經濟論叢

第125巻　第1·2号

昭和55年1・2月

京都大學經濟學會

不確実性下における公共投資の割引率

——最適成長モデルの1つの応用——

羽　　鳥　　　茂

I 序

わたくしはこれまで公共投資の最適割引率の問題を確実性下のケースと，不確実性下のケースについて分析してきた[1]。それらの分析においては，1財，2期間の世界が想定されていたが，本稿では，4財，多期間へ分析を拡張している。4財とは，私的消費財，投資財，生活関連社会資本サービス，そして，生産関連社会資本サービスである。

さて，驚くべきことであるが，これまでの公共投資割引率を扱った文献においては公共財を明示的にモデルに導入したものはほとんどなかった。公共投資が民間投資と本質的に異なる点は，前者が公共財特性を有するアウトプットを生み出すものであるというところに存する以上，研究の現状ははなはだ不満足なものである。

したがって，本稿では効用関数の中に，個人間で分割されうる私的消費財に加えて，全ての消費者が等量消費する生活関連社会資本サービスを入れ[2]，また，民間部門の生産関数の要素として私的な資本や労働のインプットだけでなく，政府部門のアウトプットである生産関連社会資本サービスを考えることによって，モデルへの公共財の1つの導入をおこなってみた[3]。

また，多期間を扱うために最適成長のコンテクストにおいて公共投資の割引

1）拙稿〔15〕，〔16〕を参照。

2）このような私的財と公共財の区分はもちろん，Samuelson の今では古典的な論文〔9〕に基づいている。

3）このジャスティフィケーションについてはII節でおこなわれている。

率を分析した。同じように最適成長のコンテクストで公共投資を考察したものとしては，Arrow-Kurz や Pestieau らの論文があるが[4]，かれらの分析とわれわれの分析との相違点は，1つには，前述したように（公共財を含めた）多財を扱ったこと，2つには，Diamond や Sandmo らの“技術的不確実性”[5]をモデルに導入したことにある。

以下，II節で基礎的モデルを提示し，III節では，II節で定式化された最適化問題を解いて最適条件を導出する。IV節は，最適条件の経済的な解釈と，それがもつインプリケーションの検討に充てられる。最後のV節は，結びの役割を果たすものである。

II モデル

経済には，民間部門として，消費財生産部門1と投資財生産部門2があり，公共部門としては，生活関連社会資本サービスを供給する部門3と生産関連社会資本サービスを供給する部門4，の合計4部門が存在すると仮定しよう。

まず，民間の消費財生産部門1の産出量 $X^1{}_{(t)}$ は，各時点tで，

$$(1)\qquad X^1{}_{(t)}=F^1[K^1{}_{(t)},\ L^1{}_{(t)},\ K^G{}_{(t)}]\phi^1(\theta)$$

のような生産関数によって表わされるものとする。ここで $K^1{}_{(t)}$, $L^1{}_{(t)}$ は，それぞれ，この部門での時点tにおける資本ストックと労働力であり，$K^G{}_{(t)}$ は，生産関連社会資本ストックである。また，ϕ^1 と θ は，それぞれ，この部門の産出量の分布関数と分布パラメーターである。$\phi^1(\theta)$ は，時間tから独立なものと仮定する。したがって，$X^1{}_{(t)}$ は，確率変数であり，われわれは $E[\phi^1(\theta)]=1$ を仮定するので，その期待値 $E[X^1{}_{(t)}]$ は F^1 に等しい。ここでEは期待値オペレーターである（以下でも同様。）。(1)式の形での不確実性の導入は，Diamond や Sandmo らが採用した“技術的不確実性”に対応している。

次に，同じく民間の投資財生産部門2の産出量 $X^2{}_{(t)}$ は，

4) Arrow-Kurz [2], Pestieau [7]。

5) Diamond [4], Sandmo [11]。

(2)　$X^{2}{}_{(t)}=F^{2}[K^{2}{}_{(t)},\ L^{2}{}_{(t)},\ K^{G}{}_{(t)}]\,\phi^{2}(\theta)$

によって与えられるものとする。記号は (1) 式と同様に使われているが，この第2部門の生産関数の中にも第1部門で利用される生産関連社会資本ストックと等量だけの $K^{G}{}_{(t)}$ が入っていることに注意されたい。

実は，この定式化には，いくつかの難点がある。

第1に，後に述べる生活関連社会資本サービスが，すべての消費主体によって等量消費されるという Samuelson 型の純粋公共財の特徴をもつのに対応して，ここでも生産における等量のインプット $K^{G}{}_{(t)}$ という形をとっているが，通常，生産関連社会資本ストックとして考えられている道路や港湾は，生産財としてだけではなく，消費便益をもたらすものとして利用されうるということが，まず指摘されなければならない[6)]。

第2に，生産への投入過程をみるならば，インプットとして考えるべきものは，生産関連社会資本ストックそのものではなく，むしろ，それから生み出されるフローとしてのサービスであろう。さらに，道路や港湾などにみられる混雑現象を考慮する場合には，他の経済主体が同じ社会資本ストックのサービスをどれだけ利用しているかによってもアウトプット X^{i} は影響を受けるであろう。このような場合には，各経済主体の社会資本サービス使用量を S^{j} として，$X^{i}{}_{(t)}=F^{i}[K^{i}{}_{(t)},\ L^{i}{}_{(t)},\ S^{i}{}_{(t)},\ \Sigma S^{j}{}_{(t)},\ K^{G}{}_{(t)}]\,\phi^{i}(\theta)$ のような生産関数を用いることが，より現実的であろう。

このように，生産関連社会資本と生活関連社会資本とを明確に区別することは困難であるし，生産主体にとって等量のインプットだけを仮定することは，現実からかなり離れており，難点をもつ，と言えよう。

しかし，それにもかかわらず，(1)や（2）式を用いることは，1つには，分析の単純化という便宜的な理由もさることながら，生産関連，生活関連という社会資本ストックの分類（かなり恣意的な分類ではあるが。） によって，社会

6) したがって，生産関連，生活関連，という社会資本ストックの分類はかなり便宜的なものなのである。

資本の主要な特徴を明確にしたいということ，第2には，これまでの公共財の理論が主として，消費の非排除性とか等量消費とかいう形で消費あるいは効用のタームで分析がなされてきたのに対して，われわれはそれを対応する形で生産の局面に適用してみたいということに基づいている。

さて次に，公共部門の生産関数について以下を仮定する。

第3部門，第4部門の産出量をそれぞれ，$X^3_{(t)}$，$X^4_{(t)}$ とすると，

(3) $$X^3_{(t)}=F^3[K^3_{(t)},\ L^3_{(t)}]\,\phi^3(\theta)$$

(4) $$X^4_{(t)}=F^4[K^4_{(t)},\ L^4_{(t)}]\,\phi^4(\theta)$$

のような生産関数によって表わされるものとする。公共部門の産出量はいずれの部門（生活関連，生産関連部門）においても，民間部門と異なり，社会資本ストックには依存せず，おのずらの要素投入だけによってもたらされるものと仮定している。また前と同じく，ϕ^2, ϕ^3, ϕ^4 はそれぞれの部門の分布関数であり，時間 t からは独立に分布すると仮定する。さらに，各分布関数は互いに独立であり，その期待値はすべて1であるとする。すなわち，任意の i, j(i, j=1, 2, 3, 4, $i \neq j$) に対して次が成り立つ。

(5) $$E[\phi^i(\theta)\cdot\phi^j(\theta)]=E[\phi^i(\theta)]\cdot E[\phi^j(\theta)]$$

$$E[\phi^i(\theta)]=1$$

さて次に，われわれの4部門経済におけるいくつかの制約条件をさらに検討してみよう。

まず，資本財の需給については，各部門での資本財投入の合計が総資本財供給 $K_{(t)}$ に各時点 t で等しくなければならないので，

(6) $$K^1_{(t)}+K^2_{(t)}+K^3_{(t)}+K^4_{(t)}=K_{(t)}$$

が成立しなければならない。

また労働力の需給については，各時点 t での総労働供給 $L_{(t)}$ が各部門に配分されなければならないので，

(7) $$L^1_{(t)}+L^2_{(t)}+L^3_{(t)}+L^4_{(t)}=L_{(t)}$$

が成立する。

また，総資本財供給の時間変化率，すなわち，総投資は，われわれのモデルにおいて，資本減耗を無視するものとすれば，民間の投資財生産部門2のアウトプット $X^2_{(t)}$ に等しくなければならない。したがって，

(8)　$\dot{K}_{(t)}=I_{(t)}=X^2_{(t)}$

が成立する。ここで $\dot{K}_{(t)}=dK_{(t)}/dt$ であり，$I_{(t)}$ は総投資である。

また，総労働供給については，外生的に与えられる一定率nで成長するものとすれば，

(9)　$\dot{L}_{(t)}=nL_{(t)}$

が成立する。$\dot{L}_{(t)}=dL_{(t)}/dt$ である。

次に，(8)，(9)式で決められる総資本財と総労働供給の各部門間配分については，前者についてその第j部門への配分比率を α_j，後者については l_j であるとすれば，

(10)　$K^j_{(t)}=\alpha_j K_{(t)}$　　$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$

(11)　$L^j_{(t)}=l_j L_{(t)}$　　$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$

が成立する。そして，これらの配分パラメーターについては，もちろん次式が成立する。

(12)　$\Sigma_j \alpha_j=1$

(13)　$\Sigma_j l_j=1$

また，時点tにおける生産関連社会資本ストック $K^G_{(t)}$ については，第4部門のアウトプットの時点tまでの蓄積量に等しいことから，次が成立する。

(14)　$K^G_{(t)}=\int_0^t X^4_{(t)}dt$

さて最後に，各部門の各生産要素の初期時点0での賦与量が所与であるとすれば，

(15)　$K^1_{(0)}=\bar{K}^1_0,\ \ K^2_{(0)}=\bar{K}^2_0,\ \ K^3_{(0)}=\bar{K}^3_0,\ \ K^4_{(0)}=\bar{K}^4_0$

　　$L^1_{(0)}=\bar{L}^1_0,\ \ L^2_{(0)}=\bar{L}^2_0,\ \ L^3_{(0)}=\bar{L}^3_0,\ \ L^4_{(0)}=\bar{L}^4_0$

が成立する。

さて，(1)〜(4)式の生産関数がそれぞれの要素投入に関して1次同次であり，

また分布関数が規模の経済から独立であると仮定すれば，各部門の生産関数を以下のように1人当り変数のタームで表わすことができる[7]。

(1)′ $x^1_{(t)}=f^1[k^1_{(t)},\ k_g{}^1_{(t)}]\phi^1(\theta)$

(2)′ $x^2_{(t)}=f^2[k^2_{(t)},\ k_g{}^2_{(t)}]\phi^2(\theta)$

(3)′ $x^3_{(t)}=f^3[k^3_{(t)}]\phi^3(\theta)$

(4)′ $x^4_{(t)}=f^4[k^4_{(t)}]\phi^4(\theta)$

ここで $x^j_{(t)}=X^j_{(t)}/L^j_{(t)}$, $k^j_{(t)}=K^j_{(t)}/L^j_{(t)}$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ であり， $k_g{}^1_{(t)}=K^G_{(t)}/L^1_{(t)}=\int_0^t X^4_{(t)}dt/L^1_{(t)}$, $k_g{}^2_{(t)}\equiv K^G_{(t)}/L^2_{(t)}=\int_0^t X^4_{(t)}dt/L^2_{(t)}$ である。

そうすると，国民1人当りの私的消費財の消費量 $y^c_{(t)}$ は，

(16) $y^c_{(t)}\equiv X^1_{(t)}/L_{(t)}=l_1x^1_{(t)}=l_1f^1[k^1_{(t)},\ k_g{}^1_{(t)}]\phi^1(\theta)$

となる。また同じく国民1人当りの投資財 $y^I_{(t)}$ は，

(17) $y^I_{(t)}\equiv X^2_{(t)}/L_{(t)}=l_2x^2_{(t)}=l_2f^2[k^2_{(t)},\ k_g{}^2_{(t)}]\phi^2(\theta)$

である。

さらに，私的消費財で測った投資財，生活関連社会資本サービス，生産関連社会資本サービスの価格を，それぞれ， p^2, p^3, p^4 とすれば， 国民1人当りの総生産物（GNP）$y_{(t)}$ は，

(18) $y_{(t)}=y^c_{(t)}+p^2y^I_{(t)}+p^3l_3x^3_{(t)}+p^4l_4x^4_{(t)}$

となる。

次に，第1部門の雇用労働量当りの生産関連社会資本ストック $k_g{}^1_{(t)}$ は，

(19) $$k_g{}^1_{(t)}=\int_0^t(X^4_{(t)}/L^1_{(t)})dt=\frac{l_4}{l_1}\int_0^t x^4_{(t)}dt$$
$$=\frac{l_4}{l_1}\int_0^t f^4[k^4_{(t)}]\phi^4(\theta)dt$$

である。

同様に，第2部門の雇用労働量当りの生産関連社会資本ストック $k_g{}^2_{(t)}$ は，

(20) $$k_g{}^2_{(t)}=\frac{l_4}{l_2}\int_0^t f^4[k^4_{(t)}]\phi^4(\theta)dt$$

である。

7) 1次同次の生産関数がもつさまざまな性質については，例えば，佐藤〔13〕を参照。

最後に，総資本一労働比率（総資本装備率）$k_{(t)}$ は，

(21)　$k_{(t)} \equiv K_{(t)}/L_{(t)} = l_1 k^1{}_{(t)} + l_2 k^2{}_{(t)} + l_3 k^3{}_{(t)} + l_4 k^4{}_{(t)}$

である。(8)，(9)式と，この(21)式より，

(22)　$\dot{k}_{(t)}/k_{(t)} = X^2{}_{(t)}/K_{(t)} - n$

したがって，

(23)　$\dot{k}_{(t)} = y^I{}_{(t)} - nk_{(t)}$

$= l_2 x^2{}_{(t)} - n[l_1 k^1{}_{(t)} + l_2 k^2{}_{(t)} + l_3 k^3{}_{(t)} + l_4 k^4{}_{(t)}]$

となる。

以上でわれわれは，生産条件およびいくつかの制約条件について検討してみた。

次に，われわれのモデルにおける目的関数（正確には，目的汎関数）を定式化することにしよう。

時点 t における社会的効用指標を $U_{(t)}$ とし，$U_{(t)}$ は，国民1人当りの私的消費財消費量 $y^c{}_{(t)}$ と生活関連社会資本サービス供給量 $X^3{}_{(t)}$ に依存するものとする。後者の $X_{3(t)}$ については，すべての消費者が等量消費する Samuelson 的な純粋公共財の特性をもつ消費サービスであるから，1人当りに直した $X^3{}_{(t)}/L_{(t)}$ ではなく，$X^3{}_{(t)}$ そのものが社会的効用関数の中に入ることになる。したがって，$X^3{}_{(t)} = l_3 x^3{}_{(t)}$ を利用して，

(24)　$U_{(t)} = U[y^c{}_{(t)},\ l_3 x^3{}_{(t)}]$

のように社会的効用関数を書くことができる。ここで効用割引率を δ とし，δ は異なる時間についても一定の同一水準であると仮定し，無限の計画期間を想定すれば，$y^c{}_{(t)}$ と $X^3{}_{(t)}$ がそれぞれ(16)式と(3)式から確率変数であることを考慮して，われわれのモデルにおける目的関数は，社会的期待効用の割引現在価値であることになる。すなわち，

(25)　$Max\,W = \int_0^\infty e^{-\delta t} E[U(y^c{}_{(t)},\ l_3 x^3{}_{(t)})]dt$

という最適化問題を設定する。

以上から，われわれの動学的な最適化問題は結局(25)式で与えられる目的関数である社会的期待効用の割引現在価値を最大にするような消費や各部門の資本蓄積の時間径路を(1)〜(23)式の制約条件の下で求めるということに帰着する。

しかし，先にわれわれが行なった1人当り変数のタームへの変換を利用すれば，制約条件は，(23)，(16)，(17)，(3)′，(19)，(20)，(13)，(21)式と初期時点の総資本―労働比 $k_{(0)}=\bar{k}_0$ へと縮小することができる。

要約すると，われわれの最適化問題は，

(26)
$$Max\,W=\int_0^\infty e^{-\delta t}E[U(y^c{}_{(t)},\ l_3x^3{}_{(t)})]dt$$

$$\begin{aligned}
subject\ to\quad & \dot{k}_{(t)}=y^I{}_{(t)}-nk_{(t)}\\
& k_{(0)}=\bar{k}_0\\
& y^c{}_{(t)}=l_1f^1[k^1{}_{(t)},\ k_g{}^1{}_{(t)}]\phi^1(\theta)\\
& y^I{}_{(t)}=l_2f^2[k^2{}_{(t)},\ k_g{}^2{}_{(t)}]\phi^2(\theta)\\
& x^3{}_{(t)}=f^3[k^3{}_{(t)}]\phi^3(\theta)\\
& k_g{}^1{}_{(t)}=\frac{l_4}{l_1}\int_0^t f^4[k^4{}_{(t)}]\phi^4(\theta)dt\\
& k_g{}^2{}_{(t)}=\frac{l_4}{l_2}\int_0^t f^4[k^4{}_{(t)}]\phi^4(\theta)dt\\
& \Sigma_jl_j=1\\
& k_{(t)}=\Sigma_jl_jk^j{}_{(t)}
\end{aligned}$$

であり，状態変数は $k_{(t)}$，そして，制御変数は $k^1{}_{(t)}$，$k^2{}_{(t)}$，$k^3{}_{(t)}$，$k^4{}_{(t)}$ である。

III　最適条件の導出

さて，われわれの最適化問題(26)を解くために次のハミルトニアン関数を導入しよう。

(27)
$$H=\{e^{-\delta t}E[U(y^c{}_{(t)},\ l_3x^3{}_{(t)})]\}+\psi_kE[y^I{}_{(t)}-nk_{(t)}]$$

ここで ψ_k は，相状態変数（costate variable）であり，ここのコンテクストにおいては資本蓄積の影の価格と解釈しうるものである。このハミルトニアン

に，(16)，(3)′，(19)，(20)，(17)，(21)の各式を代入して，次のように，$k^1_{(t)}$，$k^2_{(t)}$，$k^3_{(t)}$，$k^4_{(t)}$ だけの関数にすることができる。すなわち，

$$(27)' \quad H=\Big\{e^{-\delta t}E\Big[U\Big(\underbrace{l_1f^1\Big[k^1_{(t)},\ \underbrace{\frac{l_4}{l_1}\int_0^t f^4[k^4_{(t)}]\phi^4(\theta)dt}_{k_g{}^1{}_{(t)}}\Big]\phi^1(\theta)}_{y^c{}_{(t)}},\ \underbrace{l_3f^3[k^3_{(t)}]\phi^3(\theta)}_{X^3{}_{(t)}}\Big)\Big]\Big\}$$

$$+\psi_kE\Big[l_2f^2\Big[k^2_{(t)},\ \underbrace{\frac{l_4}{l_2}\int_0^t f^4[k^4_{(t)}]\phi^4(\theta)dt}_{k_g{}^2{}_{(t)}}\Big]\phi^2(\theta)$$

$$-n\underbrace{\Big\{l_1k^1_{(t)}+l_2k^2_{(t)}+l_3k^3_{(t)}+l_4k^4_{(t)}\Big\}}_{k_{(t)}}\Big]$$

である。

さて，最大化の必要条件の１つは，ハミルトニアンの各 $k^j(j=1, 2, 3, 4)$ に関する偏微分がゼロになることであるから（以下では時間を示す添字 t は省略する。），

$$(28) \quad \partial H/\partial k^1=e^{-\delta t}E\Big[\frac{\partial U}{\partial y^c}\cdot l_1\cdot f^1_{k^1}\cdot\phi^1(\theta)\Big]-\psi_kE[nl_1]=0$$

を得る。ここで $f^1_{k^1}=\partial f^1/\partial k^1$ である。この式を整理すると，

$$(28)' \quad e^{-\delta t}E\Big[\frac{\partial U}{\partial y^c}f^1_{k^1}\phi^1(\theta)\Big]=\psi_kn$$

となる。

次に，

$$(29) \quad \partial H/\partial k^2=\psi_kE[l_2f^2_{k^2}\phi^2(\theta)]-\psi_kE[nl_2]=0$$

を得る。ここで $f^2_{k^2}=\partial f^2/\partial k^2$ である。これを整理すれば，

$$(29)' \quad E[f^2_{k^2}\phi^2(\theta)]=n$$

となるが，$f^2_{k^2}$ は確率変数ではないので，また $E[\phi^2(\theta)]=1$ を利用してさらに整理すれば，

$$(29)'' \quad f^2_{k^2}=n$$

が得られる。

次にまた，

(30) $$\partial H/\partial k^3=e^{-\delta t}E\left[\frac{\partial U}{\partial X^3}l_3 f^3_{k^3}\phi^3(\theta)\right]-\psi_k E[nl_3]=0$$

ここで $f^3_{k^3}=df^3/dk^3$ である。この式を整理して，

(30)′ $$e^{-\delta t}E\left[\frac{\partial U}{\partial X^3}f^3_{k^3}\phi^3(\theta)\right]=\psi_k n$$

が導びかれる。

すると，(28)′ と (30)′ とから，

(31) $$f^1_{k^1}E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]=f^3_{k^3}E\left[\frac{\partial U}{\partial X^3}\phi^3(\theta)\right]$$

が得られる。したがって，

(32) $$\frac{f^1_{k^1}}{f^3_{k^3}}=\frac{E\left[\dfrac{\partial U}{\partial X^3}\phi^3(\theta)\right]}{E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]}$$

となる。

最後に，

(33) $$\partial H/\partial k^4=e^{-\delta t}E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}l_1 f^1_{k^1_g}\phi^1(\theta)\frac{l_4}{l_1}f^4_{k^4}\phi^4(\theta)\right]$$
$$+\psi_k E\left[l_2 f^2_{k^2_g}\phi^2(\theta)\frac{l_4}{l_2}f^4_{k^4}\phi^4(\theta)\right]$$
$$-\psi_k E[nl_4]=0$$

である。ここで $f^1_{k^1_g}=\partial f^1/\partial k^1_g$, $f^4_{k^4}=df^4/dk^4$, $f^2_{k^2_g}=\partial f^2/\partial k^2_g$ である。(33)式を整理すると，

$$e^{-\delta t}f^1_{k^1_g}f^4_{k^4}E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right]+\psi_k f^2_{k^2_g}f^4_{k^4}E[\phi^2(\theta)\phi^4(\theta)]$$
$$-\psi_k n=0$$

となるが，分布関数は互いに独立であると仮定したので，上式の第2項の $E[\phi^2(\theta)\phi^4(\theta)]$ は，(5)式から1に等しい。したがって，

(33)′ $$e^{-\delta t}f^1_{k^1_g}f^4_{k^4}E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right]+\psi_k f^2_{k^2_g}f^4_{k^4}-\psi_k n=0$$

となる。

ここで(28)′を利用して $e^{-\delta t}$ を消去し，(29)″ の $n=f^2_{k^2}$ を用いると，

$$(33)'' \qquad f^1_{k^1_g} f^4_{k^4} E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right]+(f^1_{k^1}/f^2_{k^2})E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]f^{2_2}_{k_g} f^4_{k^4}$$
$$=f^1_{k^1}E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]$$

が得られる。そして，この式を $f^4_{k^4}$ について解くと，

$$(34) \qquad f^4_{k^4}=\frac{f^1_{k^1}E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]f^2_{k^2}}{f^2_{k^2}f^1_{k^1_g}E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right]+f^1_{k^1}E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]f^{2_2}_{k_g}}$$

となるが，さらに整理を行なうと，最後に次式が導びかれる。

$$(34)' \qquad f^4_{k^4}=\frac{1}{\dfrac{f^1_{k^1_g}}{f^1_{k^1}}\cdot\dfrac{E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right]}{E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]}+\dfrac{f^{2_2}_{k_g}}{f^2_{k^2}}}$$

さて，以上の最適条件(29)″，(32)，(34)′は，各時点 t で満たされなければならない，いわば静学的な条件である。われわれの4部門経済の動学的な時間径路を調べるためには，(23)式で示される資本蓄積の微分方程式とともに，次の $\psi_k(t)$ に関する微分方程式，すなわち，いわゆる canonial 方程式を検討しなければならない。

$$(35) \qquad \dot{\psi}_k=(n+\delta)\psi_k$$

この式は，最大値原理による $\dfrac{d}{dt}[e^{-\delta t}\psi_k(t)]=-\dfrac{\partial H}{\partial k}$ を計算することによって得られる。

しかし，われわれは次節で公共投資の最適割引率の議論に関連させて，これまでの分析からのインプリケーションを論じることにし，経済のより動学的な側面である，ψ_k のインプリケーションとその時間径路や，1人当り消費とか各部門の資本蓄積の最適時間径路についての検討は，以下では行なわれない。

IV 経済的解釈

前節でわれわれは最適条件を導出したが，以下の議論に必要なものだけをいま一度記せば，次の3つの式である。

$$(29)'' \qquad f^2_{k^2}=n$$

$$(32) \qquad \frac{f^1_{k^1}}{f^3_{k^3}}=\frac{E\left[\dfrac{\partial U}{\partial X^3}\phi^3(\theta)\right]}{E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]}$$

$$(34)' \qquad f^4_{k^4}=\frac{1}{\dfrac{f^1{}_{k^1{}_g}}{f^1{}_{k^1}}\cdot\dfrac{E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right]}{E\left[\dfrac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]}+\dfrac{f^2_{k^2_g}}{f^2_{k^2}}}$$

さて，この節では，これらの最適条件の経済的意味を検討し，これまでに行なわれてきた最適成長理論や公共投資論の諸成果との比較を試み，また，なんらかの政策的なインプリケーションを導出してみたい。

まず，(29)″ 式から検討してみよう。

$f^2_{k^2}$ は，民間の投資財生産部門の私的資本の期待限界生産力 $E[\partial X^2/\partial K^2]$ に等しいことは容易に示すことができるので[8]，(29)″ 式が意味していることは，

〔A〕 民間の投資財生産部門における私的資本の期待限界生産力＝労働力の成長率

ということである。このことは，均衡成長径路の中で1人当りの消費を最大にするものは，資本の限界生産力＝労働力の成長率という条件によって特徴づけられるという E. S. Phelps らの“資本蓄積の黄金律”あるいは“新古典派定理”に対応した条件である[9]。

8) (1)′ 式より，$X^1=L^1f^1\left(\dfrac{K^1}{L^1},\ \dfrac{K^g}{L^1}\right)\phi^1(\theta)$，したがって，$\dfrac{\partial X^1}{\partial K^1}=L^1f^1_{k^1}\dfrac{1}{L^1}\phi^1(\theta)=f^1_{k^1}\phi^1(\theta)$ である。ここで両辺の期待値をとって，(5)式を用いると，$E\left(\dfrac{\partial X^1}{\partial K^1}\right)=E[f^1_{k^1}\phi^1(\theta)]=f^1_{k^1}$ を得る。この導出は $f^2_{k^2}$ にも等しく妥当する。したがって，$f^2_{k^2}$ は，民間投資財生産部門における私的資本の期待限界生産力に等しい。

9) Phelps〔8〕. 新古典派定理や最適成長論のサーヴァイについては，福岡〔14〕や Burmeister-↗

次に，(32)式であるが，左辺が意味していることは，第1部門，すなわち，私的消費財生産部門における私的資本の期待限界生産力と，第3部門，すなわち，生活関連社会資本サービス生産部門における資本の期待限界生産力との比率である[10)]。また，右辺が意味していることは，生活関連社会資本サービスの期待限界効用と，1人当り消費財消費の期待限界効用との比率である。したがって，(32)式が意味していることは，

〔B〕 経済全体としてみた私的消費財部門と，生活関連社会資本サービス部門との間の生産の期待限界変形率は，生活関連社会資本サービスの消費と，私的消費財の消費との間の期待限界代替率に等しい。

最後に，(34)′式の経済的な解釈についてであるが，まず，左辺の $f^4_{k^4}$ は第4部門，すなわち，生産関連社会資本サービス生産部門の資本の期待限界生産力である。右辺の分母の $f^1_{k^1_g}$ は，第1部門，すなわち，私的消費財生産部門における生産関連社会資本の期待限界生産力であり，$f^1_{k^1}$ は同部門の私的資本の期待限界生産力であるから，$f^1_{k^1_g}/f^1_{k^1}$ は，同部門の生産関連社会資本と私的資本との間の期待限界変形率である。同様に，$f^2_{k^2_g}/f^2_{k^2}$ は，第2部門，すなわち，民間の投資財生産部門の生産関連社会資本と私的資本との間の期待限界変形率である。最後に，$E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right]$ は，(34)′式の導出過程から理解されるように，生産関連社会資本サービス部門の生産における不確実性が，私的消費財生産部門（第1部門）の要素投入である k^1_g に及ぼす影響を通じて生まれる間接的効果に基づく1人当り消費の期待限界効用であり，$E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]$ は，私的消費財生産部門の直接的な生産の不確実性に起因する1人当り消費の期待限界効用である。それゆえ，われわれは，これらの比 $E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right]/E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]$ を，複合化された1人当り消費の期待限界効用と呼ぶことにしよう。

したがって，(34)′式が意味していることは，

↘Dobell〔3〕を参照。

10) 注8を参照。

〔C〕 生産関連社会資本サービス部門における資本の期待限界生産力は，私的消費財部門におけるウエイトをつけた生産関連社会資本と私的資本との間の期待限界変形率と，民間の投資財生産部門の生産関連社会資本と私的資本との間の期待限界変形率との和の逆数に等しい。そして，付されるウエイトは，複合化された１人当り消費の期待限界効用である。

さて，ここで(34)′式，あるいは上の命題〔C〕からの１つのインプリケーションを述べてみよう。

(34)′式からすぐに理解されるように，他の条件が一定であれば，$f^1_{k^1}$ や $f^2_{k^2}$ が高ければ高いほど，また $f^1_{k^1_g}$ や $f^2_{k^2_g}$ が低ければ低いほど，$f^4_{k^4}$ は高くなければならない。

言い換えれば，民間部門において私的資本の期待限界生産力が高ければ（$f^1_{k^1}$ や $f^2_{k^2}$ が高い），それに対応して，公共部門である生産関連社会資本サービス部門の期待限界生産力は高くなければならないが，もし，生産関連社会資本が民間部門の生産における期待限界生産力に大きな経済効果をもっている（$f^1_{k^1_g}$ や $f^2_{k^2_g}$ が高い）場合には，生産関連社会資本サービス部門に要求される期待限界生産力は低くてよい，ということになる。これについては説明を必要としないであろう。

さて，(34)′式のもう１つのインプリケーションについても述べておこう。

それは，生産関連社会資本サービス部門の期待限界生産力 $f^4_{k^4}$ が，民間部門に対して課される生産関連社会資本のレンタル＝使用料金であると解釈される時には，フリーライダーその他の公共財に伴なう問題が解決されて料金の設定が実行可能となっている場合，経済全体に対して１つの安定化効果をもたらすことになるであろう，ということである。すなわち，たとえば $f^1_{k^1}$ や $f^2_{k^2}$ が高く，経済が成長していく時に，民間の第１部門，第２部門に対して，生産関連社会資本の利用に伴なう料金を高く設定することは，他の条件を一定とすれば，民間部門にとってコストの増大が引き起こされることを意味し，成長を押し下げる効果をもつことになるであろう。逆に，$f^1_{k^1}$ や $f^2_{k^2}$ が低く，低成

長の場合には，低い料金設定が成長促進の要因として働くことになるであろう。このような意味で，生産関連社会資本の利用に対する上述の料金設定は経済全体に対して１つの安定化効果をもたらすことになる。

以上でわれわれは，最適条件 (29)″, (32), (34)′ の経済的意味を検討してきたが，次に，本稿のもう１つの目的である従来の公共投資論の諸成果との比較を以下で行なってみたい。

しかし，その前に，簡単にこれまでの公共投資論での主要な課題の１つであった社会的割引率に関する議論のうち特に不確実性に関連したものを要約しておこう[11]。

まず，論争の焦点は，公共投資の割引率としてリスク因子を含んだものを採用すべきか，それとも，リスク因子を含まない割引率を採用すべきであるか，ということに関わってきたのである。

前者の主張は，だいたい次のように要約されるであろう。

(i) リスク因子を含む割引率の議論

民間投資と同じように，公共投資に対しても，リスクを割引かなければならない。なぜならば，公共部門だけがリスクを考慮せずに特別扱いすることは，そうでない場合に比べて，より高い収益率をもつ民間投資が犠牲となって過剰な公共投資への資本配分を招来し，その結果，非効率的な資源配分が生じることになるからである。したがって，公共投資の割引率は，このような理由から，民間投資のそれと同一でなければならない。そして，用いるべき割引率としては，同じような危険度をもつ民間産業の投資収益率である。

以上のようなリスクを含む割引率の採用を主張するのは， Hirshleifer や Diamond, Sandmo らの人々である[12]。

(ii) リスク因子を含まない割引率の議論

この議論には以下の２つの説があるが，共通点としては，リスクの負担に関

---

11) 詳細については，拙稿〔16〕を参照。

12) Hirshleifer 〔5〕, Diamond 〔4〕, Sandmo 〔11〕.

して公共部門は民間部門よりも優位な立場にあるので，不確実性ないしリスクを公共部門は考慮する必要がない，と考えていることが挙げられよう。

第1は，リスク・プーリング説と呼ばれるもので，政府は多数の，そして多様なプロジェクトに投資しており，民間の投資家よりもリスクをプールすることができる。それゆえに，政府の投資活動全体としてはリスクを無視することができるのである。このように主張するのは，Samuelson や Vickrey らである[13]。

第2は，公的な危険負担の議論と呼ばれるもので，公共投資に伴なうリスクが社会的に負担される（多数の納税者による負担）ときには，危険負担の総費用は小さい。したがって，政府は公共投資評価においてリスクを無視することができると考える。この説は，Arrow-Lind によるものである[14]。

さて，以上の社会的割引率の議論についての簡単な紹介と関連させて，われわれの最適条件を再検討してみよう。

まず(32)式において，私的消費財の期待限界効用と生活関連社会資本サービスの期待限界効用が同一であり，それらを生産する第1部門と第3部門が Hirshleifer や Sandmo らが仮定したように同一のリスク・クラス[15]に属する場合には，分布関数が同一，すなわち，$\phi^1(\theta)=\phi^3(\theta)$ であるから，$f^1_{k^1}$ と $f^3_{k^3}$ は等しくなる。すなわち，第1部門と第3部門の自己資本（私的資本）の期待限界生産力，あるいは，期待限界収益率は等しくなければならない。このことは，効用関数の直接的なアーギュメントである私的消費財を生産する部門と生活関連社会資本サービスを生産する部門においては，もし両部門が同一のリスク・クラスに属するとき，投資プロジェクトの割引率として同一のものを採用しなければならないことを意味している。

さらに上の結論は，公共投資の割引率として，同じような危険度をもつ民間産業の投資収益率を用いるべきだとする先述の Hirshleifer や Sandmo らの

13) Samuelson [10], Vickrey [12].

14) Arrow-Lind [1].

15) リスク・クラスの概念については，Modigliani-Miller [6] を参照。

結論と同じものであることが理解されよう。

しかし，かれらの分析は1財モデルの上に構築されており，分布関数が同一である（すなわち，同じリスク・クラスに属する）かどうかが主張の基礎になっているのに対して[16]，われわれのは分布関数だけではなくて，同一の割引率を採用すべき2つの部門が同じような消費サービスに関連したものであるかどうかということにも基づいている点でかれらのとは相違しており，われわれの分析のほうがより一般的なものである。

次に，投資財生産部門である民間の第2部門と政府の第4部門（生産関連社会資本サービス部門）の割引率の比較をおこなってみよう。

しかし，その前に，さきの生産関連社会資本の使用料金の議論と同様に，今度は $f^4_{k^4}$ を生産関連社会資本部門の用いるべき割引率として解釈するならば，他の条件を一定として，$f^1_{k^1_g}$ や $f^2_{k^2_g}$ が高ければ高いほど，すなわち，生産関連社会資本がもつ民間部門の生産への効果が高ければ高いほど，政府の投資財生産部門（第4部門）の割引率は低くてよいという結論を得ることができる。

さて，議論を戻して，Samuelson, Vickrey, Arrow-Lind らが主張した，民間投資よりも低い割引率を公共部門は用いるべきだという考えが成立する条件を (29)″ と (34)′ の比較から求めることにする。

まず，複合化された1人当り消費の期待限界効用 $E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\phi^4(\theta)\right] / E\left[\frac{\partial U}{\partial y^c}\phi^1(\theta)\right]$ を $E[U^*]$ で表わすことにしよう。

さて，民間部門において資本市場の完全性が前提され，民間部門の期待限界収益率が均等するものとすれば，$f^1_{k^1}=f^2_{k^2}=n$ であるから (34)′ 式は次のようになる。

$$(34)'' \qquad f^4_{k^4}=\frac{n}{f^1_{k^1_g}E[U^*]+f^2_{k^2_g}}$$

16) 例えば，Sandmo は，ある同質の1つの財を公共部門と民間部門がともに生産しているケースを考えており（住宅などを想起されたい），両部門が同一のリスク・クラスに属する場合，用いるべき割引率は等しくなければならないと主張するが，これはある意味で自明なことである。民間部門においてはなしえない，あるいは非効率的にしかおこなわれない生産活動を公共部門が実行するという本来の公共投資を分析する場合には，Sandmo の議論は有用なものではない。

したがって，民間投資よりも低い公共投資割引率を得るためには $f^2_{k^2}-f^4_{k^4}>0$ でなければならないので，

(35)　$$n\left(1-\frac{1}{f^1_{k^1_g}E[U^*]+f^2_{k^2_g}}\right)>0$$

がその条件である。

しかし，$n>0$ であるので，

(35)′　$$f^1_{k^1_g}E[U^*]+f^2_{k^2_g}>1$$

が成立しなければならない。

すなわち，第1部門のウエイトをつけた生産関連社会資本の期待限界生産力と第2部門の期待限界生産力の和が1より大であることが要求される。ここでウエイトはもちろん，複合化された1人当り消費の期待限界効用である。

上の(35)′式は，Samuelson, Vickrey, Arrow-Lind らの主張が成立する条件を示しているが，もし(35)′式が等号で成立する場合には，$f^2_{k^2}=f^4_{k^4}$ となり，これはこれまでの議論から理解されるように，Hirshleifer や Sandmo らの主張が成立する条件式となる。

したがって，われわれの分析は，これまでの公共投資の割引率をめぐる諸議論を統一的に把握する1つの基礎を与えるものであるということが理解されよう。

V　結　び

不確実性下における公共投資の最適割引率をめぐる論争の1つの混乱は，拙稿でも論じたように[17]，各主張がインプリシットに想定している公共投資の種類ないしタイプが相違しているところに存在している。

したがって，本稿ではこの点を考慮して，公共部門を生活関連社会資本部門と生産関連社会資本部門とに明示的に分類し，それぞれの部門の投資の割引率を対応する民間部門のそれと比較して，いくつかの結論を導いた。

17)〔16〕を参照されたい。

それらのうち特に重要と思われるものは，第1に，私的消費財の期待限界効用と，生活関連社会資本サービスの期待限界効用が同一であり，それらを生産する第1部門と第3部門が同一のリスク・クラスに属する場合には，政府の第3部門は民間の第1部門と同一の割引率を採用しなければならないということである。

第2に，投資財生産部門に関しては，民間投資よりも低い公共投資割引率を得るためには，第1部門のウエイトをつけた生産関連社会資本の期待限界生産力と，第2部門の生産関連社会資本の期待限界生産力の和が1よりも大であることが要求されるということである。

さて，以上のわれわれの分析は，完全な計画経済を想定したような規範的分析であり，実証的な民間部門の生産や投資行動については何も触れていない。

したがって，例えば，民間部門の期待限界収益率がnという(明らかに低い)労働力の成長率に等しいという保証が全くない現実の経済を考えるとき，また，現実的に，財政金融政策によって民間部門の限界収益率をnに等しくすることが不可能であることを考えるとき，われわれは民間部門が最適条件を満たしていないことを制約条件の1つに加えた，いわゆるセカンド・ベスト的な状況の設定に進まざるをえないであろう[18]。

しかし，そのようなセカンド・ベストの議論を展開するためにも本稿は理想的状況を想定した1つの基礎的分析としての有用性を持つことになろう。

最後に，本稿では公共投資の割引率に分析の焦点を合わせたために，1人当り消費や，各部門の資本蓄積の最適時間径路，資本蓄積の影の価格である ψ_k のインプリケーションやその時間径路等について明示的に解くことはできなかった。また，民間部門の市場行動とわれわれの最適条件との関連についても論じることができなかった。

これらの残された問題については，他日また改めてとり上げ，分析する機会

18)　確実性下のセカンド・ベスト状況で，公共投資の割引率を論じたものとして，拙稿[15]を参照されたい。

をもちたい。

参考文献

〔1〕 K. J. Arrow and R. C. Lind, "Uncertainty and the Evaluation of Public Investment Decisions," *A. E. R.*, 1970, pp. 364–78

〔2〕 K. J. Arrow and M. Kurz., Public Investment, The Rate of Return, And Optimal Fiscal Policy, Johns Hopkins Press, 1970

〔3〕 E. Burmeister and R. Dobell., Mathematical Theories of Economic Growth, Macmillan, 1970

〔4〕 P. Diamond, "The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty," *A. E. R.*, Sept. 1967

〔5〕 J. Hirshleifer, "Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach," *Q. J. E.*, May 1966

〔6〕 F. Modigliani and M. Miller, "The Cost of Catipal, Corporation Finance and the Theory of Investment," *A. E. R.*, June 1958

〔7〕 P. M. Pestieau, "Optimal Taxation and Discount Rate for Public Investment in a Growth Setting," *Journal of Public Economics*, 1974, pp. 217–35

〔8〕 E. S. Phelps, "The Golden Rule of Accumulation; A Fable for Growthmen," *A. E. R.*, Sept. 1961

〔9〕 P. A. Samuelson, "The Pure Theory of Public Expenditures," *Review of Economics and Statistics*, 1954

〔10〕 P. A. Samuelson, "Principles of Efficiency: Discussion," *A. E. R.*, May 1964, pp. 93–96

〔11〕 A. Sandmo, "Discount Rates for Public Investment Under Uncertainty," *A. E. R.*, 1972, pp. 287–302

〔12〕 W. Vickrey, "Principles of Efficiency: Discussion," *A. E. R.*, May 1964, pp. 88–92

〔13〕 佐藤隆三『経済成長の理論』勁草書房，昭和43年

〔14〕 福岡正夫「最適成長理論：展望」(『季刊理論経済学』昭和41年，Vol. XVI. No. 2)

〔15〕 羽鳥　茂「公共投資と社会的割引率」(『経済論叢』第120巻第1・2号，昭和52年)

〔16〕 羽鳥　茂「不確実性と公共投資―社会的割引率の決定に関して―」(『経済論叢』第122巻第5・6号，昭和53年)