經濟論叢

第123巻　第4･5号

昭和54年4･5月

京都大學經濟學會

「二つの生産理論」

——新古典派的生産と再生産——

有　賀　裕　二

はじめに

ヒックス以前の伝統的な近代経済学は，（参入の自由と産業の規模に比較して小さい企業からなる）一般競争的なモデルを生産が「規模にかんする収益不変」に服するばあいで近似していた。一次同次の生産函数と限界生産力による完全分配の想定はその好例である。

「規模にかんする収益不変」の仮定の下では，極大利潤があるとすればそれはゼロである。今日「規模にかんする収益減少」を仮定するのはもっぱら正の極大利潤を目的としてとのことにすぎない。一方，古典派的な経済学のひとつの核心をなす「再生産の理論」では，線型工程が仮定され，生産は「規模にかんする収益不変」に服する。しかし，制約式は未知数である拡張係数と他の未知数（操業水準）との積を含むので再生産における拡張率極大問題は実は非線型問題である。

前稿「二つの価格理論」[1] にひきつづき，線型工程を仮定すること自体は経済学的にみてけっして問題はないということを強調するほかに，線型工程を共通の平面として「新古典派的生産」と「再生産」との相違を示すことが本稿の狙いである。

I　新古典派的生産と収益法則

本節では後の議論のために「規模にかんする収益減少」を含むばあいの極大

1）有賀裕二，二つの価格理論（ワルトとレマク），「経済論叢」，昭和54年3月.

利潤に達するための戦略を明らかにしておきたい。アロー＝デブリューとは独立に，ゲールは論文「供給と需要の法則」で簡潔にこの戦略的構図を与えている。さしあたり，前半の「新古典派定理」の説明はこのゲールの論文[2]にもとづく。

極大利潤を追求する新古典派的な生産では，投入と産出の全行程はある一定の時間区間内で行なわれ次期に繰り越すことはない，つまり，投入と産出は同一時点内で実行可能であると仮定する。翌日の心配は市場の外の非生産財（本源的生産要素）の存在量の制約だけである。このとき，幾期間にもわたって再生産される耐久財の生産は考慮の外におかれるので，結局は資本も非生産財のなかに含まれ，それらは歴史的に所与とされる。これは「再生産の理論」[3]と対比して強調されるべき大きな相違点である[4]。

さて，経済単位を産業と消費者のふたつにわける。ある経済単位によって供給されたり消費されたりする財 $G_1, \ldots, G_n$ の束は，各座標を $\xi_1, \ldots, \xi_n$ で記すと，$y=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ である。$\xi_j>0$ なら j 財の供給量，$\xi_j<0$ なら j 財の消費量をいみする。すべての可能な商品の束 y の集合 Y を経済単位の「商品集合」とよぶ。一方，財 G_j の価格を π_j として，価格ベクトルを $p=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ と記す。$\sum_{j=1}^{n} \pi_j=1$ とおけば，価格ベクトルすべての集合は正則な $(n-1)$ 次元単体である。これを P と記す。

本節で論じられる「モデル M は財 $G_1, \ldots, G_n$ とそれぞれに対応する商品集合 $Y_1, \ldots, Y_m$ をもった経済単位 $U_1, \ldots, U_m$ の集合から構成される。」モデルの操作のために，つぎのふたつの条件を与えなくてはならない。ひとつはモデル M の「実行可能条件」であり，もうひとつは自由競争下での実行可能

2) Gale, D., "The law of supply and demand", *Mathematica Scandinavia* 3, 1955.

3) 耐久資本を扱うものとしては，つぎの論文が画期的である。Shiozawa, Y., "Durable Capital Goods and their Valuation", KIER, No. 91, *Discussion Paper of Kyoto Institute of Economic Research.*

4) 一時的均衡モデルをつくるとき，次期の生産についてなんらかの予想をして今期の生産を決定することになる。このために，次期の非生産財を含めた財の価値評価がなされる。しかし，これは今期から次期にわたって再生産される資本の価値評価をいみしない。

な作用を与えるためのモデル M の「経済的条件」である[5]。

モデル M の「実行可能条件」は，集合 Y_i から束 y^i が各財の生産・分配・消費を通じて各経済単位 U_i に割り当てられるための条件である。この条件は明らかに，「経済単位全体によって消費される各財の総量が供給される総量を超えてはならない」というものである。

「実行可能条件」 $\sum y^i \geqq 0.$[6]

一方，自由競争下での「経済的条件」はつぎのようにして与えられる。自由競争経済では，各経済単位 U_i はその満足が極大になるような商品の束 y^i をえらぶだろう。このとき，「経済的条件」はいわゆる予算の制約条件にほかならない。つまり，「U_i によってえらばれる束は供給される財からうけとる所得が消費される財への支払いをみたすようなものでなければならない。」このようにしてえらばれる y^i は，価格をパラメーターとして行動するという自由競争の仮定の下では，価格 p の函数である。この函数を供給函数とよび $S(p)$ で記す。S_i を第 i 経済単位 U_i の供給函数，その第 j 座標を s_{ij} とかく。$s_{ij}>0$ なら経済単位 U_i により供給される財 j の量，$s_{ij}<0$ なら経済単位 U_i により需要される財 j の量をいみする。この $S(p)$ をもちいると，産業の予算制約条件は，利潤は負であってはならないという「利潤条件」をいみする。

「経済的条件」 $S_i(p) \cdot p \geqq 0.$

これらの不等式に服して，「各産業は利潤を極大にするように行動し，一方，各消費者は適当に測られた彼の効用を極大にする商品の束をえらぶ」というのが，新古典派的な経済行動である。U_i を産業単位と考えると，

$$S(p)=\{y \mid y \in Y \text{ and } y \cdot p=\max\}.$$

極大利潤を与える商品の束 y_e の選択とそれに同伴する価格 p_e の存在（「新古典派定理」）を与えるために，ゲールはつぎの「補助定理」を証明した。もしうえの $S(p)$ が「補助定理」の仮設をみたす性質を与えるならば，ただちに

5) Gale, *loc. cit.*, p. 167.

6) Y を生産集合とみれば，$\sum y^i \geqq 0$ をみたさない Y は実行可能な生産ではない。たんに技術的に可能な工程の集合 Y と実行可能な工程の集合 $\tilde{Y}$ は区別される。

「新古典派定理」がしたがう[7]。

補助定理（ゲール）

「S を

(a) $S(p)$ はすべての p にたいして非空かつ凸

(b) もし $y \in S(p)$ ならば，$y \cdot p \geqq 0$

をみたす（$n-1$）次元単位単体 P から R^n への有界・連続な集合値函数とする。このとき，$p \in P$ かつ $y \in S(p)$ が存在する。」

いま総生産集合を $Y_M = \sum_{i=1}^{m} Y_i = \{y \mid y = \sum_{i=1}^{m} y^i,\ y^i \in Y_i\}$，総供給函数を $S_M = \sum_{i=1}^{m} S_i(p) = \{y \mid y = \sum_{i=1}^{m} y^i,\ y^i \in S_i(p)\}$ と定義する。このとき，個々の S_i がうえの「補助定理」の仮設をみたせば，総集合についても同じ仮設がみたされることがわかる。S_i のつくり方にはいろいろあるが，基本的なアイディアはつぎの諸仮定からそれ程かけ離れるものではない。

「$S_i(p)$ が Y_i の非空の凸部分集合である」というために，「Y_i は閉凸である」と仮定する。$S_M = \sum S_i$ の定義から「補助定理」の仮設(a)がしたがう。

「補助定理」の仮設(b)「$y \in S(p)$ ならば，$y \cdot p \geqq 0$」をいうためには，$S(p)$ の定義と経済的条件 $S(p) \cdot p \cdot \geqq 0$ に注意する。

最後に S_M のグラフのつくり方を述べる。まず「S_i のグラフが $P \times Y_i$ の閉部分集合であるといういみで S_i が上半連続である」というために，内積 $y \cdot p$ の連続性と P, Y_i の閉性をいえばよい。さらに，Y_i は有界であると仮定する。P と Y_i の有界性により，S_i のグラフは有界である。ゆえに，S_M のグラフは $P \times Y_1 \times \cdots \times Y_m$ の閉部分集合で，S_M は連続・有界な（$n-1$）次元単位単体 P から R^n への集合値函数である。

結局，「補助定理」の仮設は，経済単位の極大化行動（$S_i(p)$ の定義）のほ

7) 同じことは，U_i を消費単位と考え，もしなんらかの選好体系と予算制約で定義される実行可能な消費集合 $C(p)$ の極大として与えられる「負の $S(p)$」が「補助定理」の仮設をみたせば，したがう。つまり，極大満足を与える商品の束と価格の組が存在する。x を消費集合 X の元とすれば，$C(p) = \{x \mid x \in X,\ xp \leqq 0\}$，$S(p) = \{x \mid x \text{ is maximal in } C(p)\}$, Gale, *loc. cit.*, p. 167.

かに，Yの「有界・閉・凸性」に大きく依存していることがわかる。「有界性」は，本節冒頭での注意，つまり生産と消費は固定された時間内ですべて完了するという仮定から生じる。「閉性」は，たとえば任意の産業にとって可能な生産の数列 $\{y^\nu\}$ があって $y^\nu \to y^0$ となるならば，収束値 y^0 もまたその産業にとって利用可能な工程であることをいみする。これらふたつはコンパクトな商品集合をつくるための「便宜的な仮定」である。また「凸性」はある種の型の生産技術を仮定すれば得られる[8)]。こうして「新古典派定理」が明らかとなる。

新古典派定理（ゲール）

「経済単位 $U_1, \cdots, U_m$ について $y^i \in S_i(p_e)$ となるようなモデル M の価格ベクトル p_e と実行可能な生産工程 $y^1, \cdots, y^m$ が存在する。」

Y の凸性は近代経済学でもっとも共通でおなじみのものかもしれない。Y を消費集合 X と読みかえれば，選好の連続性とならんで凸性が仮定されることが多い。選好の凸性は，A 財とそれより選好される B 財との平均的な組合せもまた A 財より選好されるということなので，よく中華料理の組合せが引き合いにだされる。たしかに，洋食よりは中華料理の方が選好の凸性をみたすだろう。

Y が生産集合であるばあいには，Y の凸性は衆知のように「収益非増大」をいみする。「収益非増大」には「構成要素の比率変化」にかんするものと「規模」にかんするものとのふたつがある。前者の例は，投入財にかんする「限界代替率非増大」，産出財にかんする「限界変換率非減少」である。規模にかんして収益不変であっても，構成要素の比率変化にかんして減少することは許される。いずれのばあいも，生産集合の凸性は技術の性質と不可分である。本節ふたつ目の課題は，技術の観点からみるとき，「規模にかんして収益減少」を仮定することは一般化をいみするものではない，ということを示すことである。

y を Y の元とし，α を1より大きい実数とする。また，y と y' は生産可

8) アローとデブリューは，Y の閉凸性に加えて「無償生産の不可能性」と「工程の不可逆性」を仮定すれば，実行可能な集合 $\tilde{Y}$ の有界性がしたがうことを示した。これは背理法で証明可能。次節でみるように，両者を仮定することは稀少資源の存在を仮定することに等しい。

能であるものとする。このとき，

「規模にかんする収益不変」 $\frac{1}{\alpha}y\in Y,\ \alpha y'\in Y$（任意の正数倍もまた生産可能）.

「規模にかんする収益減少」 $\frac{1}{\alpha}y\in Y,\ \alpha y'\notin Y.$

一方，k を0以外の自然数とするとき，ある生産水準の$\frac{1}{k}$もまた生産可能であるなら，生産は「分割可能」であるという。また，ふたつの可能な生産 y と y' の直和（あるいは一生産の自然数倍 ky）もまた可能であるなら，生産は「加法的」であるという。つまり，

「分割可能性」 $\frac{1}{k}\in Y.$

「加法性」 $(y+y')\in Y$, あるいは$ky\in Y.$

「分割可能性」と「加法性」を仮定すれば，ただちに Y が凸であることがしたがう。つまり，任意のふたつの可能な生産の内分点も生産可能である。さらに生産が連続的（Y が閉）であると仮定すれば，線型性がしたがう。つまり，一生産の任意の正数倍も生産可能である[9]。

凸性： 「分割可能性」により，$0\leqq\frac{1}{k}\leqq 1$ について $\frac{1}{k}y$ も，また $\left(1-\frac{1}{k}\right)y$ も生産可能。「加法性」により，$\frac{1}{k}y+\left(1-\frac{1}{k}\right)y$ も生産可能。ゆえに，Y は凸である。

線型性： $\lambda^\nu\neq 0$ を任意の有理数，$\lambda^\nu\geqq n$ なる最大の自然数を n とする。$u^\nu=\lambda^\nu-n$ とおけば，$0\leqq u^\nu<1$。「分割可能性」により，有理数u^ν について $u^\nu y$ もまた可能。さらに $y^1=\cdots=y^n=y,\ y^{n+1}=u^\nu y$ とおく。$y^i(i=1,\cdots,n+1)$ もまた可能。「加法性」から，$\sum_{i=1}^{n+1}y^i=ny+(\lambda^\nu-n)y=\lambda^\nu y$ がしたがう。よって，$\lambda^\nu y$, つまり任意の有理数倍もまた可能（$\lambda^\nu y\in Y$）。いま実数 $\lambda\geqq 0$ に収束する有理数列 $\{\lambda^\nu\}$ をとると，Y は閉じているという仮定から，λy, つまり任意の正数倍もまた生産可能（$\lambda y\in Y$）。ゆえに，$\lambda^\nu y$ は λy に収束するので，生産集合 Y が閉じているという仮定のもとでは，「分割可能性」と「加法性」のふたつ

9) 「分割可能性」と「加法性」の定義と「線型性」の証明は，塩沢由典氏よりコメントをうけた。Arrow, K. J., and F. H. Hahn, *General Competitive Analysis*, 1972, p. 60 と比較せよ。

は「線型性」と同値である ($\lambda y \in R^n$)。

うえの定義から明らかなように,「規模にかんする収益減少」を仮定することとは「加法性の欠如」をいみする。加法性は「ふたつの工場で別々に生産が行なわれているとき,それらを単一の生産とみなせばいい」ということである。とりわけ,総生産集合 Y は $\sum Y_i$ で定義されているので,このいみでの加法性を放棄するわけにはゆかない。「規模にかんする収益減少」をいうためには,個別生産集合 Y_i 内で加法性が欠如する理由を挙げなければならない。アロー=デブリューは,この困難をつぎのような概念をもち込むことによって逃れようとした[10]。

財には市場化されるもの (y^M) とそうでないものとがあって,そのうえ自由競争にも拘らず,各産業の生産には私的な要素が不可欠であるものとする。つまり,市場化不可能で稀少な私的要素 $\bar{y}^p$ が各産業内に存在する[11]:

$$Y^M = \{y^M \mid (y^M, \bar{y}^p) \in Y\}.$$

Y が凸であるとき,Y^M は凸であるが,$\bar{y}^p$ が存在するため Y^M は一般的に線型性をみたすとはいえない。このいみで,Y の加法性を放棄する。しかし,Y^M は市場化される財の集合だから加法的である。

アロー=デブリューは,市場化されない「私的要素」を「企業者要素」(entrepreneurial factor) と考えている。こうすれば,「規模にかんする収益減少」の結果として正の極大利潤が手に入ったばあいの分配をただちに定義することができる。実際,「この要素の所有は,利潤に参加する権利に応じて企業の所有者のあいだに分布している。このとき,雇用した諸要素の支払いを上回る企業の収入全部は企業者要素に帰属させられる。」[12]

しかしながら,生産集合を定義する段階ですでに私的な要素を埋め込んでし

10) Arrow, K. J., and G. Debreu, "Existence of equilibrium for a competitive economy", *Econometrica* 22, 1954, p. 267.

11) Arrow, K. J., and F. H. Hahn, *loc. cit.*, p. 61.

12) Mckenzie, L., "On the existence of general equilibrium for a competitive market", *Econometrica* 27, 1959, p. 66.

まうことは，理論の観点からみてあまり好ましくない。加法性の放棄は外部不経済をもちこむことにつながっているが，競争的なモデルを論じるばあいに公害の存在を冒頭から仮定することは誰もが嫌うことであろう。さらに，「規模の経済性」を特徴とする「規模にかんする収益増大」に服する生産は，つぎのように定義される：

$$\frac{1}{\alpha}\, y \notin Y,\ \alpha y' \in Y.$$

このとき，加法性は放棄されていない。加法性の放棄は，現実的にみて許容されるべきものとはいえないだろう。

マッケンジーは，加法性を放棄しないで「線型工程」を仮定するとき，「企業者要素」を考慮することが可能であることを示した[13)]。次節では，こうしたマッケンジーの主張を含みうるような「線型モデル」を紹介することにしたい。

II 線型工程と本源的生産要素

ふつう投入の組 a を産出の組 b に変換する対応を「生産工程」といい，(a, b) で記す。本節では，一般的な生産工程 (a, b) は有限個の生産工程 (a_i, b_i) の非負一次結合になっているものと仮定する。いま一次独立な生産工程，つまり基準工程の数を m 個とすれば，

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{m} x_i(a_i, b_i)$$

である。x_i を第 i 工程の操業水準という。a_{ij}, b_{ij} を $m\times n$ 次の行列 A, B の各要素，x を m 次元行ベクトルを示すものとすれば，

$$(a, b)=(xA, xB)$$

である。A を「投入係数行列」，B を「産出係数行列」とよぶ。このような複合的な工程 (a, b) は生産集合 Z の元 z である。また，(a, b), (a_i, b_i) は投入の組 a と産出の組 b との「比例性」を仮定しているので，「線型工程」であるという。このとき，操業水準 x は非負一次結合の係数として比率で与えられるにすぎない。操業の絶対水準は最終需要が与えられてはじめて定まるわ

13) *Ibid.*, *sec.* 7.

けである。

ところで，非負一次結合可能であるということは，$z \in Z, z' \in Z$ のとき，任意の実数 $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0$ について $\alpha z + \beta z' \in Z$($\beta=0$ のとき $\alpha z \in Z$) をいみする。「線型性」が成り立つので，生産は加法的かつ分割可能である。幾何学的にいうならば，有限個の z からなる非負一次結合 Z は原点を含む凸多面錐である。$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)z \in Z, \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)z' \in Z$ も可能なので，Z は明らかに凸である。さらに，凸多面錐はユークリッド空間の集合である。したがって，生産集合 Z が凸多面錐であるということにより，生産集合は「閉凸」だと仮定したことになる。しかし，前節の「新古典派定理」の脈絡からいえば，私たちはなお Z の「有界性」を要する。

前節の Y の元 $y=\sum y^i$ は「純量」で定義されていた。Z の元 z は存在量を含んでいる。前節との対応を強調するために（線型の複合工程を元とする）生産集合 Z を純量に変換しておく。純生産ベクトル $y=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ で，$\xi_j>0$ なら j 財は経済全体の純生産財，$\xi_j<0$ なら j 財は経済全体の非生産財（本源的生産要素）を示すものとする。このとき，

$$y=\sum_{i=1}^{m} x_i(b_i-a_i)$$

である。投入・産出係数行列 $B-A$ をもちいれば，

$$y=x(B-A)$$

である。利潤極大を工程経営の唯一の目的とする「新古典派線型モデル」の焦点は，

$$Y=\{y \mid x\geqq 0 \text{ をみたす} y=x(B-A),\ -xA\geqq -C\}$$

なる集合に絞られるといってよい。ただし，C は「本源的生産要素の存在量ベクトル」である。一方，拡張率極大を工程経営の唯一の目的とする「再生産モデル」の焦点は，

$$\Gamma=\{\omega \mid x\geq 0 \text{ をみたす } x(B-\omega A)\geq 0\}$$

なる集合に絞られるということは，後節を先取りして言うに値するだろう。

さて，Yが凸多面錐であるとき，どのようにして「有界性」が与えられるか

をみることにしたい。なお，簡単のために，投入・産出係数行列 $(B-A)$ を $\tilde{A}$ と記す。$\tilde{A}$ の第 i 行 $\tilde{a}_i=(\tilde{a}_{i1}, \cdots, \tilde{a}_{in})$ が (b_i-a_i) になる。

$y=x\tilde{A}$, あるいは，$y=\sum_{i=1}^{m} x_i\tilde{a}_i$.

これまで $\sum x_i$ はたんに非負一次結合であるとだけ仮定してきた。今度はさらに $\sum x_i$ は凸結合であると仮定してみる。つまり，$x_i\geqq 0$ をみたす $\sum x_i=1$。このとき，有限個の点 $\tilde{a}_i$ からなる一次結合をつくり，その第 i 成分をみると，

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i\tilde{a}_{ij}\right|\leqq\sum_{i=1}^{m} x_i|\tilde{a}_{ij}|\leqq \max_{1\leq i\leq m} |\tilde{a}_{ij}|$$

である。この不等式は「有限個の凸結合全体のなす集合は有界である」ことをいみする。Y は凸多面錐であるので，Y の点 $\tilde{a}_i$ は有限個の点からなる。したがって，もし $\sum x_i=1$ となる経済的理由をみいだせば，Y が有界になることがいえるわけである。

通常，$\sum x_i=1$ となる理由は，すべての工程に直接に不可欠な「本源的生産要素」が存在しているということに求められる。いまこのような要素が存在するものとして，それが第 $n+1$ 財であるとする。第 $n+1$ 財は存在量が限られているので，一般的工程 $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1})$ の基準工程を定めるに際して，第 $n+1$ 財の投入量を1に等しくなるように規準化することができる[14]。

$$(\xi_1, \cdots, \xi_n, -1)$$

$$=(x_1, \cdots, x_m)\begin{bmatrix}\tilde{a}_{11}, \cdots, \tilde{a}_{1n}, -1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tilde{a}_{m1}, \cdots, \tilde{a}_{mn}, -1\end{bmatrix}$$

つまり，

$$y=\sum_{i=1}^{m} x_i\tilde{a}_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=1,\ \text{ただし}\ x_i\geqq 0.$$

いまのべた例では，第 $n+1$ 財は各工程にすべて共通な（同質的な）本源的生産要素であった。ふつうこの種の財を「労働」であると考えることが多い。もし各工程がそれぞれ固有な（異質的な）本源的生産要素を必要とするならば，つぎのようにかきかえればよい[15]。

14) 二階堂副包「経済のための線型数学」昭和36年，p. 161.

$$(\bar{\xi}_1, \cdots, \bar{\xi}_n, \overset{n+1\ th}{-1}, \cdots, \overset{n+m\ th}{-1})$$

$$=(x_1, \cdots, x_m)\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}, \cdots, \tilde{a}_{1n}, & -1, 0, \cdots, & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{a}_{m1}, \cdots, \tilde{a}_{mn}, & 0, 0, \cdots, & -1 \end{bmatrix}$$

つまり，$h=i$ のとき，$n+h$ 財の投入量は1，それ以外は0であるとする。マッケンジーは，各工程に固有なこれらの本源的生産要素を「企業者要素」とよんでいる。

$$y=\sum_{i=1}^{m} x_i\tilde{a}_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_i=m,\ \text{ただし}\ x_i\geqq 0$$

となるので，うえの「拡張された投入・産出係数行列」の第 j 列について

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i\tilde{a}_{ij}\right|\leqq \max_{1\leqq i\leqq m} \sum_{i=1}^{m} x_i|\tilde{a}_{ij}|=\max_{1\leqq i\leqq m} m|\tilde{a}_{ij}| \quad (\because \sum_{i=1}^{m} x_i=m)$$

となって，異質的な本源的生産要素，たとえば「企業者要素」があるばあいにも，もちろん生産集合は有界となる。また，このように各工程がなんらかの本源的生産要素をもちいているとき，各工程は不可逆的である。

つぎに，いままでの利潤極大問題を視点をかえて，「有効工程」の観点から論じてみたい。もし同じ投入量で少なくともひとつの財について純産出が大きい工程 y が生産集合 Y 内に存在するならば，このような y は明らかに有利な生産方法である。他の純産出をへらすことなく，もはやある純産出をふやすことができないとき，つまり，$y\in Y$ について

任意の $w\geqq 0$ にたいして $y+w\notin Y$

となるとき，工程 y は有効 (efficient) であるという[16]。有効工程の定義は生産集合の実行可能性を前提としているので，本源的生産要素やその価格を明示的にいう必要がない。しかし，ぎゃくに有効工程の存在をいうだけでは，その生産が実行可能であるかどうかは全くわからないということに注意を要する。

いま，このような有効点 $\hat{y}$ と「適当な価格体系」が存在するものと仮定する。「新古典派的生産」のもとで価格体系が適当であるためには，つぎのよう

15) Mckenzie, L., *loc. cit.*, pp. 66–7.

16) Mckenzie, L., "On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems", *Econometrica* 22, 1954, pp. 151–2.

なかたちで「利潤条件」と「費用条件」がみたされていなければならないだろう。

「利潤条件」 $\hat{y}\cdot p=\sum_{\xi_j>0}\pi_j\xi_j-\sum_{\xi_j<0}\pi_j\xi_j\geqq 0$

(有効点 $\hat{y}$ では利潤は負になってはならない。)

「費用条件」 $\tilde{A}p=(Bp-Ap)\leqq 0$

(価格は費用を超えてはならない。)

これら二条件は，行列表示で一括して

$[-\hat{y},\ \tilde{A}]p\leqq 0$, ただし $p>0$

とかいてよい。ところで，$y=x\tilde{A}$。費用・価格不等式 $\tilde{A}p$ の左辺に任意の $x\geqq 0$ をかければ，任意の工程 $y=x\tilde{A}$ にたいして $x\tilde{A}p=yp\leqq 0$. $y=\hat{y}$ とおけば，$\hat{y}p\leqq 0$。一方，利潤条件より $\hat{y}p\geqq 0$。ゆえに，$\hat{y}p=0$。また，任意の工程 y にたいして

$yp\leqq\hat{y}p=0.$

つまり，有効点 $\hat{y}$ と適当な価格体系 $p>0$ が存在するならば，有効点 $\hat{y}$ は「利潤極大問題」の解であり，$\hat{y}$ の与える極大利潤は 0 である。

他方，「有効点 $\hat{y}$ を含む適当な価格体系が存在する」ことをみるためには，つぎの定理をもちいればよい。この定理は，「タッカーの定理」や「分離定理」からもみちびけるが，「帰納法」によって直接に証明できる[17-a)]。

定理（タッカー）

「A を $m\times n$ 次の行列とする。もし $xA\geq 0$, $x\geqq 0$ が解 x をもたなければ，$Ap\leqq 0$, $p>0$ の解 p が存在する。」

有効点 $\hat{y}$ を含む行列 $[-\hat{y},\ \tilde{A}]$ が「定理」の仮設をみたせば，$p>0$ の存在がしたがう。そのために，適当な実数 $\lambda\geqq 0$ と m 次元行ベクトル $x\geqq 0$ にたいして，$(\lambda,\ x)\ [-\hat{y},\ A]\geq 0$ は解をもたないことを示せばよい[17-b)]。

$(\lambda,\ x)\ [-\hat{y},\ A]=v\geq 0$

17-a) Morishima, M., *Theory of Economic Growth*, 1969, p. 311.;

17-b) 二階堂，前掲書，pp. 157-9.

ならば，移項によって，$\tilde{A}x=\lambda\hat{y}+v$。両辺に $\hat{y}$ を加えて，$1+\lambda$ で割れば，

$$\frac{\hat{x}+x}{1+\lambda}\tilde{A}=\hat{y}+\frac{v}{1+\lambda}\ (\because\ \hat{y}=\hat{x}A).$$

$\dfrac{\hat{x}+x}{1+\lambda}\geqq 0$ なので，左辺は $\tilde{A}$ にもとづくひとつの工程を示す。しかるに $\dfrac{v}{1+\lambda}\geqq 0$ なので $\dfrac{\hat{x}+x}{1+\lambda}\tilde{A}\geq\hat{y}$ となって，有効点 $\hat{y}$ より有利な工程が存在するという矛盾が生じる。ゆえに，うえの不等式は解をもたない。

以上の証明は，同時的に，「y が有効点であるためには $(\lambda,\ x)\geqq 0$ を係数として $[-\hat{y},\ \tilde{A}]$ によって張られる凸多面錐 v は原点以外の正象限を含んではならない」ということも与えている。これは「無償生産の不可能性」の定義にほかならない。したがって，ぎゃくに「無償生産の不可能性」を仮定すれば，うえの「定理」の仮設がただちにしたがう。この事実をもちいれば，「有界な有効点の存在」が証明される。

定理（二階堂）

「無償生産が不可能であれば，Y 内の任意の工程 y にたいして，$\hat{y}\geqq y$ のような有効工程 $\hat{y}$ が Y 内に存在する。」[18]

証明：「無償生産の不可能性」をみたすので，うえの「定理」により，$\tilde{A}p\leqq 0$ となる $p>0$ が存在する。したがって，Y 内の任意の工程 y にたいして，$-x\tilde{A}\leqq -y,\ x\geqq 0$ の制約のもとに，$\max\ x\tilde{A}p$ を考えることができる。線型計画極大問題の解は，解が制約条件をみたすことのほかに，目的函数が上に有界であるなら，存在する。実際，$y=x\tilde{A}$ なので制約条件をみたす解が存在し，また任意の工程 y にたいして $yp\leqq 0$ が成り立つので $x\tilde{A}p\leqq 0$，つまり目的函数は上に有界である。ゆえに，極大解 $\hat{x}$ が存在する。そこで $\hat{x}\tilde{A}=\hat{y},\ u\tilde{A}=z,\ u\geqq 0$ とおき，$z\geq\hat{y}$ であると仮定する。u は制約条件 $-xA\leqq -y$ をみたすが，$zp>\hat{y}p$ から $u\tilde{A}p>\hat{x}Ap$ となり，$\hat{x}$ の最適性に矛盾。ゆえに，$\hat{y}\geqq y$ のような有効点が存在する。

「無償生産の不可能性」は，具体的にいえば，0生産以外の生産をしようとすれば経済全体で少なくともひとつの本源的生産要素の投入を要するというこ

18) 二階堂，前掲書，Ⅲ章演習問題12.

とである。この本源的生産要素を労働と考えれば，労働は経済全体にとって「弱不可欠である」ということと同じである。したがって，うえの証明の直接の系として，労働が各工程にとって直接に不可欠であるようなばあい，有効工程の存在がしたがう。

いままで，生産の有界性や有効工程の存在を示すために「本源的生産要素の存在」を仮定してきた。しかしながら，本源的生産要素を使用するばあい，果してそれらがスムースに供給されるようになっているのかという問題が生ずる。つまり，前節の記号をもちいていえば，要素需要について $S(p)$ を連続にしておかないならば「新古典派定理」は成立しない（$S(p)<0$ は需要を示す)。需要の連続性についてのもっとも簡単な仮定は，選好の連続性と凸性のほかに，「各消費単位はすべての生産要素を正の分量をもっている」という仮定である。しかし，これは「せまい」仮定である。ゲールの示唆のもとに，マッケンジーはこれとは代替的な仮定，つまり「既約経済」の仮定を提案した[19]。マッケンジーのいう「既約経済」とは，消費単位を「あるグループが他のグループの欲する任意の財を供給できない」ようなふたつのグループに分割できない経済のことである。消費単位を任意のふたつのグループ I_1 と I_2 に分割し，消費集合 X の元を x とおく。このとき，第一のグループ（I_1）のすべての人の状態を悪化させることなく，第一のグループのある人の状態を改善するために使用されうる第二のグループ（I_2）の資源 $w \in X_{I_2}$ と達成可能な $y' \in Y$ が存在するならば，経済は既約 (irreducible) であるという。ただし，$x_{I_1}'=y'-x_{I_2}-w$ で，y' と x_{I_1}' は交換後の y と x_{I_2}, $w<0$ は I_2 から I_1 への資源供給を示す[20]。

いまベクトル w を「企業者要素」であるとし，この要素たちについて経済は既約であると仮定する。このとき，「拡張された投入・産出係数行列」のも

19) ‘resource relatedness’ は類似概念である。 Arrow, K. J., and F. H. Hahn, *loc. cit.*, p. 127.

20) Mckenzie, L., “On the existence of general equilibrium: some corrections”, *Econometrica* 29, 1961, p 247.

とで $S(p)$ は連続な写像となり，「新古典派定理」は企業者要素のボトル・ネックの懸念なしに成立することがわかる。

III 再生産と労働力

前節の生産モデルでは「本源的生産要素の稀少性」が有界な生産を確定した。また，これと並行して，本源的生産要素が市場取引可能な財であるという仮定と「既約経済」の仮定とをもちいて「正の所得」も各経済単位に保証された。しかしながら，「新古典派的生産モデル」では生産の配置は価格で評価されるまえにはなにも決定されない。本節の狙いは，価格で評価される以前に成り立つ「経済循環の像」を主として単純な経済の仮定のもとで明らかにすることである。

第 i 工程 (a_i, b_i) の第 j 財について $a_{ij}<1$, $i=j$ のとき $b_{ij}=1$, $i\neq j$ のとき $b_{ij}=0$ $(i, j=1, \cdots, n)$ であるならば，経済は「単純である」という[21]。このような生産の例はレオンチェフ・モデルとして有名である。レオンチェフ・モデルでは費用にかんしてつぎの関係が成立しているだろう。労働の単位価格を w, 財 i 生産のための単位あたり必要労働投入係数を l_i とすると，財 i 生産の費用価格 p_i は，

$$p_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j+l_iw \quad (i=1, \cdots, n)$$

である。方程式は n 個あるので，もし $w=1$ とおけば，非負とはかぎらないが相対価格 $p_1/w, \cdots, p_n/w$ がきまる。しかるに，労働力は本源的生産要素であると同時に消費単位でもある。そこで，労働力1単位を1生産期間に再生産するのに必要な賃銀財バスケットを $\Omega=(\Omega_1, \cdots, \Omega_n)$ と記す。少なくともひとつの財は消費可能でなければならないから，$\Omega\geq 0$ である。とくに，

$$w=\sum_{j=0}^{n} \Omega_j p_j.$$

うえのふたつの式から w を消去すると，

$$p_i=\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}+(1-\Omega_0)^{-1}\Omega_j l_i\}p_j$$

21) Shiozawa, *loc. cit.*

を得る[22]。Ω_0 は労働力を生産するための労働をいみする。$\Omega_0>0$ であるとき，生産は労働力をも再生産する完全に閉じたものになる。本節では，$\Omega_0=0$とおく。

$\ddot{a}_{ij}=a_{ij}+\Omega_j l_i$, あるいは，$\ddot{A}=A+l\Omega$

とかき，これを「添加された投入係数」(augmented coefficient) とよぶ。レオンチェフ・モデルをはじめとする「商品による商品の生産」型のモデルは，最終需要を考慮したオープンなモデルをつくるばあいにも，稀少な本源的生産要素を導入する理由はない。たとえば，レマクの「重ね合わされた価格体系」(superponiertes Preissystem) の決定には本源的生産要素の稀少性は必要なかった[23]。他方，マルクスが強調したように，労働なくしては社会の編成はありえず，生産のいみがない。私たちは，必要ならばうえのようにして「稀少性」から切り離して労働力を扱うことができる。

さて，一般に任意の行列 A について λ と $p\neq0$ が存在して $Ap=\lambda p$ となるとき，λ を A の固有値，p を λ に属する固有ベクトルという。いま非負行列 $A\geqq0$ に同伴するつぎのようなふたつの錐 P_λ と Q_λ とを考えてみる[24]。

$P_\lambda=\{p\,|\,p\geqq0,\ Ap-\lambda p\geqq0\}$

$Q_\lambda=\{x\,|\,x\geqq0,\ xA-\lambda x\leqq0\}$

$p\geq0$ が非負行列 A の固有ベクトルであるとする。P_λ はふえることはないので，十分大きな λ にたいして P_λ は原点のみの集合しか含まない。$A\geqq0$ なので，$\lambda=0$ にたいして錐 P_λ はすべての $p\geqq0$ からなる。λ^* を P_λ が原点のみの集合になることのないような λ のなかの最大値とする[25]。もし λ^* が十分に小さければ P_{λ^*} は原点のみの集合になることはないので，$Ap^*-\lambda^*p^*\geqq0$ と

22) Schwarz, J., *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics*, 1961, p. 10.

23) Remak, R., „Kann die Volkswirtschaftslehre eine exakte Wissenschaft werden?", *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Bd. 136., 1929; 有賀，前掲論文，IV節.

24) Woodbury, Max A., "Characteristic roots of input-output matrices" in O. Morgenstern (ed.), *Economic Activity Analysis*, 1954, p. 367; Schwarz, *loc. cit.*, p. 21.

25) λ^* は A の絶対最大の固有値である。

なるような $p^*\geqq 0$ が存在する。しかし，これは λ のより大きな値については真ではない。したがって，$\lambda<\lambda^*$ なるすべての P_λ の共通集合が P_{λ^*} であることがわかる。一方，H を $\sum p_i=1$ なる超平面，つまり $H=\{p\,|\,ep=1\}$ とする。P_λ と H との共通集合は $\lambda<\lambda^*$ にたいして非空・閉・有界・単調な集合族であり，またそのような集合族の共通集合も非空なので，P_{λ^*} と H との共通集合も非空である。よって，P_{λ^*} は非空。ゆえに，P_λ のなかに $p\geqq 0$ が存在する。同様にして，錐 Q_λ のなかに $x\geqq 0$ が存在することがわかる。

さらに行列 A は非負であるうえに「既約」との仮定をおく。このとき，「フロベニウスの定理」をもちいて，つぎの定理を得る。

定理（フロベニウス）

「A を任意の既約な非負行列とする。

（a） $Ap=\lambda p$ となるような正の固有ベクトル p（定数倍を除く）と固有値 λ が一意的に存在する。

（b） $p\geqq 0,\ Ap-\lambda p\geqq 0$ ならば $\lambda\leqq\lambda^*$； $p\geqq 0,\ Ap-\lambda p\leqq 0$ ならば $\lambda\geqq\lambda^*$.」[26)]

ところで，第 i 工程が第 j 工程に連鎖をもっているならば，財 i の生産のために，需要は $j=k_v\rightarrow k_{v-1}\rightarrow\cdots\rightarrow k_1\rightarrow k_0=i$ の連鎖を通じて誘発される。もし任意の i と j について列 $\{k_0, k_1, \cdots, k_v\}$ が存在して $a_{k_0k_1}\cdot a_{k_1k_2}\cdot\cdots\cdot a_{k_{v-1}k_v}>0$ となるならば，$A\geqq 0$ は i と j の両方向への連鎖をもつ。このとき，$A\geqq 0$ は行列理論で「既約」になることがわかる[27)]。任意の財の生産に直接・間接に必要な財を「基本財」とよぶ。「既約な投入係数行列」はたしかに基本財だけの空間から構成されるが，ぎゃくに任意の係数が $a_{k_sk_{s+1}}>0$ である理由をいうことができないなら，既約な行列の存在はいえない。そこで，労働は任意の財の生産に直接・間接に必要との仮定をおく。この仮定をさきほどの「添加された投入係数行列」に代入すれば，少なくともひとつの基本財，したがってまた，既約な部分行列の存在がしたがう[28)]。

26) Woodbury, *loc. cit.*, p. 369.

27) Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory*, 1968, p. 109.

28) 塩沢由典，ピエロ・スラッファ―ひと，分配，認識，「経済セミナー」，昭和51年12月，p. 65.

さて，「単純な経済」のもとでの純生産は，つぎのようにオープンなレオンチェフ・モデルのかたちで述べられる。

$$x(I-A)=y.$$

ここで，$y \geqq 0$ は「最終需要」といってよい。$y \geqq 0$ で $A \geqq 0$ が既約であれば，「フロベニウスの定理」により $(I-A)$ は非負逆転可能な行列となって，$x=y(I-A)^{-1}$ が存在することがわかる。このばあい，$(I-A)$ の非負逆転可能性は「純生産可能条件」とみなされる。しかしながら，うえの方程式 $x(I-A)=y$ が示す生産のいみに注意を要する。この方程式によれば，ある期間内の産出量 $xI=x$ は「その期間内の最終需要 y と投入量 xA を賄うために完全に消費される」ものと考えることができる。つまり，第Ⅰ，Ⅱ節と同様に，投入と産出が同一時点で行なわれるとの仮定が含まれていると考えられる。しかし，「商品による商品の生産」型のモデルで，このような想定をすることには大きな矛盾がある。いま生産される財 i と j とが双方ともに生産のために直接ないし間接に必要であるとする。このとき，i 財生産のために必要な j 財は i 財がなければ生産できないので，投入と産出を同一時点内に封じ込めることには無理がある。実際的にみて，生産に必要な投入財がすべて非生産財（本源的生産要素）であるばあいを除き，投入と産出が同一時点内で行なわれるという仮定は不可能に近い。

これにたいして，もし今期に資本として投入される財が少なくとも1期前に生産されたものであると仮定すれば，投入財の調達におけるうえの矛盾は生じない。このような仮定を「一時点投入・一期後一時点産出」の仮定とよぶ。簡単のために，とくに「再生産の仮定」とよぶ。のちに一般のばあいについて証明を与えるが，直観的にみて「再生産の仮定」から生産の拡張には限りのあることがいえる。なぜなら，今期の投入は前期の産出を超えることができないからである（同様に，今期の投入費用は前期の収入を超えることは不可能)。この条件は，前期を $t-1$，今期を t で記せば，つぎのようになる。

$$x_i(t-1) \geqq \sum_{j=1}^{m} x_j(t)a_{ij}.$$

ここで，拡張係数を定義するためには，前期と今期の各工程の操業水準を比較可能なものとしなければならない。そのため，ノイマンにしたがい，どの工程も次期に投入をふやすものとすれば均等な率でふやすという仮定，つまり「斉一成長の仮定」をおく。

$$x(t)=\alpha x(t-1)=\alpha x.$$

このとき，再生産の実行可能条件はつぎのようにかきなおせる。

$$x-\alpha xA\geqq 0.$$

ある与えられた x のもとでは，各工程間で均等に可能な技術的拡張係数はすべての工程のなかで最小のものである。

$$\alpha(x)=\min_i \frac{x_i}{\sum x_j a_{ij}}=\min_{p\geq 0}\frac{xp}{xAp}.$$

しかし，適当な操業水準の組合せ $x\geq 0$ がえらばれるとすれば，経済全体の極大の拡張係数が定義できる[29)]。

$$\alpha(x)=\max_{x\geq 0}\ \min_{p\geq 0}\frac{xp}{xAp}.$$

すでに述べたように，$A\geqq 0$ が既約なばあい，

$$x\geq 0,\ x-\frac{1}{\lambda}xA\geq 0 \text{ ならば } \frac{1}{\lambda}\leqq\frac{1}{\lambda^*}$$

$$p\geq 0,\ p-\frac{1}{\lambda}Ap\leq 0 \text{ ならば } \frac{1}{\lambda}\geqq\frac{1}{\lambda^*}$$

であった。したがって生産が既約なとき，$x=x^*$（あるいは $p=p^*$）であれば，一意に極大の拡張係数 $\alpha(x)=\frac{1}{\lambda^*}$ がしたがう。p を価格体系と考えれば，極大利潤率 R に同伴する価格体系 p^* も一意に定まることがわかる。$\lambda^*=\frac{1}{1+R}$ とおけば，

$$p^*=(1+R)Ap^*$$

が可能になる。これ以外の価格は存在しても最小価格ではない。

結合生産を認めるばあい，xI は xB にかきかえられねばならない。再生産のためにはふつう1期以上回転している耐久資本財があるから，産出はつねに副産物として（減価した）耐久資本財を同伴する。結合生産を許容する再生産のもとでは，拡張係数の一意性は一般に生じない[30)]。しかし，「再生産の仮定」

29) Woodbury, *loc. cit.*, p. 379.

をとる以上，つねに生産の拡張係数は有界になることを示そう。

いま生産集合が閉凸錐であることのほかに $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}>0$ と $\sum_{i=1}^{m} b_{ij}>0$ とを仮定する。$\sum_{j} a_{ij}>0$ は，どの工程も少なくともひとつの経常投入ないしは資本財を操業のために消費することをいみする。$\sum_{i} b_{ij}>0$ は，各財はなんらかの工程によって「一期後に」生産されうることをいみする。両者をまとめれば，投入なしの1期後の産出はありえないという「再生産の仮定」のもとでの「無償生産の不可能性」が述べられたことになる。もちろん，これは本源的生産要素の存在とはなんの関係もない。以上の仮定のもとで，結合生産を含む一般のばあいの拡張係数をつぎのように定義する。

$\Gamma=\{\omega \mid x\geq 0$ をみたす $x(B-\omega A)\geq 0\}$

まず任意の $\omega\in\Gamma$ にたいして $\omega\leqq\dfrac{\max_i \sum_j b_{ij}}{\min_i \sum_j a_{ij}}=\theta$ が成立するので，ω は上から有界である。さらにこの ω の上界 θ は「斉次不等式の構造」からある $x\geq 0$ について $x(B-\theta A)\geqq 0$ をみたすので，ω の最大数と ω の上界 θ は一致する。$x_1=\cdots=x_m=1$ とおくと，$\sum_i b_{ij}>0$ から $\sum_i b_{ij}x_i>0$ なので，1より小さな正数 ω をとれば $x(B-\omega A)>0$。ゆえに ω は正数を含まねばならないので，ω の最大数 θ は当然正でなくてはならない。したがって，極大の拡張係数が存在するとすれば，正かつ有界である[31]。

最後に，再生産の循環が単純な生産のもとでどのように完結するかをみることによってこの稿を閉じることにしたい[32]。極大の拡張係数に同伴する最小の価格体系をつぎのように仮定する。ただし，$\ddot{A}$ は「添加された投入係数」からなる非負行列，労働はすべての工程に不可欠であるものとする ($l>0$)。

$$
\begin{aligned}
p&=(1+\pi)\ddot{A}p\\
&=(1+\pi)(A+l\Omega)p.
\end{aligned}
$$

ここで，$\Omega p=w=1$ とおけば，

30) 新古典派の結合生産は供給過剰をいみするが，この供給過剰は「無償処分の仮定」で消去可能。

31) Nikaido, *loc. cit.*, p. 146.

32) 塩沢由典，書評論文：ロンカッリア著『スラッファと経済学の革新』，「国民経済」No. 138，昭和52年，pp. 37-8 を参考にした。

$$p=(1+\pi)(Ap+l)$$

である。Ω は労働者の購入ベクトルなので労働者の予算制約は $\Omega p=1$, また $w=1$ から労働者全体の賃銀総額は $wxl=xl$ である。よって，賃銀からの購入分は $xl\Omega$ である。一方，資本家は再生産のために今期の資本 xA を補塡するだけでなく，利潤から消費することもできる。利潤1単位あたりの資本家の購入ベクトルを f とすると，資本家全体の利潤部分からの購入分は $\frac{\pi}{1+\pi}xpf=\frac{\pi}{1+\pi}xF$ である。pf は行列 F, $fp=1$ は資本家の予算制約を示す。こうして，生産物 x はすべて需要の成分であらわすことができる。

$$x=xA+\frac{\pi}{1+\pi}xF+xl\Omega.$$

もし $f=0$ ならば $x=(1+\pi)x\ddot{A}$ となるが，$\ddot{A}$ が既約ならこのとき「蓄積の黄金律」がしたがう。うえの式は x にかんして一次同次なので，たとえば一年間に x を生産するのに必要な総労働時間を1とおいてよい。前節とは相違して，けっして $\sum x_i=1$ ではないことに注意を要する。$\sum x_il_i=1$ は技術的に必要な労働力であって，稀少な労働力を反映するものではない。

$$x(I-A-\frac{\pi}{1+\pi}F)=\Omega.$$

一方，うえの価格体系と $Fp=pfp=p$ なる関係をもちいると，

$$(I-A-\frac{\pi}{1+\pi}F)p=l.$$

仮定 $l>0$ より，A が既約であるならば，括弧内の行列は非負逆転可能。ゆえに Ω と f が与えられたとき，x が存在することがわかる。

（昭和53年9月30日）