經濟論叢

第121巻　第4·5号

昭和53年4・5月

京都大學經濟學會

ローレンツ曲線とジニ係数

綿　貫　伸　一　郎

I　はじめに

ローレンツ曲線は所得不平等を分析するための強力な統計学的用具であり，ジニ係数・相対平均偏差など不平等尺度の多くはこの曲線から導出することができる。この純粋に客観的な統計学的用具とみなされていたローレンツ曲線の社会厚生上の含意を明らかにし，所得分布の不平等度と社会的厚生との対応関係を示したのはアトキンソン（文献〔2〕）である。アトキンソンは平均所得水準が同一の所得分布を比較する場合，功利主義的枠組での社会的厚生による順位付けとローレンツ曲線による不平等度の順位付けとが一致することを示している。

この社会的厚生と所得不平等の対応という興味深い命題は，平均所得水準の異なる所得分布を比較する場合には成立しなくなる。そこで次節では，アトキンソンによって提起されたローレンツ曲線と社会的厚生との対応という問題を，同一平均所得という制約をはずして，より一般的に考察することにする。第3節では，このローレンツ曲線に関連する不平等尺度のなかで最も広く用いられているジニ係数を規範的な観点からみた場合の問題点について検討し，最後に，種々の算定方法によるジニ係数値の信頼性という従来あまり注意が払われなかった問題について検討してみることにする。

II　ローレンツ曲線と社会的厚生

まず，アトキンソンの得た結果を要約することから始めよう。アトキンソンは不確実性のもとでの意思決定論を応用して，効用関数を特定化することなく

所得分布の順位付けが確定する条件の導出に成功した。

いま，個人の効用 $U(\cdot)$ は所得 y の凹関数であり，個人の効用の総和として社会的厚生 W が定義されると考えると，所得分布を次式で順位付けることができる[1]。

$$W \equiv \int_0^{\bar{y}} U(y) f(y) dy \tag{1}$$

ここで $f(y)$ は密度関数，関数 $U(\cdot)$ は $U'>0$, $U''\leq 0$ である。

（1）式の評価基準で所得分布を順位付けることは，形式的には，期待効用によって確率分布 $f(y)$ を順位付けることと同じである。効用関数 $U(\cdot)$ が凹関数であるという仮定は，個人が危険回避者（**risk averter**）であることを意味するがこの場合には次の命題が成立することが知られている[2]。

〔補助命題1〕 $U'>0$, $U''\leq 0$ を満たすすべての関数 $U(\cdot)$ について，（1）式の評価基準によりある分布 $f(y)$ が他の分布 $f^*(y)$ よりも選好される必要十分条件は

$$\int_0^x [F(y)-F^*(y)]dy \leq 0, \ \text{for}^{\forall} x \ (0\leq x\leq \bar{y})$$

かつ　（2）

$$F(y) \neq F^*(y) \qquad \text{for}^{\exists} y$$

が成立することである。ここで，$F(y)$, $F^*(y)$ はそれぞれ $f(y)$, $f^*(y)$ の累積密度関数である。

この（2）式の条件は平均所得水準が同一の所得分布を比較する場合には，ローレンツ曲線のタームで解釈できることをアトキンソンは示している。ローレンツ曲線 ϕ は，

1) 数学的取扱いの便宜上，この節全体を通じて，個人の所得は負値になることはなく，また最高所得額は $\bar{y}$ で，有限の値をとるものと仮定する。
2) この命題は，Hadar=Russell〔8〕および Hanoch=Levy〔10〕によって導出されたものである。

$$\phi(F)=\frac{1}{\mu}\int_0^{y_1} yf(y)dy \tag{3}$$

$$\mu=\int_0^{\bar{y}} yf(y)dy,\ F=\int_0^{y_1} f(y)dy$$

と定義されるが，（2）式の条件と

$$\phi(F)\geq\phi^*(F)\quad \text{for } {}^\forall F\ (0\leq F\leq 1)$$

かつ （4）

$$\phi(F)>\phi^*(F)\quad \text{for}^\exists F$$

とが同値であることが示される[3]。ここで，ϕ, ϕ^* はそれぞれ分布 $f(y)$, $f^*(y)$ に対応するローレンツ曲線である。

（4）式の条件は2つのローレンツ曲線が交叉せず（ただし，部分的にかさなってもよい），分布 $f(y)$ のローレンツ曲線が $f^*(y)$ のローレンツ曲線の上方に位置しており，したがってより平等な分布であることを意味している。つまり（1）式の功利主義的な評価基準で社会的厚生の高い分布がローレンツ曲線で比べると不平等度が低いことになる。逆に言えば，ローレンツ曲線が交叉しない場合には上方に位置するローレンツ曲線に対応する所得分布の方が，個人の効用関数の形を特定化しなくとも（1）式の功利主義的社会的厚生関数によって選好されると結論することができる。

この功利主義的社会的厚生と所得不平等度の対応関係に加えて，ドールトンの「トランスファー原則」(principle of transfers) も（2）式の条件と同値であることをアトキンソンは指摘している。ドールトンのトランスファー原則とは，いま y_1 の所得を持つ者から所得を d だけ取り上げ，より低い所得 y_2 (ただし，$y_2\leq y_1-d$) を持つ者に移転するとき，所得移転後の新しい分布はもとの分布よりも平等であると判断されるべきであるというものである[4]。

この原則はロスチャイルドとスティグリッツによって導入された "mean preserving spread" という概念と同じものであり，彼らは mean preserving

3) この証明は Atkinson, *op. cit.*, pp. 246-247. を見よ。
4) Dalton〔4〕pp. 351-352 を見よ。

spreads を有限回くり返すことにより分布 $f(y)$ から分布 $f^*(y)$ が得られるとき，この2つの分布は（2）式の条件を満足すること，また逆に，2つの分布が（2）式を満足する場合には mean preserving spreads を有限回くり返すことにより一方の分布は他方の分布から得られることを示している[5)]。この結果は（2）式の条件にもう1つの経済的解釈を与えることになる。2つの所得分布を効用関数から独立に順位付けることが可能となる必要十分条件は，富者から貧者へ所得を再分配することにより一方の分布が他方の分布より得られることである。

以上のことからアトキンソンの導出した結果をまとめると次のようになる。

〔命題1〕（Atkinson の定理）

平均所得水準が同一の2つの分布 $f(y)$, $f^*(y)$ に関して，次の条件はすべて同値である。

(i) $U'>0,\ U''\leq 0$ となるすべての $U(\cdot)$ に対して，

$$\int_0^{\bar{y}} U(y)f(y)dy > \int_0^{\bar{y}} U(y)f^*(y)dy$$

(ii) 2つの所得分布に対応するローレンツ曲線が交叉しない。すなわち，

$$\phi(F) \geq \phi^*(F) \quad \text{for}^{\forall} F\ (0 \leq F \leq 1)$$

かつ　$\phi(F) \neq \phi^*(F) \quad \text{for}^{\exists} F$

(iii) 富者から貧者への所得移転を有限回行なうことにより分布 $f^*(y)$ から分布 $f(y)$ が得られる。

アトキンソンのこの命題は，このままでは平均所得水準が同一の所得分布を比較する場合にしか適用できない。現実の所得分布の比較にこの命題を適用するためには，平均所得水準が異なる分布の順位付けが可能となる形にこの命題を一般化する必要がある。

まず，評価基準としての社会的厚生関数に（1）式をそのまま用いると，個

5) Rothschild=Stiglitz〔17〕を見よ。

人の効用関数を特定化することなく所得分布を順位付けることのできる必要十分条件である（2）式はローレンツ曲線のタームでは次式と同値になることがわかる[6]。

$$\mu\phi(F)-\mu^*\phi^*(F)\geq 0 \quad \text{for}^\forall F\ (0\leq F\leq 1)$$

かつ (5)

$$\mu\phi(F)\neq\mu^*\phi^*(F) \qquad \text{for}^\exists F$$

ここで，μ, μ^* はそれぞれ分布 $f(y)$, $f^*(y)$ の平均所得水準である。（1）式の評価基準で平均所得水準が異なる所得分布を比較する場合には，ローレンツ曲線の交叉の有無が問題となるのではなく，ローレンツ曲線にそれぞれの平均所得を乗じて得られる曲線の交叉の有無が問題となる。ローレンツ曲線で測ってより平等な所得分布の方が（1）式による社会的厚生も高くなるという不平等度と社会的厚生との対応関係は，平均所得が異なる分布を比較する場合にはもはや成立しない。

この所得不平等度と社会的厚生との対応関係を保持するためには，評価基準としての社会的厚生関数を次の E 関数のように「相対所得型」に換えればよい。

$$E\equiv\int_0^{\bar{y}}U\left(\frac{y}{\mu}\right)f(y)dy \tag{6}$$

ここで，関数 $U(\cdot)$ はやはり凹関数と仮定するが，U は個人の所得そのものの関数ではなく，それを平均所得で除した相対所得の関数になっている。この E 関数では平均所得水準の如何にかかわらず，全員が μ だけの所得を得る均等分布の場合に社会的厚生は最大となる。

さて，所得分布を順位付ける評価基準としてこの（6）式を用いる場合，個人の U 関数を特定化することなく，分布の順位付けが確定するための必要十分条件はどうなるであろうか。（2）式の条件はそのままあてはまる。すなわち，$z\equiv y/\mu$ とおき，z の累積密度関数を $G(z)$ とすれば，

6) 証明は綿貫〔28〕を見よ。

$$\int_0^x [G(z)-G^*(z)]dz \leq 0, \quad \text{for}^\forall z \ (0 \leq x \leq \bar{y})$$

かつ　（７）

$$G(z) \neq G^*(z) \qquad \text{for}^\exists z$$

z のタームでは，z の密度関数を $g(z)$ としてローレンツ曲線が

$$\phi[G(z_1)] = \int_0^{z_1} z \cdot g(z)dz, \quad G(z_1) = \int_0^{z_1} g(z)dz \qquad (8)$$

と定義されることに注意すれば（７）式は，ローレンツ曲線が交叉しないという条件と同値であることがわかる。

（８）式を部分積分することにより，

$$\phi[G(z_1)] = z_1 G(z_1) - \int_0^{z_1} G(z)dz$$

２つの所得分布 $f(y)$ と $f^*(y)$ とを $\overline{G} = G(z_1) = G^*(z_1{}^*)$ となる点で比較すれば

$$\phi[G(z_1)] - \phi^*[G^*(z_1{}^*)] = (z_1 - z_1{}^*)G - [\int_0^{z_1} G(z)dz - \int_0^{z_1{}^*} G^*(z)dz]$$

$$= -\int_0^{z_1{}^*} [G(z)-G^*(z)]dz + [\int_{z_1}^{z_1{}^*} G(z)dz - (z_1{}^* - z_1)G(z)] \quad (9)$$

この最後の右辺の第２項は，平均値の定理から常に非負，（２）式の条件が満たされている場合には第１項も非負となるから

$$\phi[G(z_1)] - \phi^*[G^*(z_1)] \geq 0 \qquad (10)$$

が成立する。逆に，（９）式は

$$\{\phi[G(z_1)] - \phi^*[G^*(z_1{}^*)]\} + [\int_{z_1{}^*}^{z_1} G(z)dz - (z_1 - z_1{}^*)G^*(z_1{}^*)]$$

$$= -\int_0^{z_1} [G(z)-G^*(z)]dz$$

と変形でき，(10) 式が成立する場合には，条件（７）が満たされていることがわかる。これで（７）式と (10) 式とが同値であることが示されたことになる。社会的厚生関数が（６）式で与えられるものとすれば，平均所得水準が異

なる所得分布をも比較することができ，その上，個人の効用関数を特定化することなく（ただし，$U'>0$, $U''\leq 0$），分布の順位付けが確定するための必要十分条件は，ローレンツ曲線が交叉しないことであるという命題が得られる。逆に言えば，ローレンツ曲線によって所得分布を順位付けることは，（6）式のような社会的厚生関数をインプリシットに前提していることになる。

平均所得水準の異なる分布に関しては次の命題が成立する[7]。

〔命題2〕 2つの所得分布 $f(y)$, $f^*(y)$ に関して次の条件はすべて同値である。

(i) $U'>0$, $U''\leq 0$ となるすべての $U(\cdot)$ に対して

$$\int_0^{\bar{y}} U\left(\frac{y}{\mu}\right) f(y)dy > \int_0^{\bar{y}} U\left(\frac{y}{\mu}\right) f^*(y)dy$$

が成立する。

(ii) 2つの所得分布に対応するローレンツ曲線が交叉しない。すなわち，

$$\phi(F)\geq\phi^*(F) \quad \text{for}^{\forall}F\ (0\leq F\leq 1)$$

かつ

$$\phi(F)\neq\phi^*(F) \quad \text{for}^{\exists}F$$

(iii) 富者から若干の所得を取り上げ，その一部を貧者に与える（残りは再分配過程で失われる）という所得移転を有限回くり返すことにより分布 $f^*(y)$ から分布 $f(y)$ が得られる。

アトキンソンの用いた W 関数にしても，〔命題2〕の E 関数にしても，いずれも社会的厚生関数は個人の効用について「加法的に分離可能」(**additively separable**) な関数として定義されている。厚生関数が加法的分離可能性をもつという仮定は，かなり制約的な仮定であり，これまでに得られた結果がこの仮定に依存しているのかどうかが問題となる[8]。この問題を検討したのは，ダ

7) 次の(iii)が(i)および(ii)と同値であることについては Rothschild=Stiglitz〔18〕を見よ。

8) 加法的分離可能性が所得分配上の判断において，どのような含意を持っているかについては，Hamada〔9〕の分析が明解である。その要点だけを知るためには，Sen〔19〕pp. 39–41 を見よ。

スグプタ，センおよびスタレットである[9]。彼らはまず，アトキンソンが連続型の分布について導出した結果を，ハーディ，リトルウッドおよびポーリャが離散型の分布について証明していることを指摘し，次いで，その結果を加法的に分離可能ではない社会的厚生関数による順位付けをも含むように一般化した。

〔補助命題2〕 (Hardy=Littlewood=Polya の定理)

x および y を R^n 空間におけるベクトルとしてその成分を，$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ および $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ となるように並びかえるとき，次の4つの条件はすべて同値である。

(i) $y=Qx$ となる重確率行列 (bistochastic matrix)[10] Q が存在する。

(ii) $k<n$ となるすべての正整数 k について，

$$y_1+y_2+\cdots+y_k \geq x_1+x_2+\cdots+x_k$$

かつ，

$$y_1+y_2+\cdots+y_n = x_1+x_2+\cdots+x_n$$

が成立する。

(iii) 次の変換をくり返すことにより，y は x より得られる。

$$x_i^{\alpha+1}=x_i^{\alpha}+e^{\alpha} \leq x_j^{\alpha}$$

$$j>i,\ e^{\alpha}>0$$

$$x_j^{\alpha+1}=x_j^{\alpha}-e^{\alpha} \geq x_i^{\alpha}$$

$$x_k^{\alpha+1}=x_n^{\alpha} \qquad k \neq i,\ j$$

(iv) R^1 の上に定義される厳密に凹であるすべての関数 $U(\cdot)$ について，

$$U(y_1)+U(y_2)+\cdots+U(y_n)>U(x_1)+U(x_2)+\cdots+U(x_n)$$

が成立する[11]。

x, y を所得分布を表わすベクトルであると考えれば，(ii)の条件は，分布 y に対応するローレンツ曲線が分布 x のローレンツ曲線の上方にあることを意

9) Dasgupta=Sen=Starrett〔5〕を参照。

10) 非負正方行列の各行・各列の成分の和がすべて1になるとき重確率行列と呼ぶ。

11) この補助命題の証明は，Berge〔3〕, pp. 191-195 を見よ。

味する。また，(iii)の条件は，富者 (j) から貧者 (i) への所得移転を有限回くり返すことにより，分布 x から分布 y が得られることを示している。したがって，(ii)，(iii)と(iv)の条件が同値であることは離散型の分布に関するアトキンソンの定理である。(i)の条件は分布 y における各所得成分 y_i は分布 x の所得成分の凸結合になっているという意味において，y は x を平等化したものである。

ダスグプタらは，この補助命題の条件(iv)の加法的に分離可能な関数による順位付けと，厳密に S 凹な社会的厚生関数による順位付けとが一致することを，次の命題にまとめている。

〔命題3〕 (**Dasgupta＝Sen＝Starrett** の定理)

〔補助命題2〕 の条件のもとで，(i)から(iv)と次の(v)とはすべて同値である[12]。

(v) R^n において定義される厳密に S 凹なすべての関数 F について

$$F(y_1,\cdots,y_n)>F(x_1,\cdots,x_n)$$

が成立する[13]。

この命題から所得不平等の尺度がローレンツ曲線と同じ順位付けをするための必要十分条件は，尺度が厳密に S 凸であることであり[14]，尺度がこの性質をもたない場合には，その尺度はローレンツ曲線による順位付けとは矛盾する

12) この命題の証明は，Dasgupta＝Sen＝Starrett, *op. cit.*, p. 183 を見よ。

13) $x\epsilon R^n$ が n 次のすべての重確率行列 Q について，$F(Qx)\geq F(x)$ となるとき，F は S 凹な関数である。さらに，順列行列 (permutation matrix) を除くすべての重確率行列について，$F(Qx)>F(x)$ と厳密な不等号が成立するとき，F は厳密に S 凹 (strictly S-concave) な関数と呼ばれる。ここで順列行列とは，各行・各列にただ1つだけ正の成分 (＝1) をもつ重確率行列のことである。S 凹性およびそれに関連する概念については，Berge, *op. cit.*, pp. 227–235 を参照。

14) 順列行列を除くすべての重確率行列 Q について，$F(Qx)<F(x)$ が成立するとき F は厳密に S 凸 (strictly S-convex) な関数と呼ばれる。不平等尺度は分布が不平等な程，高い値をつけるので，社会的厚生関数とは逆に順位付けることになる。そのため S 凹な社会的厚生関数は S 凸な不平等尺度に対応することになる。倉林・八束〔25〕は，この社会的厚生関数と不平等尺度との関係を定理の形にまとめている。

順位付けを与える可能性があることがわかる。

所得分布に関する同一のデータから計算しても，用いられる不平等尺度が異なれば不平等度の順位付けも変化する可能性があるという事実は，古くはドールトンによっても認識されていた[15]。インテマは同一のデータに相対平均偏差，変動係数，パレート係数など8つの尺度を適用して，不平等度の順位付けが用いる尺度によって著しく異なることを示している[16]。この尺度による順位付けの不一致がローレンツ曲線の交叉の有無と関係があるということを最初に指摘したのはラナディヴである[17]。彼はインドと他の国々との所得分布を比較するために，クズネッツが集めたデータ（文献〔13〕）をもとに2国ずつローレンツ曲線を描き，ローレンツ曲線が交叉しないケースについては，ジニ係数，対数表示の標準偏差，変動係数のうち，どの尺度を用いてもローレンツ曲線による順位付けと矛盾しないことを見出だした。ラナディヴは，「二国間の所得分布の比較において種々の不平等の尺度が矛盾する順位付けを与えるのは，ローレンツ曲線が交叉する場合であり，その場合に限られる。」と述べている[18]。

ラナディヴのこの命題は正確なものではない。〔命題3〕から明らかなように，不平等の尺度が厳密に S 凸であればローレンツ曲線と同じ順位付けを与えるが，尺度が厳密に S 凸でない場合にはローレンツ曲線による順位付けとは矛盾する可能性がある。通常使用されている不平等の尺度の多くは厳密に S 凸であるが，ラナディヴの用いた尺度のなかでは対数表示の標準偏差は S 凸ではない。したがって，この尺度はローレンツ曲線による順位付けと矛盾する可能性がある。

ドールトン以来のこの "**conflicting ranking**" の問題について，〔命題3〕から次のように言うことができる。ローレンツ曲線が交叉しない場合，厳密に S 凸な尺度の間では矛盾する順位付けは生じない。したがって，順位付けに矛

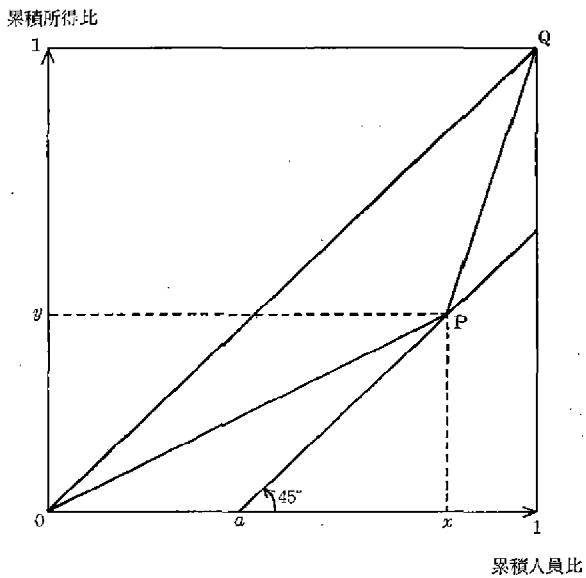
15) Dalton, *op. cit.*, p. 361 を見よ。
16) Yntema〔22〕を参照。
17) Ranadive〔16〕を参照。
18) *Ibid.*, p. 121.

盾が生じるのは尺度が厳密に S 凸でない場合か，ローレンツ曲線が交叉している場合である。

III ジニ係数の問題点

相対平均偏差，パレート係数など不平等尺度の多くはローレンツ曲線から導出することができる。そのなかで，実証研究に最も広く用いられてきたのはジニ係数である[19]。規範的な観点からこの尺度をみる場合，問題となるのは次の2点である。

まず，ニューベリー（文献〔15〕）が指摘したように，所得分布をジニ係数と



第1図 2階級社会のローレンツ曲線

19） 我が国における所得分布の実証研究にどのような不平等尺度が用いられてきたかについては，溝口〔27〕を見よ。

同じように順位付ける社会的厚生関数は「加法的」な形では存在しないということである。

2つの所得階級からなる社会を考え，各所得階級内では各人は同一の所得を得ているものとする。各所得階級の人口比率を，それぞれ x, $1-x$ とすれば，〔第1図〕のようなローレンツ曲線を描くことができる。各所得階級内での平均所得はそれぞれ

$$\frac{y}{x}=\frac{-a+x}{x}=1-\frac{a}{x}(\equiv z<1)$$

$$\frac{1-y}{1-x}=1+\frac{a}{1-x}(\equiv v>1)$$

となり，この所得分配から得られる社会の総効用 $\phi(x, a)$ は

$$\phi(x, a)=x\cdot U\left(1-\frac{a}{x}\right)+(1-x)\cdot U\left(1+\frac{a}{1-x}\right)$$

である。直線 aP に沿って P が動いても，三角形 OPQ の面積は変らないから，ジニ係数は x の変化に対して不変である。しかし，a が右に動けば三角形 OPQ の面積が増加するのでジニ係数の値も大きくなる。したがって，社会的厚生関数 $\phi(x, a)$ がジニ係数と同じように所得不平等を順位付ける性質を持っているとすれば，任意の x, a に対して，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial a}<0$$

が成立しなければならない。前の条件から，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x}&=U(z)+xU'(z)\frac{a}{x^2}-U(v)+(1-x)U'(v)\left\{-\frac{a}{(1-x)^2}\right\}\\&=U(z)+(1-z)U'(z)-U(v)-(1-v)U'(v)-0\end{aligned}$$

すなわち，

$$U(z)+(1-z)U'(z)=U(v)+(1-v)U'(v)$$

が成立しなければならない。この関係が成立するのは，$U(\cdot)$ が一次関数である場合に限られる。ところが後者の条件から，

$$\frac{\partial\phi}{\partial a}=x\cdot U'(z)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)+(1-x)U'(v)\cdot\frac{1}{1-x}$$
$$=U'(v)-U'(z)<0$$

となる。これは $U(\cdot)$ が厳密に凹関数であることを意味し，$U(\cdot)$ が一次関数であることに矛盾する。このことから，ジニ係数と同じように所得分布を順位付ける社会的厚生関数は，「加法的」な形では存在しえないことがわかる[20]。

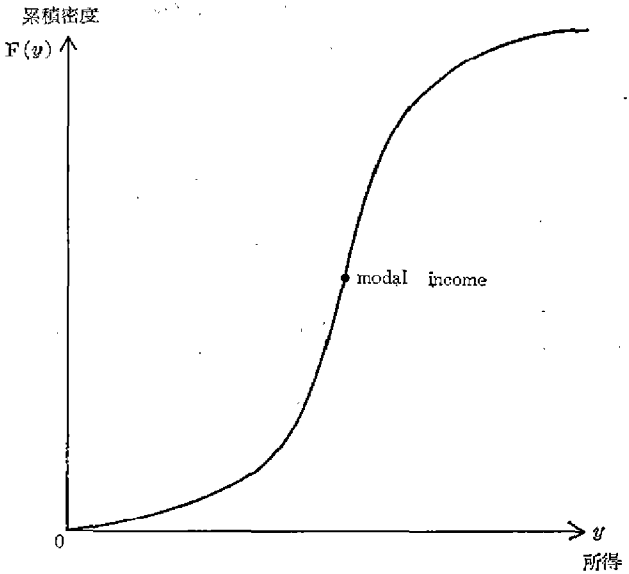
ニューベリーのこの批判に対してシェシンスキーは，社会的厚生関数にとって「加法性」という条件は特別な意義を持たないとして，ジニ係数と同じ順位付けを与える加法的ではない社会的厚生関数の例を提示している[21]。これに対して，ロスチャイルドおよびスティグリッツは加法性の2つの経済的解釈を示すことにより，加法性という性質は社会的厚生関数にとってむしろ合理的なものであると論じた[22]。ロスチャイルドおよびスティグリッツはさらに，所得分布をジニ係数のように順位付ける社会的厚生関数は厳密に準凹ではないことを証明している。しかし，この論争の結論は，加法性および準凹性が社会的厚生関数の持つべき望ましい性質であると論じることはできるが，これらの性質をそなえていないからといってジニ係数が所得不平等の尺度として不適格であると結論することはできないということになろう。ジニ係数は厳密に S 凸であり，したがってローレンツ曲線と同じように所得分布を順位付け，ドールトンのトランスファー原則を満足しているからである。不平等尺度として不適当という判断を下すためには，より強力な根拠を示す必要がある。

規範的な観点からみたジニ係数の第2の問題点は所得階層へのウェイト付けの問題である。不平等尺度がドールトンのトランスファー原則を満たす場合に

20) ニューベリーは $\partial\phi/\partial x=0$ の条件から，個人の効用関数が線形となることだけを指摘し，厳密に凹な U 関数からなる加法的な社会的厚生関数は存在しないと結論している。しかし，$\partial\phi/\partial a<0$ の条件から，線形の U 関数も存在しえないことになる。

21) Sheshinski〔20〕を見よ。

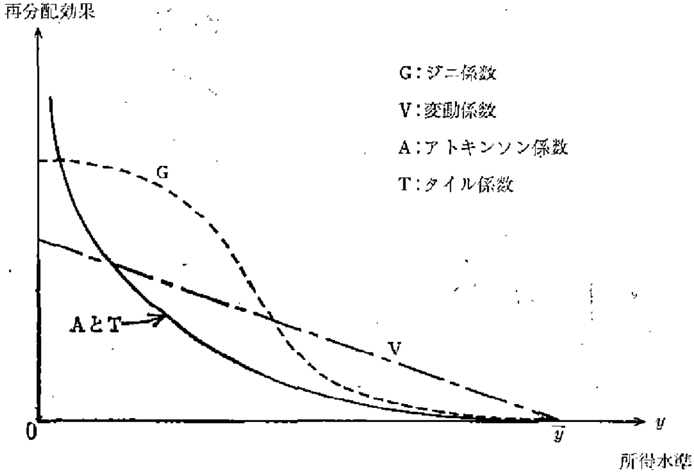
22) Rothschild=Stiglitz〔18〕を見よ。



第２図　uni-modal な所得分布（累積密度関数）

は，y_1 の所得をもつ者から $y_1-h(h>0)$ の所得をもつ者へ少額の所得移転をおこなうと不平等度は減少する。この再分配効果は，再分配の影響を受ける階層の所得水準によって変化する。ジニ係数の場合には，この効果は累積密度関数のタームで $F(y_1)-F(y_1-h)$ に比例することが示される[23]。したがって，〔第２図〕に示されるような典型的な“unimodal”な所得分布の場合には，分布の両端よりも中間所得層に影響を与える再分配に対して最も敏感に反応することになる。この再分配効果を他の不平等尺度と比較してみると〔第３図〕のようになる[24]。この図は，最高所得者から少額の所得を取り上げ，その再分配を受ける個人の所得水準による再分配効果の変化を示したものである。いず

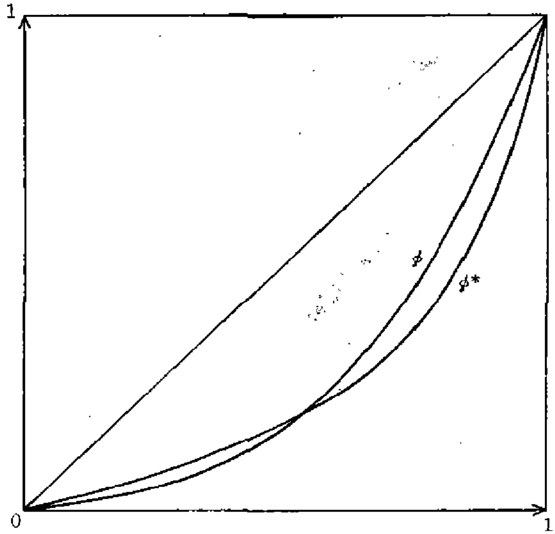
23)　Atkinson, *op. cit.*, p. 256 を見よ。
24)　この図は高山〔25〕によるものである。



第3図 所得再分配効果

れの尺度も最低所得者層に対する再分配に最大のウェイトを付けているが，所得水準の上昇とともに逓減的なウェイトを付けているアトキンソン係数とタイル係数のウェイト付けが，経済的にみて最も妥当なものであろう[25]。これに比べるとジニ係数は低所得者層へ高いウェイトを付けているものの，中間所得者層へのウェイトもかなり高く，したがって中間所得者層への分配の変化の影響が全体のジニ係数値を大きく規定する可能性がある。たとえば，〔第4図〕のように，ローレンツ曲線が ϕ から ϕ^* に時系列で変化した場合，最低所得層に高いウェイトをつける不平等尺度は，分布は平等化したと判断するのに対し，中間所得者層にも比較的高いウェイトをつけるジニ係数では不平等化したと逆の判断を示すことが十分ありうる。この点は，ジニ係数値の変化を解釈する場合に留意しておく必要がある。

25) アトキンソン係数については，Atkinson, *op. cit.* を，タイル係数については，Theil [21], chap. 4 を，それぞれ参照せよ。



第4図

IV　ジニ係数の推定方法

ジニ係数の算定のもとになる所得分布データは，所得階層別に階級分けされ，それぞれの階級に属する標本数（世帯数または人員数）とその階級内の平均所得とが発表されるのが通例である。したがって，このようなデータからジニ係数 R は

$$R=1-\sum_{j=1}^{I}p_i\left(\sum_{j=1}^{i}p_j\mu_j+\sum_{j=1}^{i+1}p_i\mu_j\right)\Big/\sum_{i=1}^{I}p_i\mu_i \qquad (1)$$

の算定式を利用して計算される[26]。ここで I は所得階級数，p_i は第 i 階級に属する世帯（または個人）の全体に対する比率，μ_i は第 i 階級の平均所得額

26)　この算定式は，Morgan〔14〕では the usual method と呼ばれているが，以下では標準算定式と呼ぶことにする。

を表わしている。この算定方式では，推定値の精度は所得階級数に依存し，所得階級数が多いほど推定値は正確なものになる。ところが他の（たとえば外国の）実証研究との比較のためには所得階級数をそろえておくのが便利であり，この目的のためによく用いられるのは５分位および10分位所得階級によるジニ係数の計算である[27]。

いずれの算定方法によっても，本来曲線であるローレンツ曲線を直線で補間して近似するため，計算されるジニ係数値は「真の値」を過少評価するバイアスをもっている。ところが，従来の研究においては，計算されたジニ係数値がどの程度「真の値」を過少評価しているのか，したがって，いくつかあるジニ係数の測定方法のうち，どの方法による推定値が最も信頼性が高いのかといった点にはあまり注意が払われていないようである 。

この節ではガストワース（文献〔6〕）の方法にならって，所得の分布関数のクラスを特定化することにより，ジニ係数の上限値と下限値を確定し，この限界値と種々の算定方法によるジニ係数の値を比較することにする。このことによって，種々の算定方法によるジニ係数値の信頼性についてある程度の見通しを得ることができるはずである。

ガストワースはジニ係数 R と平均差 $\varDelta$ との間には，平均所得を μ として，$R=\varDelta/2\mu$ の関係があることを利用して，所得の分布関数に制約をもうけない場合と，累積密度関数がモードの所得階級より右で凹関数となる場合のジニ係数の上限・下限値を計算している。以下では，このガストワースの２つの方法に加えて，累積密度関数がモードの所得階級で凸から凹に転じる場合のジニ係数の上限・下限値を計算してみることにする。

まず，所得の分布関数に制約をもうけない場合，ジニ係数の上限・下限値は次のように計算される。区間 (a, b) で平均所得 μ をもつ所得階級内での平均差 $\varDelta$ は，所得の分布関数形の何如にかかわらず次の不等式を満たすことが知

27) ５分位（10分位）所得階級とは世帯を所得の大きさの順に並べて５等分（10等分）したものである。

られている。

$$0 \leq \varDelta \leq 2(\mu - a)(b - \mu)/(b - a) \tag{2}$$

すなわち所得階級内の全員の所得が階級内平均所得 μ に一致するとき平均差は0で最小になり，逆に各人の所得が所得階級の境界値 a または b に一致する場合には平均差は最大となる。（1）式による標準的なジニ係数の算定式は，所得階級内平均差が最小と仮定して計算する場合に一致するから，所得分布関数がどのような形であっても「真の」ジニ係数値 G^* は次の範囲におさまることになる。

$$GL = R \leq G^* \leq R + \bar{D} = GU \tag{3}$$

$$\bar{D} = \mu^{-1} \sum p_i (\mu_i - a_{i-1})(a_i - \mu_i)(a_i - a_{i-1})^{-1} \tag{4}$$

この式で，GL, GU はそれぞれジニ係数の下限値，上限値，μ_i は第(i)階級の平均所得を表わし，また第 i 階級の区間は（a_{i-1}, a_i）である。

次に，所得分布の累積密度関数 F が区間（a, b）で凹であり，区間内の平均所得が μ である場合には，区間内の平均差 $\varDelta$ については（2）式のかわりに次の（5）式が成立する。

$$\frac{2}{3}(\mu - a) \leq \varDelta \leq \frac{2}{b-a}(\mu - a)\left[(b - \mu) - \frac{1}{3}(\mu - a)\right] \tag{5}$$

unimodal な分布ではモードの所得階級より右では累積密度関数が凹となるが

$$\mu_i < \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i) \tag{6}$$

および

$$\frac{p_{i-1}}{a_{i-1} - a_{i-2}} > \frac{p_i}{a_i - a_{i-1}} > \frac{p_{i+1}}{a_{i+1} - a_i} \tag{7}$$

が成立する場合には，区間（a_{i-1}, a_i）で累積密度関数は凹であるとみなして（5）式を用いることにする。

最後に，累積密度関数 F がモードの所得階級までは凸，それ以後凹に転ずるとすれば，F が凸の区間（a, b）では平均差 $\varDelta$ は次の不等式を満たす。

$$\frac{2(b - \mu)}{3(b - a)} \leq \varDelta \leq \frac{2(\mu - a)}{3(b - a)}[4(\mu - a) - (b - a)] \tag{8}$$

第 1 表

	方 法 I		方 法 II		方 法 III	
	下 限 値	上 限 値	下 限 値	上 限 値	下 限 値	上 限 値
1964	0.2636	0.2680 (0.0044)	0.2646	0.2675 (0.0029)	0.2646	0.2650 (0.0004)
1965	0.2559	0.2597 (0.0038)	0.2573	0.2592 (0.0019)	0.2573	0.2577 (0.0004)
1966	0.2597	0.2633 (0.0036)	0.2609	0.2629 (0.0020)	0.2609	0.2614 (0.0005)
1967	0.2519	0.2555 (0.0036)	0.2534	0.2549 (0.0015)	0.2534	0.2540 (0.0006)
1968	0.2405	0.2444 (0.0039)	0.2420	0.2430 (0.0019)	0.2420	0.2427 (0.0007)
1969	0.2319	0.2356 (0.0037)	0.2337	0.2347 (0.0010)	0.2337	0.2340 (0.0003)
1970	0.2294	0.2333 (0.0039)	0.2314	0.2324 (0.0010)	0.2314	0.2319 (0.0005)
1971	0.2326	0.2363 (0.0037)	0.2339	0.2359 (0.0020)	0.2339	0.2347 (0.0008)
1972	0.2342	0.2393 (0.0051)	0.2363	0.2387 (0.0024)	0.2363	0.2374 (0.0011)
1973	0.2366	0.2407 (0.0041)	0.2383	0.2400 (0.0017)	0.2383	0.2388 (0.0005)
1974	0.2593	0.2643 (0.0050)	0.2618	0.2634 (0.0016)	0.2618	0.2628 (0.0010)
1975	0.2674	0.2721 (0.0047)	0.2692	0.2717 (0.0025)	0.2692	0.2704 (0.0012)

(注) カッコ内の数値は（上限値）ー（下限値）

ある区間 (a_{i-1}, a_i) で (6), (7) 式と逆向きの不等号が成立する場合には，その区間で F は凸であるとみなして (8) 式を用いることにする。

所得の分布関数に制約をもうけずに，(1), (3) および (4) 式からジニ係数の上限・下限値を計算する方法を〔方法Ⅰ〕，累積密度関数が凹となる部分は (2) 式のかわりに (5) 式で計算する方法を〔方法Ⅱ〕，累積密度関数がモードの所得階級を境に凸から凹に転ずると仮定して，(5) および (8) 式から計算する方法を〔方法Ⅲ〕と呼ぶことにする。『家計調査年報』のデータをもとに1964年から1975年まで12年間の勤労世帯のジニ係数を実際に計算してみると〔第1表〕のようになる。この計算に用いられたデータの所得階級数は16であるが，〔方法Ⅰ〕によるジニ係数の上限値と下限値の差はほぼ0.003から0.005の間である[28]。これに対し，〔方法Ⅱ〕によれば，その差は0.002程度に減少し，さらに〔方法Ⅲ〕によれば，0.0005程度になって，推定の精度は飛躍的に向上する。所得分布は通常，unimodal な分布であり，〔方法Ⅲ〕の前提を満たしているので，抽出誤差を無視して考えれば，ジニ係数の「真の値」はこの〔方法Ⅲ〕の上限値と下限値の間におさまることになる。

種々のジニ係数の算定方法がどの程度「真の値」を過少評価しているかをみるために，〔方法Ⅲ〕によるジニ係数の下限値を基準にとって比較してみると〔第2表〕のようになる。5分位（または10分位）所得階級の各階級内平均所得は，もとの16階級の各階級内で世帯は一様に分布していると仮定して計算をおこなった[29]。表の次の2つの欄はガストワースおよびグラウバーマン（文献〔7〕）にならって，エルミット補間でローレンツ曲線の10分値，20分値を求め，それをもとにジニ係数を計算したものである。表の最後のセンサス・ビューロー法というのは，累積所得額を計算するのに各所得階級の平均所得を用いずに

28) ガストワースの計算では，所得階級数が28で，〔方法Ⅰ〕による上限・下限値の差が0.002程度，〔方法Ⅱ〕では0.001程度になっている。

29) この「5分位所得階級」のデータの計算法は，1962年以前の『家計調査年報』の付録に解説されている。

第 2 表

	方法Ⅲの下限値	標準算定式	5 分 位 ジニ係数	10 分 位 ジニ係数	10 分 位 エルミット	20 分 位 エルミット	センサス・ビューロー
1964	0.2646〔11〕	0.2636〔11〕 (−0.0010)	0.2567〔10〕 (−0.0079)	0.2653〔8〕 (0.0007)	0.2613〔11〕 (−0.0033)	0.2650〔11〕 (0.0004)	0.2728〔11〕 (0.0082)
1965	0.2573〔8〕	0.2559〔8〕 (−0.0014)	0.2507〔7〕 (−0.0066)	0.2651〔7〕 (0.0078)	0.2533〔8〕 (−0.0040)	0.2570〔8〕 (−0.0003)	0.2663〔8〕 (0.0090)
1966	0.2609〔9〕	0.2597〔10〕 (−0.0012)	0.2561〔9〕 (−0.0048)	0.2682〔9〕 (0.0073)	0.2571〔9〕 (−0.0038)	0.2607〔9〕 (−0.0002)	0.2716〔10〕 (0.0107)
1967	0.2534〔7〕	0.2519〔7〕 (−0.0015)	0.2511〔8〕 (−0.0023)	0.2647〔6〕 (0.0113)	0.2495〔7〕 (−0.0039)	0.2529〔7〕 (−0.0005)	0.2661〔7〕 (0.0127)
1968	0.2420〔6〕	0.2405〔6〕 (−0.0015)	0.2420〔5〕 (0.)	0.2545〔4〕 (0.0125)	0.2385〔6〕 (−0.0035)	0.2417〔6〕 (−0.0003)	0.2550〔6〕 (0.0130)
1969	0.2337〔2〕	0.2319〔2〕 (−0.0018)	0.2253〔1〕 (−0.0084)	0.2344〔1〕 (0.0007)	0.2302〔2〕 (0.0035)	0.2332〔2〕 (−0.0005)	0.2370〔1〕 (0.0033)
1970	0.2314〔1〕	0.2294〔1〕 (−0.0020)	0.2286〔2〕 (−0.0028)	0.2391〔2〕 (0.0077)	0.2280〔1〕 (−0.0034)	0.2310〔1〕 (0.0004)	0.2390〔2〕 (0.0076)
1971	0.2339〔3〕	0.2326〔3〕 (−0.0013)	0.2408〔4〕 (0.0069)	0.2579〔5〕 (0.0240)	0.2310〔3〕 (−0.0029)	0.2341〔3〕 (0.0002)	0.2484〔4〕 (0.0145)
1972	0.2363〔4〕	0.2342〔4〕 (−0.0021)	0.2436〔6〕 (0.0073)	0.2938〔12〕 (0.0575)	0.2329〔4〕 (−0.0034)	0.2357〔4〕 (−0.0006)	0.2546〔5〕 (0.0183)
1973	0.2383〔5〕	0.2366〔5〕 (−0.0017)	0.2344〔3〕 (−0.0039)	0.2414〔3〕 (0.0031)	0.2351〔5〕 (0.0032)	0.2382〔5〕 (−0.0001)	0.2444〔3〕 (0.0061)
1974	0.2618〔10〕	0.2593〔9〕 (−0.0025)	0.2571〔11〕 (−0.0047)	0.2690〔10〕 (0.0072)	0.2571〔10〕 (−0.0047)	0.2610〔10〕 (−0.0008)	0.2699〔9〕 (0.0081)
1975	0.2692〔12〕	0.2674〔12〕 (−0.0018)	0.2582〔12〕 (−0.0110)	0.2729〔11〕 (0.0037)	0.2644〔12〕 (−0.0048)	0.2685〔12〕 (−0.0007)	0.2732〔12〕 (0.0038)

(注) カッコ内の数値は基準値（方法Ⅲの下限値）との差

階級値（すなわち，$(a_{i-1}+a_i)/2$）を用いる方法である[30]。ただし，ここでは，最低所得階級についてはこの階級の上の境界値 a_1 に0.75を乗じたものを用い，最高所得階級については $1.5a_{16}$ を用いている[31]。

この表から言えることは，まず第1に，標準算定式によるジニ係数は「真の値」を0.001から0.003程度過少評価しているが比較的安定していることである。基準にとった〔方法III〕の下限値との差は1964年から1975年まで大きな変動はみせていない。この12年間の所得分布を順位付けてみると，〔方法III〕によるジニ係数値による順位付けとほぼ一致している。

第2に，センサス・ビューロー法によるジニ係数値は一様に「真の値」を過大評価していると考えられる。これはガストワースも指摘しているように[32]，この方法では低所得者層の所得額を実際より少なく，高所得者層の所得額を実際より多く評価することになるため，「相対的不平等度」を過大評価することになるわけである。所得階級の平均所得が得られないデータから計算をおこなうため，やむをえずこの方法を利用する場合には，この点に関する理解が必要である。

第3に，エルミット補間によるジニ係数値の順位付けは，10分位の場合も20分位の場合も，〔方法III〕によるジニ係数の順位付けと完全に一致している。〔方法III〕の下限値との差も10分位の場合で0.003から0.005程度，20分位の場合にはほぼ0.0003以下と安定している。これに対して，通常の5分位および10分位所得階級から計算されたジニ係数値はきわめて不安定であり，順位付けも〔方法III〕とはかなりちがっている。ジニ係数で不平等度を評価するにしても，その算定方法がちがえば，計算されるジニ係数の値だけでなく不平等度の順位

30） Gastwirth, *op. cit.*, p. 311 を見よ。

31） 所得分布の“upper tail”にはパレート分布が比較的良好にフィットし，この分布のパラメータ（つまりパレート係数）を α とすれば，区間 (a_{16}, ∞) の平均所得 μ_{16} は，$\mu_{16}=\alpha(\alpha-1)^{-1}\cdot a_{16}$ で推定できる。（たとえば，Aigner=Heins〔1〕の Appendix を見よ。）

ここでは，倉林〔23〕によるパレート係数の推定値を参考にして，$\alpha=3.0$ とおき，$1.5a_{16}$ を用いることにした。

32） Gastwirth, *op. cit.*, p. 312 を見よ。

付けまで変動する可能性がある。たとえば，1964年から1975年までの勤労者世帯の所得分布の変化は，標準算定式や〔方法Ⅲ〕によれば1970年まで平等化，その後不平等化したと評価されるのに対して，通常の5分位（または10分位）所得階級から計算されるジニ係数はそれほど明瞭な変化を示していない。ここでの計算結果だけからは断定的なことは言えないがもとの所得階級内では世帯は一様に分布していると仮定して5分位（または10分位）階級の平均所得を計算する方法はジニ係数値を不安定にする可能性があるようである。

V おわりに

前節でのジニ係数の推定に関する問題点を2，3指摘してこの小論をしめくくることにしよう。

まず第1に，従来よく用いられてきた5分位および10分位階級によるジニ係数の計算方法はエルミット補間による方法より信頼性は劣るということである。

第2に，所得分布が unimodal な分布である場合には〔方法Ⅲ〕を用いることによってジニ係数の上限・下限値の幅を0.0005程度にせばめることができる。ただ，『家計調査年報』のデータを用いる場合には，〔方法Ⅲ〕が利用できるのは所得の数字に関する信頼度の低いアンケート調査による「年間収入」に関してである。家計簿による収支バランスをチェックすることで所得に関する数字の信頼度の高い「実収入」についてはこの方法で計算できない。マウア氏によれば，家計調査の「年間収入」と「実収入」から計算されたジニ係数は安定的な関係にあるとされるが[33]，直接「実収入」に関して〔方法Ⅲ〕が適用できないのは残念である。

第3に，ジニ係数の推定には前節で検討した方法のほかに，パレート分布などの分布をあてはめ，その分布関数のパラメータからジニ係数を誘導する方法がある[34]。しかしこの方法による推定値は標準算定式による推定値ほど信頼で

33) マウア〔26〕, p. 38 を見よ。

34) このようなパラメトリックな方法でジニ係数の推定をおこなった例としては，倉林前掲論文，↗

きるものではない。それゆえ，各所得階級の平均所得が利用できるデータから計算する場合には，既存の算定方法にとってかわるだけの利点はないようである。

参考文献

〔1〕 Aigner, D. J. and Heins, A. J., "A Social Welfare View of the Measurement of Income Equality," *Review of Income and Wealth*, vol. 13, (1967), pp. 12–25.

〔2〕 Atkinson, A. B., "On the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, vol. 2, (1970), pp. 244–263.

〔3〕 Berge, C., *Espaces Topologiques*, Dunod, 1959.

〔4〕 Dalton, H., "The Measurement of Inequality of Incomes", *Economic Journal* vol. 30, (1920), pp. 348–361.

〔5〕 Dasgupta, P., Sen, A. K. and Starrett, D., "Notes on the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory* vol. 6, (1973), pp. 180–187.

〔6〕 Gastwirth, J. L., "The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index", *Review of Economics and Statistics*, vol. 54, (1972), pp. 306–316.

〔7〕 Gastwirth, J. L. and Glauberman, M., "The Interpolation of the Lorenz Curve and Gini Index from Grouped Data", *Econometrica*, vol. 44, (1976), pp. 479–483.

〔8〕 Hadar, J. and Russell, W. R., "Rules for Ordering Uncertain Prospects", *American Economic Review*, vol. 59 (1969), pp. 25–34.

〔9〕 Hamada, K., "A Simple Majority Rule on the Distribution of Income", *Journal of Economic Theory*, vol. 6, (1973), pp. 243–264.

〔10〕 Hanoch, G., and Levy, H., "The Efficiency analysis of choices Including Risk," *Review of Economic Studies*, vol. 36, pp. 334–46.

〔11〕 Hardy, G., Littlewood, J. and Polya, G., *Inequalities*, Cambridge UP., 1934.

〔12〕 Kakwani, N. C. and Podder, N., "On the Estimation of Lorenz Curves from Grouped Observations," *International Economic Review*, vol. 14, (1973), pp. 278–292.

〔13〕 Kuznetz, S., "Quantitative Aspects of Economic Growth of Nations: VIII. Distribution of Income by Size" *Economic Development and Cultural Chan-*

↘および Kakwani=Podder〔12〕がある。

ge, vol. 11. (1963), pp. 1–80.

〔14〕 Morgan, J., "The Anatomy of Income Distribution," *Review of Economics and Statistics*, vol. 44, (1962) pp. 270–282.

〔15〕 Newbery, D., "A Theorem on the Measurement of Inequality," *Journal of Economic Theory*, vol. 2, (1970), pp. 264–266.

〔16〕 Ranadive, K. R., "The 'Equality' of Incomes in India," *Oxford Univ. Institute of Statistics Bulliten*, vol. 27, (1965), pp. 119–134.

〔17〕 Rothschild, M. and Stiglitz, J. E., "Increasing Risk I: A Definition", *Journal of Economic Theory* vol. 2, (1970), pp. 225–243.

〔18〕 Rothschild, M. and Stiglitz, J. E., "Some Further Results on the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, vol. 6, (1973), pp. 188–204.

〔19〕 Sen, A. K., *On Economic Inequality*, Oxford UP., 1973.

〔20〕 Sheshinski, E., "Relation Between a Social Welfare Function and the Gini Index of Income Inequality", *Journal of Economic Theory*, vol. 4, (1972), pp. 98–100.

〔21〕 Theil, H., *Economics and Information Theory*, North Holland, 1967.

〔22〕 Yntema, D. B., "Measures of the Inequality in the Personal Distribution of Wealth and Income", *Journal of American Statistical Association*, vol. 28, (1933), pp. 423–433.

〔23〕 倉林義正「わが国における所得と富の階層別分布」『週刊東洋経済』No. 3764, 1974年

〔24〕 倉林義正・八束厚生 「所得不平等の経済理論」『現代経済』No. 23, 1976年

〔25〕 高山憲之 「所得不平等の尺度：再検討」『国民経済』No. 131, 1974年3月

〔26〕 ロス・イ・マウア「日本における下位体系別の所得分布の状況」『季刊理論経済学』vol. 26, No. 1, 1975年

〔27〕 溝口敏行 「戦後日本の所得分布と資産分布」『経済研究』vol. 25, No, 4, 1974年

〔28〕 綿貫伸一郎 「所得不平等の測定に関するノート」『季刊理論経済学』vol. 28, No. 2 1977年