも，分散の指標の大小の規模にかかわりなく，効率的な組合せの選択が出来るという条件がある。それは，確率分布関数が他の関数とお互に交差しない累積分布関数を有していることである[19)]。それ故，この問題を生ずる条件にも考慮を払って，最適な条件を満たすことが出来るのは，一つは，二つの投資の累積確率分布がお互に交差しているという場合であり[20)]，もう一つは，二つの指標を生ずる確率分布が

16) これは，二次効用基準 (Quadratic Utility Criterion) と称されている効率的な基準である (H. Levy and M. Sarnat, *Investment and portfolio Analysis*, 1972, pp. 385–388; G. Hanoch and H. Levy, "Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility," *Journal of Business*, April 1970, p. 186)。

17) これは，$u'(r)>0$ または $u''(r)<0$ の条件をもち，危険回避型の投資家全体に関連するものである。

18) Feldstein, *op, cit.*, pp. 6-7; G. Hanoch and H. Levy, "The Efficiency Analysis of Choices involving Risk," *Review of Economic Studies*, July 1969, p. 342.

19) H. levy & M. Sarnat, *op. cit.*, p. 313.

20) *Ibid.*, pp. 311-315; Hanoch and Levy, *op. cit.*, p. 343

正規分布の型である（ここでは，前の交差するという条件を必要としない）という場合である[21]。これらの諸条件は，いずれにせよ，ＥＶ基準の一般性を制約することになるが，十分に満足出来るという投資選択の役割を果たしていることを示す。

以上において論じてきたＥＶ基準の諸問題は，批判的な意見を回避する意味と，適切な決定ルールを提供する意図とを包含しているに違いない。この必要性に答えることが出来るのは，確率分布を特定したり，または効用関数の型を厳しく規定したりしないという仮定の下における効率的な基準の場合である。これに答えるＳＤ基準は，ＥＶ基準に比べて優れた理論と言えるかも知れない。では，ＳＤ基準の諸条件や決定ルールを，次に，考えてみる。

II　確率的な優越性 (SD) 基準

まず，ＳＤ基準における前提条件を説明するとしよう。

1)　各投資の収益に対する確率関数が得られるとき，投資家の選好順位は効用関数の期待値でもって決まることにする。

2)　それぞれの確率変数は $r=r_i$ $(i=1, 2 \ldots)$ の組合せでもって示される集合 R の内にあり，$r_i \in R$ であるとする。ここで，便宜上，r の規模が $i<j$ であれば，$r_i<r_j$ であり，その最大値は r_N であるとしよう。

3)　投資家の効用関数 $u(r)$ は全ての可能な効用関数の集合 U の内にあり，$u(r) \in U$ であるとする。しかも，その関数 $u(r)$ は一定の有限値 r に対して，それぞれ有限値をもち，当初の富 (initial wealth) によって影響を受けることがないとする[22]。

以上の前提条件の下において展開されるＳＤ基準の基本的な原理は，一つは，全ての確率分布に関する情報が完全に既知であり，しかも，この分布関数の特

21)　Levy & Sarnat, *op. cit.*, pp. 311-312; Feldstein, *op. cit.*, p. 7; K. Borch, "A Note on Uncertainty and Indifference Curves," *Review of Economic Studies*, Jan. 1969, p. 4.

22)　全ての $w \geq 0$ に対して，$u(w+r)=u(r)$ が成立する。ただし，当初の富は w であるとする。

性に関する情報が具体的に識別されないことであり，もう一つは，投資家の効用関数に関する制約条件が，一般的な性格を有するように緩和されることである。このことは，確率分布に関する複雑な問題を考えるということもなく，投資家の効用関数に関する基本的な条件にのみ注目を払うことを示す。そこで，この効用関数に関する主要な内容を識別して，その基本的な諸条件に応じて区別を行うという三種のＳＤ基準を明らかにすることにしよう。

まず，投資家が少ない収益よりも多い収益を好むような一般的な性格を仮定する場合である。このとき，投資家の効用関数は収益に対して非減少であるという制約条件のみを有することである。この条件は効用の第一次導関数が正であり，つまり，全ての $r\epsilon R$ に対して，$u'(r)>0$ の条件をもつ全ての可能な効用関数の集合が U_1 であることを示す。だから，この一つの制約条件を有する効率的な基準は，投資家の一般的な性格をみて，一般的な効率基準 (a general efficiency criterion) であり，また，第一次導関数に依存するし，しかも，ＳＤ基準の代名詞であるとして，第一次確率的優越性基準 (first degree stochastic dominance) であると称されている[23]。

次に，投資家が危険回避，中立，危険選好等の特定の性格を有するという仮定の場合である。このとき，投資家が危険回避の性格をもつという場合であれば，投資家の効用関数は，前の制約条件に加えて，限界効用が逓減するという条件を有する。この条件は，効用の第二次導関数が負であり，全ての $r\epsilon R$ に対して，$u'(r)>0$ しかも $u''(r)<0$ の条件をもつ全ての可能な効用関数の集合が U_2 であることを示す。だから，この条件の下における効率的な基準は危険回避型の投資家を考えているので，危険回避効率基準 (a risk aversion efficiency criterion) であり，前述した第一次の基準の条件と比べて，不十分な条件であることからして，第二次確率的優越性基準 (second degree stochastic dominance)

23) R. B. Porter & J. E. Gaumnitz, "Stochastic Dominance VS. Mean-Variance Portfolio Analysis: An Empirical Evaluation," *The American Economic Review*, June 1972, p. 439.

であると称せられる。

最後に，投資家は，豊かになると，つまり，収益が増加していけば，危険回避の程度を減少するような性格を有するという場合である。このとき，投資家の効用関数は，これまでの二つの条件に加えて，効用の第三次導関数が正であるという条件を有する。この条件は，全ての $r \epsilon R$ に対して，$u'(r)>0, u''(r)<0$，しかも $u'''(r)>0$ の条件をもつ全ての可能な効用関数の集合が U_3 であることを示す。かくして，これらの条件の下における効率的な基準は，第三次確率的優越性基準 (third degree stochastic dominance) である[24]。

以上，三種の効率的なＳＤ基準を述べてきたけれども[25]，ここで，それぞれの基準における投資の選択順位を決めるという決定ルールを明らかにしてみよう。

この決定ルールは，二つの投資を比べてみて，一方の投資が選好されることを，確率的に大きいことでもって表わし，それを満たすような条件を示すことである（これが確率的優越性の概念であるが)。しかも，この決定ルールの働きは，ＥＶ基準における働きと同様に，危険な投資の可能な全ての組合せを，効率的なものと非効率的なもの（優越されるもの）とに区分することである。この働きを示す決定ルールは，以下，それぞれ定義することが出来る。ただし，二つの投資の確率関数は $f(r)$ と $g(r)$ であるとする。

ＧＣ：確率関数 $g(r)$ が確率関数 $f(r)$ に比べて優越することを示す必要十分条件は，全ての $n \leq N$ に対して，$G_1(r_n) \leq F_1(r_n)$ であり，少なくとも r_0 に対して $G_1(r_0)<F_1(r_0)$ である。ただし，$F_1(r_n)=\sum_{i=1}^{n} f(r_i)$，$G_1(r_n)=\sum_{i=1}^{n} g(r_i)$, $F_0(r)=f(r)$, $G_0(r)=g(r)$ $(n=1, 2, \dots, N)$。

ＲＡＣ：確率関数 $g(r)$ が確率関数 $f(r)$ に比べて優越することを示す必要十分条件は，全ての $n \leq N$ に対して，$G_2(r_n) \leq F_2(r_n)$ であり，少なくと

24) G. A. Whitmore, "Third-Degree Stochastic Dominance," *The American Economic Review*, June 1970, pp. 457-459.

25) 三種の SD 基準は，GC, RAC, TSD と略号を，以下，用いることにする。

も r_0 に対して $G_2(r_0)<F_2(r_0)$ である。ただし，$F_2(r_n)=\sum_{i=2}^{n} F_1(r_{i-1})\Delta r_{i-1}$, $G_2(r_n)=\sum_{i=2}^{n} G_1(r_{i-1})\Delta r_{i-1}$, $F_2(r_1)=0$, $G_2(r_1)=0$ $(n=2, 3, \ldots, N, \Delta r_{i-1}=r_i-r_{i-1})$。

TSD：確率関数 $g(r)$ が確率関数 $f(r)$ に比べて優越することを示す必要十分条件は，全ての $n\leq N$ に対して，$G_3(r_n)\leq F_3(r_n)$ であり，少なくとも r_0 に対して $G_3(r_0)<F_3(r_0)$ であり，しかも，$G_2(r_n)\leq F_2(r_n)$ である。ただし，$F_3(r_n)=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}[F_2(r_i)+F_2(r_{i-1})]\Delta r_{i-1}$, $G_3(r_n)=\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}[G_2(r_i)+G_2(r_{i-1})]\Delta r_{i-1}$, $F_3(r_1)=0$, $G_3(r_1)=0$ $(n=2, 3, \ldots, N, \Delta r_{i-1}=r_i-r_{i-1})$。

以上，基本的な諸条件の仮定の下における各種の決定ルールを明らかにすることでもって，三つのSD基準の基本的な原理が明らかになったことであろう。

ここで，同じ記号を用いて，EV基準における決定ルールを示してみると，

EV：確率関数 $g(r)$ が確率関数 $f(r)$ に比べて選好することを示す条件は，$u_1\geq u_2$ であり，$\sigma_1^2\leq\sigma_2^2$ が成立することである。ただし，双方の不等式は同時に成立することがない $(E_{g(r)}=u_1,\ E_{f(r)}=u_2,\ V_{g(r)}=\sigma_1^2,\ V_{f(r)}=\sigma_2^2)$。

ここで，SD基準が示す役割は，この基準を必要とする状況を考えてみれば，一層，明確化するということなので，二つの投資における期待値と分散（または標準偏差）が同一であるという場合を取上げて，EV基準が働かない，次の例を示すことにしよう[26)]。

収益(%)	$f(r)$	$g(r)$
5	0.1	0
10	0	0.3
15	0.9	0.6
20	0	0.1
	1.0	1.0
u	14	14
σ	3	3

26) ただし，この例の数値は E. E. William の資料に依拠することにして，しかし，必要な価値のマトリックスは，便宜上，修正したものを用いる（E. E. William, *Investment Analysis*, 1973, pp. 351-352)。

三つのＳＤ基準をこの資料に基づいて示せば，

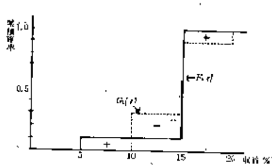
i	1	2	3	4
r_i	5	10	15	20
$f(r_i)$	0.1	0	0.9	0
$g(r_i)$	0	0.3	0.6	0.1
$F_1(r_i)$	0.1	0.1	1.0	1.0
$G_1(r_i)$	0	0.3	0.9	1.0
F_1-G_1[27]	(+0.1)	(−0.2)	(+0.1)	(0)
$F_2(r_i)$	0	0.005	0.010	0.060
$G_2(r_i)$	0	0	0.015	0.060
F_2-G_2	(0)	(+0.005)	(−0.005)	(0)
$F_3(r_i)$	0	0.000125	0.000400	0.00225
$G_3(r_i)$	0	0	0.000375	0.00225
F_3-G_3	0	(+0.000125)	(+0.000125)	0

第　1　表

である[28]。

そこで，各決定ルールが示す $F(r)-G(r)$ の条件を検討してみると，$g(r)$ が $f(r)$ に優越する条件は，収益５から20までの値において正か零であることを示さなければならない。ところが，ＧＣ基準においては，収益10のときＲＡＣ基準においては，収益15のとき，その条件が負であって，優越のための

27) GC における累積確率分布は右のような図表でもって示すことが出来る。



28) $F_2(r_4)=0.1\times0.05+0.1\times0.05+1.0\times0.05$
$=0.005+0.005+0..05$
$=0.060$
$F_3(r_4)=0.5[(0+0.005)\times0.05+(0.005+0.010)\times0.05$
$+(0.010+0.060)\times0.05]$
$=0.5\times0.05(0.005+0.015+0.070)$
$=0.025\times0.090$
$=0.00225$

条件を満たしていない。しかし，これに対して，ＴＳＤ基準においては，その条件が，零か，正の0.000125でもって，満たされている。したがって，ここにおいて，$g(r)$ が $f(r)$ に優越することが明らかになる。

要するに，我々は，このような極端な例であるが，ＳＤ基準の内においてのＴＳＤ基準が果たす役割を理解出来たことと思う。

結局，個々の投資家に関する最小の情報に基づいて，しかも，何ら，確率分布の型の特性に関係することなく，最適な効率的な組合せを提供出来る決定ルールであるという意味でもって，ＳＤ基準はＥＶ基準よりも概念上優れたものであることが明らかになったことであろう。

更に，ＳＤ基準における大切な特徴は，投資家の効用関数に関する仮定が，制約条件を加えるごとに，選ばれる効率的な組合せの規模を減少することを示している[29]。この効率性 (efficiency) の効果という意味でもって，ＳＤ基準が，ＥＶ基準にとって代わるほどに，実際に優れたものであるかどうかという問題を，次に，検討するとしよう。

III 効率性 (efficiency) 分析

では，ＳＤ基準の効率性の問題を，Porter & Gaumnitz の実証分析[30]を用いて，論ずることにする。まず，手始めに，この問題を検討した文典を明らかにしよう。H. Levy & G. Hanoch[31]がイスラエルの証券取引所における個々の証券のデーターを利用して，更に，H. Levy & M. Sarnat[32]が個々の証券

29) 拙稿，効率的な投資選択基準についての一考察(Ｉ)，経済科学，第21巻第１号，122ページ。

30) R. B. Porter and J. E. Gaumnitz, "Stochastic Dominance VS. Mean-Variance Portfolio Analysis: An Empirical Evaluation," *The American Economic Review*, June 1972, pp. 440-445.

31) H. Levy & G. Hanoch, "Relative Effectiveness of Efficiency Criteria for Portfolio Selection," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, March 1970, pp. 70-74.

32) H. Levy and M. Sarnat, "Alternative Efficiency Criteria: An Empirical Analysis," *The Journal of Finance*, Dec. 1970, pp. 1155-1158; *Investment and Portfolio Analysis*, 1972, pp. 410-415; M. Sarnat, "A Note on the Prediction of Portfolio Performance from Ex Post Data," *The Journal of Finance*, Sept. 1972, pp. 904-906.

のデータのみにおける分析の限界を考えて，十分に，大きく多様化されたポートフォリオであるという mutual fund のデーターを用いて[33]，各種の効率的な基準の分析を試みた。その結果，Levy & Sarnat は，ＧＣ基準は効率的な組合せを，余り減少出来ないような低い効果を提供するに過ぎないが，反対に，ＲＡＣ基準においては，かなりの高い効果が生ずるし，しかも，その組合せの規模においては，ＥＶ基準が決めるという規模と比べてみて，かなりの類似した規模であることを明らかにしている[34]。また，Levy & Sarnat や M. Sarnat は，mutual fund の場合においても，ＳＤ基準とＥＶ基準の組合せの規模が，かなり類似した結果を提供することを指摘する[35]。この成果は，以後に述べる Porter & Gaumnitz の分析においてもみられるところであるが，彼等や Porter は[36] 925種の多量の証券から任意に選択した893の投資ポートフォリオを用いて，各種の基準が提供する効率性の諸問題[37]を論じた。次に，このＳＤ基準は，mutual fund の業績 (performance) を分析するとき，O. M. Joy & R. B. Porter によって用いられて，この種の投資が証券市場においての優位性を持つのかどうかという基本的な問題に対して，一つの成果を提供している[38]。

33) これは，A. Weisenherger の年次分析資料に依拠している (A. Weisenherger & co., *Investment Companies*, Annual editions)。

34) Levy and Hanoch, *op. cit.*, pp. 71–72.

35) Levy and Sarnat, *op cit.*, p. 413 ; "Alternative Efficiency . . . ," p. 1157 ; Sarnat, *op. cit.*, pp. 904–905.

36) R. B. Porter, "An Empirical Comparison of Stochastic Dominance and Mean-Variance Portfolio Choice Criteria," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Sept. 1973, pp. 592–606.

37) 例えば，Porter は，1)相対的な規模，2)その他の相違の性質と程度，3)減少の能力，4)異時点の観察の効果，5)度数間隔法 (frequency interval method) の効果等に関する効率性の問題を検討している (*Ibid.*, p. 590)。

38) 彼等は，mutual fund が証券市場において優れた投資であると主張する Sharpe の見解と，それとは反対に劣る投資であると主張する Ardetti の見解が対立するという問題に対して，この接近法を用いて，Sharpe の見解と一致する成果が得られたことを主張している (O. M. Joy and R. B. Porter, "Stochastic Dominance and Mutual Fund Performance," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, January 1974, p. 30 ; W. F. Sharpe, "Mutual Fund Performance," *Journal of Business*, Jan. 1966, pp. 590–592 ; F. D. Ardetti, "Another Look at Mutual Fund Performance," *Journal of Financial and Quantitative*

以上，SD基準の役割を考えて，それに対する実証的な分析研究は，ここ数年来なされてきていることが明らかになったことと思う。では，Porter & Gaumnitz の実証研究を用いて，当面の主たる課題であるEV基準とSD基準との効率性の問題を考えていく。まず，彼等は，標本分布 (sampling distribution) を用いて概算する確率分布が真の確率分布であることを，実証研究の側面から規定する。しかも，各投資の確率分布を比較する場合においては，ここでも，やはり，二つの比較すべき投資が $f(r)$ と $g(r)$ の確率分布関数を持つことにすれば，次のような定義をする。

それぞれの収益の観察点が m であれば，それぞれの確率変数 (r_i) は $\frac{1}{m}$ か，もしくは，零の相対的な頻度数をもつとする。して，全部の観察数 (N) は $2m$ となる。しかも，i の観察のポイントが $f(r)$ の確率関数に属するものであれば，相対的な頻度は $f(r_i)=\frac{1}{m}$ であり，$g(r_i)=0$ である。観察の順位 $(i<j)$ は，便宜上，収益の大きさ $(r_i<r_j)$ でもって並べることにする[39]。

次に，彼等は，分析のために必要な資料の収集それ自体を，1960～1965年の6年間における月次の収益の観察に基づいて，計算を行なう。これは，観察点が72ポイントであり，そのために，比較計算の手数が144ポイントとなることを示している。これでは，比較分析を単に行う場合においては，実際上，時間や費用を多く伴うことが生じ易くなる。

もしも，この問題を懸念するならば，これを改善出来るという方法を考えることであろう。そのための方法は観察の期間を適切に短縮することであり，スタージエスの公式 (Sturges' formula) がそれに答える方法である[40]。これは，妥当な間隔 (class interval) を決める度数間隔 (frequency interval) の方法であり，大規模な比較と観察を行なう場合においては，計算を短縮する役割を果た

Analysis, Jan. 1971, p. 912)。

39) Porter and Gaumnitz, *op. cit.*, p. 439.

40) このスタージエスの公式は

階級数 (class number) $=1+3.32\log n$ (n；観察数) で示される

(岸根卓郎「統計学」訂正版，1968年，12ページ)。

すことが出来るのである[41]。

では，彼等の実証分析における主要な内容を説明しよう。そこでは，ＥＶ基準とＳＤ基準に関する諸問題が，実証上，以下の三つの観点において論ぜられている[42]。

1) ＥＶの効率的な組合せの規模に対するＳＤの分析。
2) ＥＶとＳＤにおける大規模なサンプル・データーに基づく効率的な組合せの比較。
3) ＥＶにおける分散の減少に基づく多様化に対してＳＤにおける多様化の検討。

一番目と三番目の問題はＥＶが果たす役割に関する一般的な特徴である効率性とその多様化の効果等に対して，ＳＤが同じような役割を十分に果たすことが出来るかどうかである。この問題を検討して，彼等がどんな成果を挙げたかを簡単に述べてみよう。

まず，第一の問題では，ＥＶの一つの役割は，投資家が保有するポートフォリオが危険投資（証券など）であるとか，または，危険のない現金までをも含んでいるとか，しかも，後者の方に，危険を大きく減少する効果があるとかという場合を考えて，ポートフォリオ分析を展開する。ここでは，前者が完全投資，後者が不完全投資であるという場合に区分して，そこでのＳＤの働きを明らかにしている。まず，不完全投資の場合を考えてみれば，ＥＶの効率的な組合せにおいては，大きな期待値で大きな分散を持つポートフォリオがそれよりも低い期待値を持つポートフォリオと比べてみて，少なくとも低い収益値を有していることから，各ＳＤ基準を用いても（そこでは，低い収益に対して鋭い選択の反

41) この必要性の問題は，Porter や Porter Wart & Ferguson 等によって指摘されているが，Porter は，実際，コンピューターの手続きを，4.4分から30秒までに短縮出来ることを述べている (Porter, *op. cit.*, p. 601; R. Porter, J. Wart, and D. Ferguson, "Efficient Algorithms for Conducting Stochastic Dominance Tests on Large Numbers of Portfolios," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Jan. 1973, p. 80)。

42) Porter and Gaumnitz, *op. cit.*, p. 440.

応を示す働きがあるので)， ＥＶの結果と同じ結果が得られることになる。次に，完全投資の場合においては，各ＳＤ基準をＥＶの組合せに順次用いるとき，その組合せの規模は減少することになる。これは，ＳＤ基準が規模に対しての効率的な働きの能力を示している[43]。

第三の問題は，ＥＶのもう一つの役割が，異種の投資の数が増加するにつれて，その組合せの危険が減少していくという多様化 (diversification) の効果を，ポートフォリオ分析において検討することである。この最も高い多様化の効果というものは，Evans & Archer の実証分析に依れば，10から14，15程度の種類に基づく組合せにおいて，得ることが出来る[44]。このような極めて確信の高い多様化に対する限界を指摘出来ないとしても，この問題を，ＲＡＣ基準を用いて検討した場合，16種類程度の投資の組合せがほぼ十分な効率性の効果を提供出来るという事実は，比較的少数の種類から成る投資の組合せに依れば，多様化の効果が十分に得られることを示している[45]。以上の二つの問題を検討してみても，双方の基準の効率的な働きは，大きな相違を生じたという結果を示していない。ところで，第一の問題においては，ＥＶの組合せに対するＳＤの効率性の問題を取扱ってきたが，双方の効率性の働きを比較するためにも，反対に，ＳＤの組合せに対するＥＶの効率性の問題を取扱うことが必要である。この必要性に考慮を払って，双方の基準の効率性を比較・吟味したのが二番目の問題であり，これが，ここでの主たる課題である。

この第二の問題においては，シカゴ大学の証券価格比較ファイル (Chicago price relative files) の資料が別個のデーターとして用いられている。そして，1960年から65年までにおける6ヵ年の925種の証券に対して，無作為抽出法 (random sampling) を用いて，893の投資ポートフォリオが選び出される。この

43) *Ibid.*, p. 441.
44) ただし，Porter & Gaumnitz は10から20程度までにあることを主張する (J. Evans and S. Archer, "Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis," *Journal of Finance*, Dec. 1968, pp. 761-767; Porter & Gaumnitz, *op cit.*, p. 443)。
45) *Ibid.*, p. 444.

資料を用いて，ＥＶとＳＤ基準の効率的な組合せは，次の第２表でもって示されている[46]。

効率的基準	GC	RAC	TSD	EV	EV＆RAC	EV＆TSD
規模（sets）	198(22.2)	40(4.5)	31(3.5)	39(4.4)	24(2.7)	21(2.4)

第　2　表

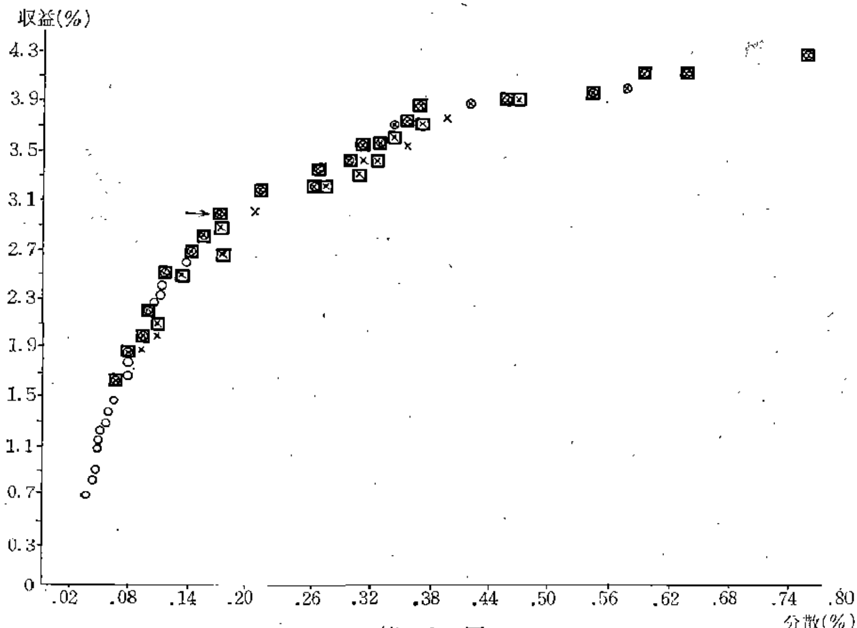
各種の基準の効率的な規模の問題をこの表から考えることにしよう。

まず，各ＳＤ基準の場合においては，ＴＳＤ基準の決定ルールは，ＧＣやＲＡＣ基準と比べてみて，全体のポートフォリオを最も低くまでに減少出来るという強い選択の能力を，しかも，四つの決定ルールの内でも，3.5％までに減少出来るという最も高い能力を有している。これに対して，ＧＣの決定ルールの能力は，全体のポートフォリオを22.2％までに減少する程度であり，他の決定ルールと比べても，かなり劣っている。そのために，この基準は，他の基準と比べても余り重要な意義を提供することもない。かくして，以後，この基準を考慮に入れて論じないことにする。

そこで，ＥＶ基準の場合を加えて，三つの基準の規模の問題を再考してみると，各決定ルールが全てのポートフォリオの内から４％を前後にして，効率的な規模をほぼ同じ程度に減少させていることは，ＳＤとＥＶ基準の規模が期待したほどの相違を生じないことを明らかに示している。だから，双方の基準の相違に関する問題を再度吟味するためには効率的な規模の内容にまで立ち入って論ずることが必要である。そこで，比較という側面から，各基準の効率的なポートフォリオを統一的に期待値と分散の配置でもって，次の第１図において示してみる。ただし，○：ＥＶの効率的なポートフォリオ，×：ＲＡＣの効率的なポートフォリオ，□：ＴＳＤの効率的なポートフォリオ。

この第１図を検討してみよう，39のＥＶ効率的ポートフォリオの内における

46)　ここでの収益に関する観察点は月次ごとになされているが，この観察の異時点（四半期，年次等）の増加は効率的な組合せの数を相対的に増加させる，つまり，規模を大きくすることを指摘して，更には，期間に渡ってのその相対的な規模の安定性をも検討して，月次の資料を使用する良さを暗示していることが Porter によってなされている（Porter, *op. cit.*, P. 602）。



第 1 図

24はRACの効率的ポートフォリオである。これは，第2表がまた示しているように（EV対RACは24である），双方の基準の共通部分であり，しかも，双方の規模が同じ程度であるので，お互に，6割程度を保有していることである。そこで，双方の規模の内容を吟味してみると，RACによって除かれる15のEVの効率的ポートフォリオ（つまり，RACの非効率的なもの）は，図表の低い期待値と低い分散の領域の内に，ほぼ散らばっており（○印のみのもの），しかも，最も近接しているRACの効率的ポートフォリオと比べてみても，期待値としては，0.93%の単位で，分散としては，0.029%の単位でもって，かなり離れていることである[47]。これに対して，EVによって除かれる16のRACの効率的ポートフォリオ（つまり，EVの非効率的なもの）の方は，図表の中間領域の

47) Porter & Gaumnitz, *op. cit.*, p. 443.

内に殆んど散らばっている（×と☒印のもの)。これと同じ傾向の場合は，21の共通部分を有するＥＶとＴＳＤ基準の間にも見られることであり，ＥＶによって除かれる10のＴＳＤの効率的ポートフォリオ（つまり，ＥＶの非効率的なもの）は，図表の中間領域に，やはり散らばっている（☒印のもの)。これがＥＶとＳＤ基準における主要な相違点である。

ただし，ここで，注意すべきことは，ＥＶの効率的フロンティア曲線を図表において想定した場合，ＲＡＣとＴＳＤの効率的ポートフォリオは，この曲線を中心にして，比較的，近接しながら，周辺に散らばっており，しかも，高い収益の水準では，各基準の効率的ポートフォリオがほぼ一致することである。この事実は，ＥＶの効率的ポートフォリオから最も遠く離れていると見做されるＲＡＣの効率的ポートフォリオでも，期待値としては，0,08％の単位，分散としては，0.03％の単位だけしか離れていないことからも知ることが出来る[48]。このことは，双方の規模の内容が低い収益の領域においてのみ相違することを確かめている。

ただし，ＥＶにおける低い収益の領域を取除くというＳＤ基準の成果は，Baumol の期待値―信頼水準 (E, L) 基準[49]が低い収益のポートフォリオを取除くことでもって，ＥＶの規模を減少させた成果と一致していることは興味深いものがある。ここで，投資家の危険回避の態度を反映させて，双方の基準の相違の問題を考えてみよう。危険回避の程度が低いという投資家の場合においては，投資家の選択の対象が高い分散，つまり；高い収益の領域にあるために，双方の基準は，ほぼ一致するような効率的なポートフォリオを選び出すための役割を果たすことが出来る。ところが，危険回避の程度が高いという投資家の場合においては，選択の対象が低い分散，つまり，低い収益の領域にあるために，ＥＶ基準が，高い確率で低い収益を提供することでもって，投資家の期待

48) *Ibid.*, p. 443.

49) W. Baumol, "An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection," *Management Science*, Oct. 1962, pp. 174–181.

効用最大化の目的と一致しないものを生ずる。その意味では，ＥＶの決定ルールは不適切な役割を果たすことになり，ＳＤの決定ルールの方が妥当な成果を提供出来ることになる[50]。なお，彼等は第１図におけるＥＶのフロンティア曲線をみて，分散が増加するにつれて，収益の増加率が逓減し始めるという分岐点にある矢印のポートフォリオが，全ての効率的な基準にとっても，最も望ましい効率的ポートフォリオであることを指摘する[51]。

IV 結 論

我々は，ＥＶとＳＤ基準とを対比させて，どちらの理論が，ポートフォリオ分析のために優れた接近法であるかを論じて来た。して，ＥＶの理論が，収益の確率分布と投資家の効用関数に関する諸前提において，二，三の現実的な矛盾を包含していることを指摘して，この前提の重荷を軽減して，一般的な性質の諸条件を根底としたＳＤの理論が，概念上，より優れた接近法であると考えられる。

しかも，選択決定に関する効率性の効果という観点から，双方の基準の規模とその構成を実証的に分析しても，期待したほどの大きな相違を認識することが出来なくて，一つの主たる相違点は，ＥＶ基準の効率的な組合せが低い収益の領域にも広がっていることである。この場合でも，投資家の効用関数に関する条件の規定によっては，ＳＤ基準の方がより優れた理論であることが明らかになる。

我々は，ＳＤ基準の利点を，以上の様に，理解出来るけれども，このＳＤの接近法にも短所となる問題がない訳ではない。というのは，ＳＤ基準は，相対的に必要とする計算資料が多く，しかも，複雑であるために，ＥＶ基準の二つのパラメーターに基づく計算手法に比べて，劣ることは言うまでもない。更に，この基準は，比較すべきポートフォリオにおける最低の収益の順序に極めて敏

50) Porter & Gaumnitz, *op. cit.*, p. 445; Porter, *op. cit.*, pp. 605-606.
51) Porter & Gaumnitz, *op. cit.*, p. 443.

感 (sensitive) であることによって，全体として期待値の高い投資を取除くことになったり，または，収益に対して少しの誤差があれば，その選択・決定に大きな影響力を与えることになるという問題を包含している。

勿論，我々は，この問題点に十分留意すると共に，個々の投資家が，どの効用関数の仮定と密接な条件を有していることになるかということを考えて，それぞれの妥当な決定ルールを選び出すことが，また，大切なことであることを忘れてはならない。