

經濟論叢

第139卷 第1号

菱山泉教授記念號

献 辞	池 上 惇	
經濟表のプロブレマティーク	平 田 清 明	1
ロックにおける貨幣数量説のミクロ的基礎	根 岸 隆	22
関係レントとその分配交渉	浅 沼 萬 里	39
消費者余剰とローザンヌ学派	山 下 博	61
均斉成長の不均衡動学分析	山 谷 恵 俊	82
機械化と労働雇用	塩 沢 由 典	109
1930年代の経済学再考	伊 東 光 晴	130
資本の限界効率と使用者費用	瀬地山 敏	156

菱山 泉 教授 略歴・著作目録

昭和62年1月

京 都 大 学 經 濟 學 會

均斉成長の不均衡動学分析

山 谷 恵 俊

資本蓄積を内生的に組み入れた不均衡動学分析としては、すでに Ito [10], [11], Malinband [12], Hénin and Michel [6], [7], Azam [1], Picard [13], Hénin [5] など数々の論文が存在するが、そのうち Ito 論文は、新古典派成長理論の枠組のなかで、不均衡動学経路の存在と安定性を検討したものとして、特に注目される。

Ito は労働市場の不均衡によって区分された失業局面と過剰雇用局面の2つの小体系を貼り合わせた体系を構築し、事実上、各局面の安定条件が全体系の安定性を保証することを導びき出している。しかし、家計の貯蓄が常に有効な資本蓄積として実現するという、新古典派固有の想定をおこなっているので、財市場の不均衡は考察の域外におかれる。

それに対して、筆者はさきに [15] において、成長モデルに、労働市場の不均衡取引を導入するとともに、資本蓄積が家計の貯蓄決意のみならず、企業の投資決意にも依存すること、しかもそれが両者のうちの小さい方に制約されて決定されるという、ショートサイド原則を導入して、不均衡成長経路の存在と安定性を分析した。そこでは労働市場と財市場の双方の不均衡によって、分割される局面は4つとなる。そして各小体系の安定条件は必ずしも全体系の安定を保証するものではないが、意図される投資の利潤に対する反応が十分大きく、一時不均衡に際しての実質賃金調整が、上方にも下方にも十分弾力的であるならば、均斉成長近傍の軌道は漸近安定であることが導びき出された。

しかし、そこでは労働市場の不均衡に際しての調整が実質賃金について行われることを想定していた。一時不均衡に際しての価格調整として、これは現実

的でない。そこで本論文では、労働市場の不均衡に際しては貨幣賃金の調整が行われ、貯蓄投資の不均衡、ひいては財市場の不均衡に際しては生産物価格の調整が行われると考えて、その結果としての実質賃金率と一人当たり資本の不均衡成長経路を分析する。導かれる主要な結果は、各局面において貨幣賃金と価格の調整速度、および投資の利潤に対する反応度の間にある関係が満たれることが小体系の安定条件を構成し、しかもそれが満たれるならば、全体系における均斉成長近傍の安定性も確定するということである。

I モデル、一時均衡、および均斉成長

K を資本ストック量、 L を雇用労働量とするとき、産出量 Y は一次同次生産関数 F によって

$$(1.1) \quad Y = F(K, L)$$

のように表わされる。 F は2回微分可能と仮定される。(1.1)より

$$(1.2) \quad Y/L = F(K/L, 1) \equiv f(K/L)$$

が導かれるが、この f について

$$(1.3) \quad f(0) = 0, f(\infty) < \infty, f'(K/L) > 0, \\ f''(K/L) < 0, f'(0) = \infty, f'(\infty) = 0$$

を想定する。

そこで、各時点において K と実質賃金率 w が与えられるとき、労働需要 L_d は利潤最大化原則にもとづき決定されるとしよう。したがって、 L_d は

$$(1.4) \quad L_d = K/v(w)$$

のように表わされる。ただし v は

$$(1.5) \quad w = f(v) - v f'(v)$$

を満たさなくてはならない。これより

$$(1.6) \quad v'(w) = -1/v f''(v) > 0$$

が成立する。

他方、労働供給 L_s は一定成長率 $n (> 0)$ で増加する人口 N に等しいものと

すれば、 L_s は

$$(1.7) \quad L_s = N, \quad N/\bar{N} = n$$

のように表わされる。この際、一人当り資本ストックを k で示すならば

$$(1.8) \quad k = K/N$$

となるので、 L_s は

$$(1.7a) \quad L_s = K/k$$

と書ける。したがって労働需給の均等条件 $L_d = L_s$ は、(1.4)、(1.7a)より

$$(1.9) \quad v(w) = k$$

によって表わされる。

次に貯蓄投資の均等条件はどのように表わされるか。意図された一人当り投資量を I で示すとき、投資関数は

$$(1.10) \quad I = I(r, k)$$

のように表示されるものとし、この I について

$$(1.11) \quad I_r = \partial I / \partial r > 0, \quad I_k = \partial I / \partial k < 0$$

を仮定しよう。ただし r は期待利潤率を示すが、それは現行利潤率に等しいものと想定する。よって

$$(1.12) \quad r = [f(K/L) - w]L/K$$

である。

他方、一人当り貯蓄量 S は、平均貯蓄性向 = 限界貯蓄性向を s で示すとき

$$(1.13) \quad S = sY/N = sf(K/L)L/N$$

のように表わされる。よって貯蓄投資の均等条件 $S = I$ は

$$(1.14) \quad I(r, k) = sf(K/L)L/N$$

によって示される。

ところで労働需給の均等と貯蓄投資の均等が同時に成立する一時均衡¹⁾においては、雇用量 L について、 $L = L_d = L_s$ が成立するので、これを(1.5)、

1) 固定価格のもとで達成される労働および財の需給一致の状態を一時均衡 (temporary equilibrium) と呼ぶ。Malinbaud [12] (p. 10) 参照。

(1. 9), (1. 12), (1. 14)に考慮すれば, 一時均衡においては, $k=v, r, w$ について

$$(1. 15) \quad I(r, k) = sf(k)$$

$$(1. 16) \quad r = [f(k) - w]/k = f'(k)$$

が満たされなくてはならない。

そこでまず, (1. 15), (1. 16)を満たす k と w の存在を確かめておかなくてはならない。(1. 15), (1. 16)より

$$(1. 17) \quad I[f'(k), k] = sf(k)$$

が得られる。この式の左辺に関しては, (1. 13), (1. 11)にもとづき, $I[f'(0), 0] > 0$, $I[f'(\infty), \infty] = 0$ 。また, すべての k について

$$(1. 18) \quad dI/dk = I_k f''(k) + I_k < 0$$

となる。他方, (1. 17)の右辺を $S(k)$ で表わすとき, 明らかに

$$(1. 19) \quad dS/dk = sf'(k) > 0$$

となり, さらに(1. 3)を考慮して $S(0) = 0, 0 < S(\infty) < \infty$ 。

以上により(1. 17)の左辺を表わす I 曲線と, 右辺を表わす S 曲線を描けば, 第1図のように示され, 一意的な一時均衡の存在は明らかである。そのような均衡解を表示するのに \hat{r} を使用すれば, 一時均衡において, $\hat{w}, \hat{k}, \hat{r}$ の間に

$$(1. 15a) \quad I(\hat{r}, \hat{k}) = sf(\hat{k})$$

$$(1. 16a) \quad \hat{r} = [f(\hat{k}) - \hat{w}]/\hat{k} = f'(\hat{k})$$

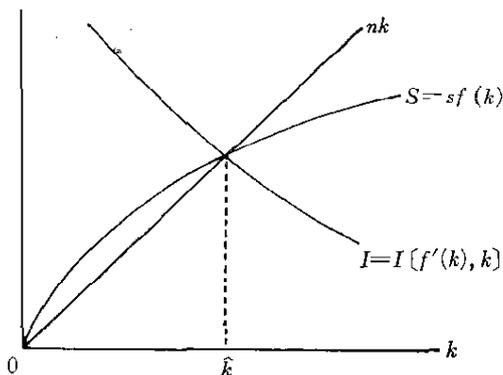
が成立する。

ところがこの解は必ずしも体系の均斉成長を保証するものではない。資本と労働さらに産出物が同一率で均衡成長(その状態を均斉成長という)するためには, $\dot{k} = 0$ が成立しなければならぬ。一時均衡の成立する k について, (1. 7), (1. 15)より

$$(1. 20) \quad \dot{k} = k(\dot{K}/K - \dot{N}/N) = k(I/k - n) = k[sf(k)/k - n] = sf(k) - nk$$

が得られる。もし \dot{k} について

$$(1. 21) \quad f(\hat{k})/\hat{k} = n/s$$



第1図

が成立するならば、(1.20)において $\dot{k}=0$ が成立し、一時均衡解は均斉成長経路に乗っていることになる。さらに、(1.3)の仮定のもとでは(1.20)を満たす k の時間経路は大域的に安定であることがわかる²⁾。そこで、ここでは均斉成長経路近傍の一時不均衡を分析することを主眼とするので、一時均衡解 (\hat{w}, \hat{k}) は均斉成長経路に乗っていると仮定する。よって \hat{k} は(1.15)、(1.16)とともに、(1.21)も満たすものとする。

II 一時不均衡と局面分割

Iで述べた一時均衡が成立するためには、一人当たり資本および実質賃金率が、それぞれ、 \hat{k} および \hat{w} に等しくなくてはならない。しかし各時点において K および N は所与であり、産出物価格および貨幣賃金率も所与（固定価格の想定）であるので、その状況下で与えられる k および w が、それぞれ、 \hat{k} および \hat{w} に等しい保証はない。 $w \neq \hat{w}$, $k \neq \hat{k}$ の少くともいづれかが生じるならば一時不均衡の状態が出現することになる。いま、そのような不均衡状態においても、

2) 第1図において、 $k > \hat{k}$ に対して $nk > sf(k)$ 、よって $\dot{k} < 0$ 。他方 $k < \hat{k}$ に対して $nk < sf(k)$ 、よって $\dot{k} > 0$ 。

ポートサイド原則にもとづき取引が行れると仮定しよう。

まず、先行の労働市場において、不均衡下の取引が需要と供給の小さい方によって実行されるとし、引続いて、現実の資本蓄積が貯蓄と投資計画の小さい方によって実現すると考えよう。それらは

$$(2.1) \quad L = \min(L_d, L_s)$$

$$(2.2) \quad \dot{K} = \min(I, S)N$$

のように記述される。当然、不均衡下においては価格調整が生じるが、それを定式化するまえに、 $w-k$ 平面 (\mathbf{R}_+^2) を不均衡の態様に依じて4つの局面に分割しよう。

労働需給の均等を表わす $L_d = L_s$ 曲線は、(1.5)、(1.9)より

$$(2.3) \quad w = f(k) - kf'(k)$$

を満たす (w, k) として表わされる。そして、明らかに、この曲線の上方では $L_d < L_s$ 、下方では $L_d > L_s$ が成立する(第2図)。

ところで(2.1)で示された取引原則と(1.4)、(1.7a)により、 K/L 、 L/N は労働需給の状態に応じて、次のように表わされる。

$$L_d < L_s \text{ のとき } K/L = v(w), L/N = k/v(w)$$

$$(2.4) \quad L_d > L_s \text{ のとき } K/L = k, L/N = 1$$

$$L_d = L_s \text{ のとき } K/L = v(w) = k, L/N = 1$$

したがって貯蓄投資の均等を表わす $S = I$ 曲線は、労働需給の不均衡状態に依存して異なる様相を呈する。

労働の超過供給の領域では、(2.4)より $K/L = v$ 、 $L/N = k/v$ ゆえ、これらを(1.13)に代入すれば

$$(2.5) \quad S = skf(v)/v$$

が得られる。したがって超過労働供給下の貯蓄投資の均等は

$$(2.6) \quad I(r, k) = skf(v)/v$$

で表わされる。ただし r は、この場合、(1.12)、(2.4)より

$$(2.7) \quad r = [f(v) - w]/v$$

によって表わされる³⁾ よって(2. 7)と(1. 5)を(2. 6)に考慮することにより

$$(2. 8) \quad I[f'(v), k] = skf'(v)/v$$

が得られる。若干の計算により

$$(2. 9) \quad \frac{dk}{dw} = \frac{I_r/v - skof(v)/f'(v)v^2}{I_k - sf(v)/v}$$

が求まる⁴⁾。ただし σ は生産関数 F における要素代替の弾力性を表わす。すなわち

$$(2. 10) \quad \sigma = -f'(v) \{f(v) - vf'(v)\} / vf(v)f''(v)$$

とする。

(2. 9)において dk/dw の分母は負であるが、分子の符号は確定しない。しかし、もし I_r について

$$(2. 11) \quad I_r > skof(v)/f'(v)v$$

が満たされるならば、 $dk/dw < 0$ となり、 $S=I$ 曲線は右下りとなる(第2図)。もちろん、(2. 11)の満たされる必然性は存在せず、不等号逆向きの場合には $S=I$ 曲線は右上りとなる。

次に超過労働需要の領域では、(2. 4)より $K/L=k$, $L/N=1$ ゆえ、(1. 13)は

$$(2. 12) \quad S = sf(k)$$

のように表わされる。そこでは

$$(2. 13) \quad v(v) < k,$$

したがって

$$(2. 14) \quad w < f(k) - kf'(k)$$

が成立する。この場合貯蓄投資の均等曲線は

$$(2. 15) \quad I(r, k) = sf(k)$$

で表わされる。ただし r は

3) $v=v(w)$ ゆえ、この領域では r は w のみの関数となり、 $dr/dw = -1/v$ 。

4) $\frac{dk}{dw} = \frac{I_r/v + skw/v^2 f''(v)}{I_k - sf(v)/v}$ と表わすこともできる。

$$(2.16) \quad r = [f(k) - w] / k$$

にしたがわねばならない。(2.15)に(2.16)を考慮してこの曲線の勾配を計算すれば

$$(2.17) \quad \frac{dk}{dw} = \frac{I_r / k}{I_r [w - f(k) + kf'(k)] / k^2 + I_k - sf'(k)}$$

が求まる。これについて(1.3), (1.11), (2.14)を考慮すれば $dk/dw < 0$ が成立する。したがって、この領域の貯蓄投資均等曲線は右下りが確定する(第2図)。

またいずれの領域においても、 $S = I$ 曲線の右下方では $S > I$, 左下方では $S < I$ が成立する⁵⁾。

このようにして (w, k) の定義域を以下の4つの局面に区分することができる。

$$R_1 \equiv \{(w, k) \in \mathbf{R}^2_+ \mid L_d \leq L_s, S \geq I\}$$

$$R_2 \equiv \{(w, k) \in \mathbf{R}^2_+ \mid L_d \geq L_s, S \geq I\}$$

$$R_3 \equiv \{(w, k) \in \mathbf{R}^2_+ \mid L_d \geq L_s, S \leq I\}$$

$$R_4 \equiv \{(w, k) \in \mathbf{R}^2_+ \mid L_d \leq L_s, S \leq I\}$$

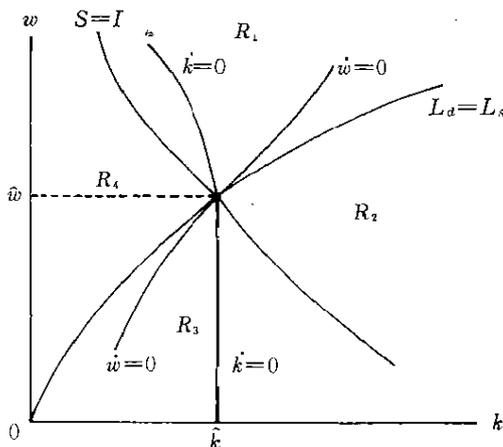
R_1 では一人当たり資本量が大きく、投資意欲が小さいために財の超過供給が存在する。そして実質賃金に比べて労働の限界生産力は低く、失業が存在している。これはケインズの失業の局面にほかならない。

次に、 R_2 では一人当たり資本量が大きいことが投資意欲を阻害しているが、実質賃金が低く、労働の限界生産力が高いので完全雇用が実現している。これは過剰資本化(overcapitalization)の局面である。

さらに R_3 では一人当たり資本量は小さく、投資誘因は大きい、財の超過需要が存在するとともに、低賃金のため完全雇用をこえる超過労働需要も存在している。これは抑圧インフレーションの局面に相当する。

最後に R_4 では、一人当たり資本量小さく、投資誘因は大きい、労働の限界

5) (2.5), (2.6), (2.12), (2.15)において $I_k < 0, S_s > 0$ より明らか。



第2図

生産力に比べて実質賃金が高く、失業が存在している。これは古典派的失業の局面にほかならない⁶⁾。

III 価格調整とワルラス均衡

ここで固定価格の想定をゆるめ、市場不均衡に際して、貨幣賃金および産出物価格の部分的市場調整が行われるものとしよう。貨幣賃金率を w_n 、産出物価格を p とするとき、労働市場および財市場の不均衡調整方程式は、それぞれ、次のように表わされるものとする。

$$(3.1) \quad \dot{w}_n/w_n = \lambda(L_d - L_s)/L_s = \lambda(k/v - 1)$$

$$L_s < L_d \text{ の場合は } \lambda = \lambda_1 > 0$$

$$L_s > L_d \text{ の場合は } \lambda = \lambda_2 > 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$(3.2) \quad \dot{p}/p = \mu(I - S)$$

$$I > S \text{ の場合は } \mu = \mu_1 \geq 0$$

6) この分類命名については Hénin [5] (p. 399) 参照。

$I < S$ の場合は $\mu = \mu_2 \geq 0$

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

そうすると、 $w = w_n/p$ ゆえ、実質賃金の調整方程式は

$$(3.3) \quad \dot{w} = w[\lambda(k/v - 1) - \mu(I - S)]$$

によって表わされる。

他方、一人当り資本の動きは、(2.2), (1.7)より

$$(3.4) \quad \dot{k} = \min(I, S) - nk$$

で示される。

(3.3), (3.4)は上述の4つの不均衡局面において互に異なる微分方程式体系として、次のように表わされることになる⁷⁾。

$$(3.5) \quad \begin{cases} \dot{w} = w\{\lambda_2(k/v - 1) - \mu_2[I(r, k) - skf(v)/v]\} \\ \dot{k} = I(r, k) - nk \end{cases}$$

$$\text{ただし } r = [f(v) - w]/v$$

$$(w, k) \in R_1$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} \dot{w} = w\{\lambda_1(k/v - 1) - \mu_2[I(r, k) - sf(k)]\} \\ \dot{k} = I(r, k) - nk \end{cases}$$

$$\text{ただし } r = [f(k) - w]/k$$

$$(w, k) \in R_2$$

$$(3.7) \quad \begin{cases} \dot{w} = w\{\lambda_1(k/v - 1) - \mu_1[I(r, k) - sf(k)]\} \\ \dot{k} = sf(k) - nk \end{cases}$$

$$\text{ただし } r = [f(k) - w]/k$$

$$(w, k) \in R_3$$

$$(3.8) \quad \begin{cases} \dot{w} = w\{\lambda_2(k/v - 1) - \mu_1[I(r, k) - skf(v)/v]\} \\ \dot{k} = skf(v)/v - nk \end{cases}$$

7) 厳密に言えば、労働が超過供給状態にあるか、超過需要状態にあるかに応じて、同じ超過供給財市場でも異なる価格調整スピードを設定すべきであろう (German [4] (p. 585))。一般的に、このような市場間の漏出 (spillover) 効果を考慮に入れた調整方程式体系を組むことも可能であるが、繁雑さを避けて、あえて単純化した体系を設定した。

$$\begin{aligned} \text{ただし } r &= [f(v) - w]/v \\ (w, k) &\in R_1 \end{aligned}$$

(3. 5)～(3. 8)のそれぞれの微分方程式体系(小体系)において、 $\dot{w} = \dot{k} = 0$ を成立せしめる体系均衡点について調べよう。

前述の均斉成長経路上の一時均衡 (\hat{w}, \hat{k}) は、いずれの小体系においても均衡点となっている。なぜならば、この一時均衡においては、 $\hat{k} = \hat{v}$, $I(\hat{v}, \hat{k}) = sf(\hat{v}) = sf(\hat{k}) = n\hat{k}$ が成立し、いずれの小体系においても $\hat{k} = \hat{w} = 0$ をもたらずからである。

問題は、このようにそれぞれの市場の需給均等が、他市場の制約をうけることなく、同時に成立する、いわゆるワルラス均衡 (\hat{w}, \hat{k}) 以外に、それぞれの小体系の均衡点(非ワルラス均衡)が存在するか、どうかということである。

R_1 についてその問題を検討しよう。 R_1 においては $v \geq k$, $S = skf(v)/v \geq I = \dot{k} + nk$ が成立するので、(3. 5)において $\dot{w} = \dot{k} = 0$ を満たす非ワルラス均衡は存在するかもしれない。

それを検討するため、(3. 5)に(1. 5)を考慮すれば、(3. 5)は

$$(3. 5a) \quad \begin{cases} \dot{w} = w[\lambda_2(k/v - 1) - \mu_2[I(f'(v), k) - skf(v)/v]] \\ \dot{k} = I[f'(v), k] - nk \end{cases}$$

のように書きなおすことができる。この(3. 5a)において $\dot{k} = 0$ 曲線の勾配を計算すると

$$(3. 9) \quad \frac{dk}{dw} = \frac{I_v/v}{I_k - n} < 0$$

となる。他方、 $\dot{w} = 0$ 曲線の勾配は、若干の計算により

$$(3. 10) \quad \frac{dk}{dw} = \frac{-[\lambda_2 k + \mu_2 I_v v^2 f''(v) + \mu_2 skw]/v^3 f''(v)}{\mu_2/v - \mu_2 I_k + \mu_2 sf(v)/v}$$

が求まる。(3. 10)の右辺の分母は正であるが、分子の符号が定まらない。そこで、もしすべての $(w, k) \in R_1$ について

$$(3. 11) \quad \lambda_2 > -\mu_2 I_v v^2 f''(v)/k$$

が満たされるならば、(3. 10)右辺の分子は正となり、 $dk/dw > 0$ が成立する。

このようにして、(3.11)が仮定されるならば、 $\dot{w}=0$ 曲線と $\dot{k}=0$ 曲線は、交わるとしても、一点でしか交らない。ところがすでに、 \dot{w} , $\dot{k}(=\dot{v})$ は(3.5a)の均衡点であることが分っているので、そのことを考慮すれば、(3.5a)の均衡点は (\dot{w}, \dot{k}) 以外には存在しないことになる。

次に R_2 については如何。この局面においては $v \leq k$, $S = sf(k) \geq I$ ゆえ、 R_2 のすべての v, k について

$$(3.12) \quad \lambda_1(k/v-1) - \mu_2[I - sf(k)] \geq 0$$

となり、 $v \neq k$ あるいは $I \neq sf(k)$ の場合、(3.12)の不等式は厳密な形で成立する。したがって、その場合(3.6)において $\dot{w}=0$ は実現しえない⁸⁾。つまりこの局面では (\dot{w}, \dot{k}) 以外の均衡は存在しない。

R_3 においては、 $v \leq k$, $I \geq S = sf(k) = \dot{k} + nk$ ゆえ、(3.7)において $\dot{w} = \dot{k} = 0$ を満たす非ワルラス均衡は存在しうる。(3.7)第2式より、 $\dot{k}=0$ 曲線は $k = \hat{k}$ なる垂直線となる(第2図)。他方、 $\dot{w}=0$ 曲線の勾配は、(3.7)第1式より

$$(3.13) \quad \frac{dk}{dw} = \frac{\lambda_1 k^2 + \mu_1 I_r v^3 f''(v)}{-v^3 f''(v) k \{ \lambda_1 / v - \mu_1 I_r [f'(k)k - f(k) + w] / k^2 - \mu_1 I_k + \mu_1 sf'(k) \}}$$

のように算出される。(2.14)を考慮すれば、この式の右辺の分母は正であるが、分子の符号は確定しない。そこで、もしすべての $(w, k) \in R_3$ について

$$(3.14) \quad \lambda_1 > -\mu_1 I_r v f''(v)$$

が成立するならば、 $\lambda_1 k^2 > -\mu_1 I_r v f''(v) k^2 > -\mu_1 I_r v^3 f''(v)$ となり、(3.13)より $dk/dw > 0$ が得られる。そのときには $\dot{w}=0$ 曲線は、第2図に示したように、右上りとなる。ところが (\dot{w}, \dot{k}) は(3.7)においても $\dot{w} = \dot{k} = 0$ を満たすので、 $\dot{w}=0$ 曲線が右上りである限り、 $\dot{k}=0$ 曲線との交点は (\dot{w}, \dot{k}) のほかには存在しない。このようにして、(3.14)のもとでは非ワルラス均衡は存在しない⁹⁾。

8) この場合 $\dot{w} > 0$ 、すなわち 実質賃金は常に上昇する。

9) もちろん (3.14) は非ワルラス均衡非存在の必要条件ではない。たとえば、すべての $(w, k) \in R_3$ について $\lambda_1 < -\mu_1 I_r v^3 f''(v) / k^2$ が成立しても、非ワルラス均衡は存在しない。この場合には $\dot{w}=0$ 曲線が (\dot{w}, \dot{k}) を通る右下りの曲線となるからである。

最後に R_4 においては, $v \geq k$, $I \geq S = skf(v)/v$ ゆえ

$$(3.15) \quad \lambda_2(k/v-1) - \mu_1[I - skf(v)/v] \leq 0$$

となり, $v \neq k$ または $I \neq skf(v)/v$ の場合, (3.15) は厳密な不等式の形で成立する。したがって, その場合, (3.8) において $\dot{w} = 0$ は満たされない¹⁰⁾。よって(3.8)において (\dot{w}, \dot{k}) 以外の均衡点は存在しない。

以上により, (3.11), (3.15)の仮定を許すならば, 4個の局面は, それぞれの調整方程式体系のもとで共通の唯一均衡点(ワルラス均衡)をもつことが判明した¹¹⁾。

IV 小体系における局面安定性

ここで(3.5)~(3.8)のそれぞれの微分方程式体系のもとでの w と k の動きを観察しよう。

(3.11)および(3.14)を仮定しない場合, w の動きが明確なのは R_2 と R_4 の局面だけである。すなわち, R_2 において w は上昇的, R_4 において w は下落的である¹²⁾。

他方, k の動きについてみれば, R_3 では(3.7)第2式より明らかなように, 均衡値 \hat{k} に対して, もし $k < \hat{k}$ ならば $\dot{k} > 0$, すなわち k は増大し, $k > \hat{k}$ ならば $\dot{k} < 0$, すなわち k は減少的である。

ところが, R_4 においては(3.8)第2式より $f(v)/v > n/s$ ならば $\dot{k} > 0$ 。他方, $w < \dot{w}$ ならば(1.5)より $v < \hat{k}$ となり, $f(v)/v > f(\hat{k})/\hat{k} = n/s$ が成立する。したがって, その場合, $\dot{k} > 0$ が導かれる。このようにして $w < \dot{w}$ のときには k は増大的である。逆に $w > \dot{w}$ ならば, 同様にして, k は減少的である。

(3.11)および(3.15)を仮定しない限り, w と k の大域的な動きについて明確なことは, 以上の通りであって, これだけではなんの確定的な結論も得られない。そこで, ワルラス均衡の近傍に限定して局所的な動きを分析しよう。

10) この場合(3.8)より $\dot{w} < 0$, すなわち実質賃金は常に下落する。

11) (3.11)や(3.15)の満たされない非ワルラス均衡については後述する(Ⅶ節参照)。

12) 注8)および注10)参照。

そのために、各局面の微分方程式体系がそれぞれあたかも全域に拡張可能であるかのようにみなして、均衡の安定性を検討することにしよう。

各局面 R_i について、 (\hat{w}, \hat{k}) において評価した(3. 5)~(3. 8)の Jacobian を $\hat{J}^{(i)}$ で表わすことにすれば、次のような計算結果を得る¹³⁾。

$$(4. 1) \quad \hat{J}^{(1)} = \begin{bmatrix} \hat{w}(\lambda_2 + \mu_2 \hat{k} \hat{f}'' \hat{I}_r + \mu_2 s \hat{w}) / \hat{k}^2 \hat{f}'' & \hat{w}[(\lambda_2 + \mu_2 s \hat{f}) / \hat{k} - \mu_2 \hat{I}_k] \\ -I_r / \hat{k} & I_k - s \hat{f} / \hat{k} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} ? & + \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$(4. 2) \quad \hat{J}^{(2)} = \begin{bmatrix} \hat{w}(\lambda_1 + \mu_2 \hat{k} \hat{f}'' \hat{I}_r) / \hat{k}^2 \hat{f}'' & \hat{w}(\lambda_1 / \hat{k} + \mu_2 s \hat{f}' - \mu_2 \hat{I}_k) \\ -\hat{I}_r / \hat{k} & \hat{I}_k - s \hat{f} / \hat{k} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ? & + \\ - & - \end{bmatrix}$$

$$(4. 3) \quad \hat{J}^{(3)} = \begin{bmatrix} \hat{w}(\lambda_1 + \mu_1 \hat{k} \hat{f}'' \hat{I}_r) / \hat{k}^2 \hat{f}'' & \hat{w}(\lambda_1 / \hat{k} + \mu_1 s \hat{f}' - \mu_1 \hat{I}_k) \\ 0 & s(\hat{k} \hat{f}' - \hat{f}) / \hat{k} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} ? & + \\ 0 & - \end{bmatrix}$$

$$(4. 4) \quad \hat{J}^{(4)} = \begin{bmatrix} \hat{w}(\lambda_2 + \mu_2 \hat{k} \hat{f}'' \hat{I}_r + \mu_1 s \hat{w}) / \hat{k}^2 \hat{f}'' & \hat{w}[(\lambda_2 + \mu_1 s \hat{f}) / \hat{k} - \mu_1 \hat{I}_k] \\ s \hat{w} / \hat{k}^2 \hat{f}'' & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} ? & + \\ - & 0 \end{bmatrix}$$

いずれの行列も(1, 1)成分の符号のみ確定しない。しかし、もし

$$(4. 5) \quad \lambda_i > -\mu_j \hat{k} \hat{f}'' \hat{I}_r \quad i=1, 2; j=1, 2$$

が満たされるならば、(1, 1)成分はいずれの $\hat{J}^{(i)}$ についても負となる¹⁴⁾。した

13) $\hat{f} = f(\hat{k})$, $\hat{f}' = f'(\hat{k})$, $\hat{f}'' = f''(\hat{k})$, $\hat{I}_r = I_r(\hat{r}, \hat{k})$, $\hat{I}_k = I_k(\hat{r}, \hat{k})$ とする。以下、同様の略記法にしたがう。

14) (4. 5) において $i=j=1$ の場合、および $i=j=2$ の場合は、それぞれ、(3. 14) および (3. 11) の特殊ケース ($v=k$) に相当する。なお、この仮定のかわりに、 R_1 については $s > \mu_2 \hat{I}_r$, R_4 については $s > \hat{I}_r \hat{f}' / \hat{f} s$ を仮定しても同様の結果が得られる。

がって、その場合には、すべての i について $\text{tr } \hat{J}^{(i)} < 0, \det \hat{J}^{(i)} > 0$ が成立する。よって、いずれの微分方程式体系も均衡点近くで局面安定¹⁵⁾である。

ところがこれは、それぞれの微分方程式体系について、それらが全域に拡張可能と仮定した議論であって、実際には、適用可能な定義域はそれぞれ一局面に限定される。ところが微分方程式体系(3. 3), (3. 4)の右辺は各局面の境界において2つの値をもち、それらが一致するとは限らない。つまり解曲線は局面転換に際して不連続となる可能性が存在する。

以下では、不連続な境界をもつ区分連続な微分方程式体系について、Filipov 解の手法を用いることにより、均衡点近傍における一意的な解曲線(軌道)の存在を検討し、あわせて全域における軌道の様相を素描する。

V 区分的線形体系の構成

均衡点近傍における解曲線の様相を観察するため、各局面の境界を均衡点における接線におきかえて、局面を凸錐化しよう。

均衡点 (\hat{w}, \hat{k}) が新たに原点となるよう座標軸を移し、新しい座標系に関する変数に対して、同じ記号を使うことにする。 R_i の原点における接錐 (tangent cone) を $\text{Co}(R_i)$ によって示すとき、各接錐の境界 B_i は

$$(5. 1) \quad B_i \equiv \text{Co}(R_i) \cap \text{Co}(R_{i+1}) \quad i=1, 2, 3, 4 \quad \text{ただし } R_5 = R_1$$

のように表わされる¹⁶⁾。

$x = (w, k)$ と表示し、それぞれの $\text{Co}(R_i)$ を定義域にもつ実数値関数 $h^{(i)}$ を次のように定義する。

$$(5. 2) \quad h^{(1)}(x) = v(w) - k$$

$$(5. 3) \quad h^{(2)}(x) = sf(k) - I(r, k)$$

$$\text{ただし } r = [f(k) - w]/k$$

15) Honkapohja and Ito [8] (p. 31) の命名による。

16) 集合 A の原点における接線ベクトルの集合の凸包を、集合 A の原点における接錐と定義する。Van den Heuvel [14] (pp. 17-18) 参照。たとえば R_1 と $\text{Co}(R_1)$ の関係は第3図のように図示される。

$$(5.4) \quad h^{(3)}(x) = k - v(w)$$

$$(5.5) \quad h^{(4)}(x) = I(r, k) - skf(v)/v$$

$$\text{ただし } r = [f(v) - w]/v$$

関数 $h^{(i)}$ の gradient を $\partial h^{(i)}(x) \equiv (\partial h^{(i)}(x)/\partial w, \partial h^{(i)}(x)/\partial k)$ で示すとき、上記接錐およびその境界は

$$(5.6) \quad Co(R_i) = \{x \mid \partial \hat{h}^{(i)} \cdot x' \geq 0, \partial \hat{h}^{(i-1)} \cdot x' \leq 0\}$$

$$(5.7) \quad B_i = \{x \mid \partial \hat{h}^{(i)} \cdot x' = 0, x \in Co(R_i)\}$$

$$i=1, 2, 3, 4 \quad h^{(0)} = h^{(4)}$$

のように表わされる¹⁷⁾。ただし $\partial \hat{h}^{(i)} \equiv \partial h^{(i)}(0)$ とする。明らかに $\bigcap_i Co(R_i) = \{0\}$, $\bigcup_i Co(R_i) = \bigcup_i R_i$ 。

そのとき(5.2)~(5.5)より

$$(5.8) \quad \partial \hat{h}^{(1)} = (-1/\hat{k}f'', -1)$$

$$(5.9) \quad \partial \hat{h}^{(2)} = (\hat{I}_r/\hat{k}, sf^i - \hat{I}_k)$$

$$(5.10) \quad \partial \hat{h}^{(3)} = (1/\hat{k}f'', 1)$$

$$(5.11) \quad \partial \hat{h}^{(4)} = (-\hat{I}_r/\hat{k} - sv\hat{w}/\hat{k}^2 f'', \hat{I}_k - sf/\hat{k})$$

が得られるので、 B_i は次のように表現することができる。

$$(5.12) \quad B_1 = \{\lambda q_1 \mid q_1 = (-\hat{k}f'', 1), \lambda \geq 0\}$$

$$(5.13) \quad B_2 = \{\lambda q_2 \mid q_2 = (\hat{I}_k - sf^i, \hat{I}_r/\hat{k}), \lambda \geq 0\}$$

$$(5.14) \quad B_3 = \{\lambda q_3 \mid q_3 = (\hat{k}f'', -1), \lambda \geq 0\}$$

$$(5.15) \quad B_4 = \{\lambda q_4 \mid q_4 = (sf/\hat{k} - \hat{I}_k, -\hat{I}_r/\hat{k} - sv\hat{w}/\hat{k}^2 f''), \lambda \geq 0\}$$

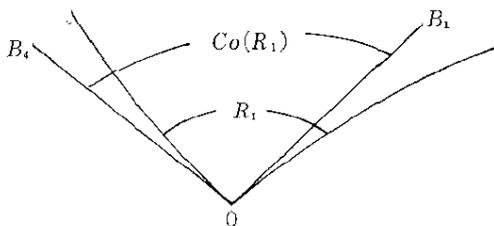
第4図は以上を図示したものである¹⁸⁾。

さて、微分方程式体系(3.5)~(3.8)を均衡点(原点)のまわりでテーラー展開し、その線形部分を貼り合わせて、次のような微分方程式体系を構成する。

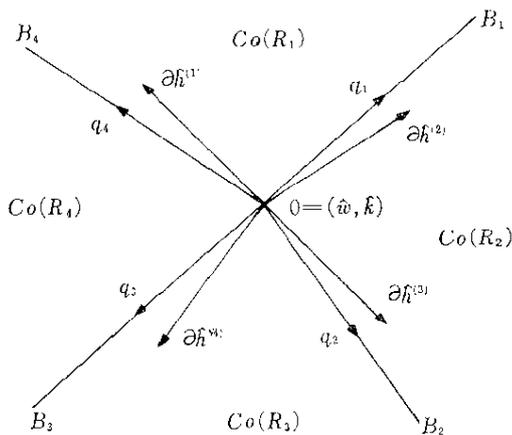
$$(5.16) \quad \dot{x}' = Jx'$$

17) ベクトル a とベクトル b の内積を $a \cdot b'$ で表示する。ただし $'$ は列ベクトルの表示。

18) 一般に $q_1 = (+, +)$, $q_2 = (-, +)$, $q_3 = (-, -)$, $q_4 = (+, ?)$ であるが、第4図は(2.11), したがって $I_r > sv\hat{w}/\hat{k}^2$ を仮定して $q_4 = (+, -)$ として描いている。当然、 $I_r < sv\hat{w}/\hat{k}^2$ のときには $q_4 = (+, +)$, よって q_4 は右上りとなる(第6図参照)。



第3図



第4図

ただし関数 J は

$$Jx' = \hat{f}^{(i)}x' \quad x \in Co(R_i) \quad i=1, 2, 3, 4$$

と定義する。

この貼り合わせ体系において、それぞれの線形領域内の解曲線の存在は明らかであるが、解曲線がそれぞれの境界にさしかかったとき、境界を横切るか、または境界上を進む一意的な経路が存在するかどうかを検討し、もし存在するとすれば、その方向を見定めなくてはならない。

そこで、この微分方程式体系の解として、いわゆる Filippov 解を適用す

る¹⁹⁾。(5.16)の貼り合わせ境界における Filippov 解は次のように解釈することができる。

ルベーク測度ゼロの集合である B_i における Jx' の値を除いて、それぞれの $Co(R_i)$ から B_i へ至るすべての x に対する Jx' の極限值を含む最小の閉じた凸集合に x が属するとき、 x を(5.16)の Filippov 解という。

この Filippov 解が各境界において一意であるための条件は、この体系について、次のように表わされる。

(a) 任意の x が $Co(R_i)$ から B_i に近づいてゆくときの Jx' の極限值に関して

$$\partial \hat{h}^{(i)} \cdot Jx' < 0$$

が成立するか

(b) 任意の x が $Co(R_{i+1})$ から B_i に近づいてゆくときの Jx' の極限值に関して

$$\partial \hat{h}^{(i)} \cdot Jx' > 0$$

が成立するか、または (a)、(b) の両方ともが成立すること²⁰⁾。

B_i において (a) のみが成立するときは、 $Co(R_i)$ から $Co(R_{i+1})$ へ B_i を横切って突入する軌道が存在し、(b) のみが成立するときは、逆に、 $Co(R_{i+1})$ から $Co(R_i)$ へ B_i を横切って突入する軌道が存在することになる。そして、 B_i において (a) と (b) の両方ともが成立するときには、軌道は境界 B_i 上をスライドして進行する²¹⁾。

VI 均斉成長近傍における解曲線の様相

この貼り合わせ体系では境界 B_i はいずれも原点からの半直線なので、上記

19) Filippov [3] (pp. 201-202), Honkapohja and Ito [8] (p. 26), Ito [9] (p. 350) 参照。

20) 局面数が2の場合には (a)、(b) を一括して $(\partial \hat{h}^{(i)} \cdot J^{(i)} x')(\partial \hat{h}^{(i)} \cdot J^{(i)} x') > 0$ と表示することができる。その場合には (a)、(b) が同時に成立することがないからである。Honkapohja and Ito [8] (p. 39), Van den Heuvel [14] (p. 36) 参照。

21) 詳しくは山谷 [15] (pp. 15-16) 参照。

一意軌道存在の条件の検討は、 B_i の代表元 q_i に対して、その両側の接錐から x が近づくときの Jx' の極限值について行えば十分である。

境界 B_1 に関しては、(4. 1), (5. 12) より

$$(6. 1) \quad \hat{J}^{(1)} q_1' = \begin{bmatrix} \mu_2 \hat{w}(s\hat{f}' - \hat{f}'' \hat{I}_r - \hat{I}_k) \\ \hat{f}'' \hat{I}_r + \hat{I}_k - s\hat{f}'/\hat{k} \end{bmatrix}$$

が得られ、これと(5. 8)より

$$(6. 2) \quad \partial \hat{h}^{(1)} \cdot \hat{J}^{(1)} q_1' = \mu_2 \hat{w}(f'' \hat{I}_r + \hat{I}_k - s\hat{f}')/\hat{k} f'' - f'' \hat{I}_r - \hat{I}_k + s\hat{f}'/\hat{k} > 0$$

が求まる。他方、(4. 2), (5. 12) より

$$(6. 3) \quad \hat{J}^{(2)} q_1' = \begin{bmatrix} \mu_2 \hat{w}(s\hat{f}' - \hat{f}'' \hat{I}_r - \hat{I}_k) \\ \hat{f}'' \hat{I}_r + \hat{I}_k - s\hat{f}'/\hat{k} \end{bmatrix}$$

が得られるが、(6. 1)と(6. 3)を比較すれば、 $\hat{J}^{(2)} q_1' = \hat{J}^{(1)} q_1'$ が成立することが分る。すなわち(5. 16)の右辺は境界 B_1 において連続である。したがって

$$(6. 4) \quad \partial \hat{h}^{(1)} \cdot \hat{J}^{(2)} q_1' = \partial \hat{h}^{(1)} \cdot \hat{J}^{(1)} q_1' > 0$$

が得られる。明らかに Filippov 解条件 (b) のみが満たされる。よって解曲線は $Co(R_2)$ から $Co(R_1)$ へと B_1 を横切る軌道を描くことになる。

B_2 に関しては、(4. 2), (5. 13) より

$$(6. 5) \quad \hat{J}^{(2)} q_2' = \begin{bmatrix} \hat{w}(\lambda_1 + \mu_2 \hat{k} \hat{f}'' \hat{I}_r)(\hat{I}_k - s\hat{f}')/\hat{k}^2 \hat{f}'' \\ + \hat{w} \hat{I}_r(\lambda_1/\hat{k} + \mu_2 s\hat{f}' - \mu_2 \hat{I}_k)/\hat{k} \\ - s\hat{w} \hat{I}_r/\hat{k}^2 \end{bmatrix}$$

となり、これと(5. 9)より

$$(6. 6) \quad \partial \hat{h}^{(2)} \cdot \hat{J}^{(2)} q_2' = \hat{w} \hat{I}_r[(s + \lambda_1/\hat{k} \hat{f}'')(\hat{I}_k - s\hat{f}') + \lambda_1 \hat{I}_r/\hat{k}]/\hat{k}^2$$

が得られる。(6. 6)右辺の正負は判定できない。他方、(5. 13)より

$$(6. 7) \quad \hat{J}^{(3)} q_2' = \begin{bmatrix} \hat{w}(\lambda_1 + \mu_1 \hat{k} \hat{f}'' \hat{I}_r)(\hat{I}_r - s\hat{f}')/\hat{k}^2 \hat{f}'' \\ + \hat{w} \hat{I}_r(\lambda_1/\hat{k} + \mu_1 s\hat{f}' - \mu_1 \hat{I}_k)/\hat{k} \\ - s\hat{w} \hat{I}_r/\hat{k}^2 \end{bmatrix}$$

が得られる。(6. 5)と(6. 7)を比較すれば、 $\hat{J}^{(2)} q_2' \neq \hat{J}^{(3)} q_2'$ ゆえ、(5. 16)右辺

は境界 B_2 において不連続となることが分る。しかし、(6. 7)と(5. 9)より

$$(6. 8) \quad \partial \hat{h}^{(2)} \cdot \hat{f}^{(3)} q_2' = \hat{w} \hat{I}_r [(s + \lambda_1 / \hat{k} f'') (\hat{I}_k - s f') + \lambda_1 \hat{I}_r / \hat{k}] / \hat{k}^2$$

が求まり、これを(6. 6)と比べれば

$$(6. 9) \quad \partial \hat{h}^{(2)} \cdot \hat{f}^{(3)} q_2' = \partial \hat{h}^{(2)} \cdot \hat{f}^{(2)} q_2'$$

が成立するので、 $\partial \hat{h}^{(2)} \cdot \hat{f}^{(2)} q_2'$ と $\partial \hat{h}^{(2)} \cdot \hat{f}^{(3)} q_2'$ は、符号は不明であるが、同符号であることが分る。したがって、Filippov 解条件 (a), (b) のいずれか一方のみが満たされる。

(6. 6)について計算すれば分るように、もし λ_1 の大きさについて

$$(6. 10) \quad \lambda_1 < s \hat{k} f'' (s f' - \hat{I}_k) / (\hat{I}_k - s f' + f'' \hat{I}_r)$$

が満たされるならば、(6. 9)は負となり、Filippov 解条件 (a) のみが満たされることになるので、境界 B_2 において解曲線は $Co(R_2)$ から $Co(R_3)$ への横断軌道となる。ところが(6.10)における不等号が逆向きのおきには、(6. 9)は正となり²²⁾、Filippov 解条件 (b) のみが満たされることになるので、 $Co(R_3)$ から $Co(R_2)$ へと B_2 を横断する解曲線が描かれる。

次に B_3 に関しては、(4. 3), (5. 14)より

$$(6. 11) \quad \hat{f}^{(3)} q_3' = \begin{bmatrix} \mu_1 \hat{w} (\hat{f}'' \hat{I}_r - s f' + \hat{I}_k) \\ s \hat{w} / \hat{k} \end{bmatrix}$$

となる。これと(5. 10)より

$$(6. 12) \quad \partial \hat{h}^{(3)} \cdot \hat{f}^{(3)} q_3' = \mu_1 \hat{w} (\hat{f}'' \hat{I}_r - s f' + \hat{I}_k) / \hat{k} \hat{f}'' + s \hat{w} / \hat{k} > 0$$

が得られる。他方、(4. 4), (5. 14)より

$$(6. 13) \quad \hat{f}^{(4)} q_3' = \begin{bmatrix} \mu_1 \hat{w} (\hat{f}'' \hat{I}_r - s f' + \hat{I}_k) \\ s \hat{w} / \hat{k} \end{bmatrix}$$

が得られ、これと(6. 11)を比較すれば、 $\hat{f}^{(4)} q_3' = \hat{f}^{(3)} q_3'$ が分る。よって(5. 16)右辺は B_3 において連続である。当然

$$(6. 14) \quad \partial \hat{h}^{(3)} \cdot \hat{f}^{(4)} q_3' = \partial \hat{h}^{(3)} \cdot \hat{f}^{(3)} q_3' > 0$$

が成立する。ここに Filippov 解条件 (b) のみが満たされるので、 $Co(R_4)$

22) 事実上、 $\lambda_1 > -s \hat{k} \hat{f}''$ ならば (6. 9) は正となる。

から $Co(R_3) \rightarrow B_3$ を横断する一意軌道が存在することになる。

最後に B_4 に関して同様の計算をする。(4. 4), (5. 15)より

$$(6. 15) \quad \hat{J}^{(4)} q_4' = \begin{bmatrix} \hat{w}(\lambda_2 + \mu_1 \hat{k} f'' \hat{I}_r + \mu_1 s \hat{w})(s f / \hat{k} - \hat{I}_k) \\ -\hat{w}[(\lambda_2 + \mu_1 s f) / \hat{k} - \mu_1 \hat{I}_k] (\hat{I}_r / \hat{k} + s \hat{w} / \hat{k}^2 f'') \\ s \hat{w}(s f / \hat{k} - \hat{I}_k) / \hat{k}^2 f'' \end{bmatrix}$$

が得られ、これと(5. 11)より

$$(6. 16) \quad \partial \hat{h}^{(4)} \cdot \hat{J}^{(4)} q_4' = \lambda_2 \hat{w} (\hat{I}_r / \hat{k} + s \hat{w} / \hat{k}^2 f'')^2 / \hat{k} \\ + \lambda_2 \hat{w} (s f / \hat{k} - \hat{I}_k) (-\hat{I}_r / \hat{k} + s \hat{w} / \hat{k}^2 f'') / \hat{k}^2 f'' - s \hat{w} (s f / \hat{k} - \hat{I}_k)^2 / \hat{k}^2 f''$$

が求まる。(6. 16)右辺の符号は確定しない。他方(4. 1), (5. 14)より

$$(6. 17) \quad \hat{J}^{(1)} q_4' = \begin{bmatrix} \hat{w}(\lambda_2 + \mu_2 \hat{k} f'' \hat{I}_r + \mu_2 s \hat{w})(s f / \hat{k} - \hat{I}_k) / \hat{k}^2 f'' \\ -\hat{w}[(\lambda_2 + \mu_2 s f) / \hat{k} - \mu_2 \hat{I}_k] (\hat{I}_r / \hat{k} + s \hat{w} / \hat{k}^2 f'') \\ s \hat{w}(s f / \hat{k} - \hat{I}_k) / \hat{k}^2 f'' \end{bmatrix}$$

が得られる。(6. 15)と(6. 17)を比較すれば、 $\hat{J}^{(4)} q_4' \neq \hat{J}^{(1)} q_4'$ かが分る。したがって(5. 16)右辺は B_4 において不連続となる。しかし、(6. 17)と(5. 11)より、若干の計算を経て

$$(6. 18) \quad \partial \hat{h}^{(4)} \cdot \hat{J}^{(1)} q_4' = \partial \hat{h}^{(4)} \cdot \hat{J}^{(4)} q_4'$$

の成立が導かれる。したがって $\partial \hat{h}^{(4)} \cdot \hat{J}^{(4)} q_4'$ と $\partial \hat{h}^{(4)} \cdot \hat{J}^{(1)} q_4'$ は同符号となるので、Filippov 解条件の (a) と (b) のいずれか一方のみが満たされる。そこでもし、 I_r の大きさについて

$$(6. 19) \quad I_r > s \hat{w} / f'$$

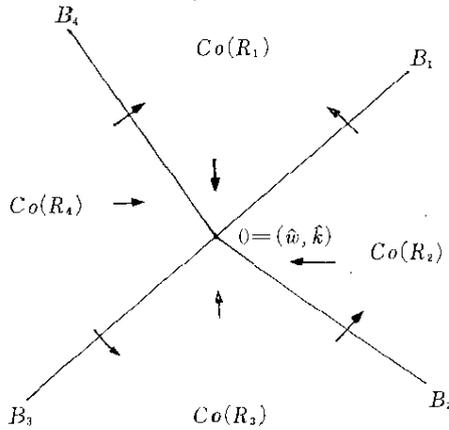
が成立するならば²³⁾、(6. 16)より(6. 18)は正の符号をもつことになり、解曲線は B_4 において $Co(R_1)$ から $Co(R_4)$ への横断軌道となる。

いまや、境界における解曲線の動きとIVの小体系動学を結合することによって、均衡点近傍の解曲線の様相を明らかにすることができる。

各種不均衡に際して、貨幣賃金と価格の調整速度および投資の利潤に対する

23) (6. 19)は(2. 11)の特殊ケース ($v = \hat{k}$) にほかならない。

反応度の間、(4. 5)によって示したような関係がどの局面についても成立し、そのうえ、特に労働の超過需要に際しての貨幣賃金調整速度に関して(6. 10)が成立し、さらに、投資の利潤に対する反応度が(6. 19)で示したような大きさを保つならば、均衡点近傍の解曲線の様相は第5図のように描かれる。明らかに均衡点は局所的に安定である。この場合、 $Co(R_3)$ は、ひとたび軌道が入ればそこから抜け出せない、いわゆる牽引集合 (strongly attractive set)²⁴⁾となっている。

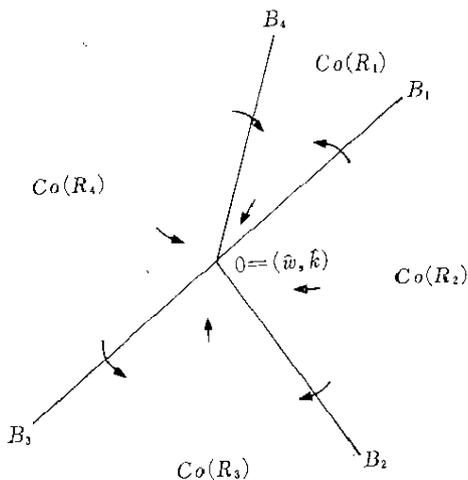


第5図

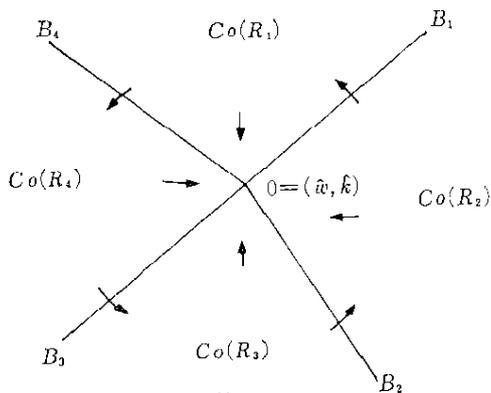
しかし、(6. 10)および(6. 19)は安定のための必要条件ではない。(6. 10)のもとで(6. 19)が非成立とすると、 B_4 の横断軌道が $Co(R_4)$ から $Co(R_1)$ へと、第5図の場合と逆向きになる可能性が生じるけれども、均衡点の安定性は保存される。このときには $Co(R_3)$ のみならず $Co(R_1)$ も牽引集合となる(第6図)。

次に(6. 19)のもとで、(6. 10)における不等号が逆向きのときには、均衡点近傍の解曲線は第7図のような様相を呈する。この場合には反時計回りの発散スパイラルが発生する可能性があるようにみえる。しかし、(6. 4)、(6. 14)、

24) Eckalbar [2] (pp. 379-380) 参照。



第6図



第7図

(6.18)より

$$(6.20) \quad \partial \hat{h}^{(i)} \cdot J^{(i)} q_i' \leq \partial \hat{h}^{(i)} \cdot J^{(i+1)} q_i' \quad i=1, 2, 3, 4$$

が成立しているので、Van den Heuvel の定理²⁵⁾によって、原点 (均衡点) の

25) Van den Heuvel [14] (p. 38, Theorem 2.38) 参照。本稿の $\partial \hat{h}^{(i)} \cdot J^{(i)} q_i'$ が同定理中の $E_i(q_i)$ に相当する。ただし、同定理中の 2) および 3) の不等式は、それぞれ、 $E_i(q_i)E_{i+1}(q_i) > 0$, および $E_i(q_i) \leq E_{i+1}(q_i)$ と書き改めなくてはならない。

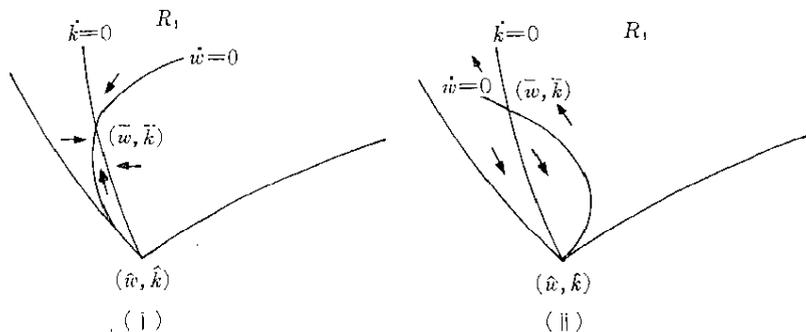
漸近安定が保証されている²⁶⁾。

以上により、均斉成長をあらゆるワルラス均衡点は、(4, 5)の仮定のもとで、局所的に漸近安定であることが判明した。

VII 非ワルラス均衡について

IIIにおいて(3.11)および(3.14)を仮定するならば非ワルラス均衡が存在しないことを論じた。当然、これらの仮定を取り除いたときには、非ワルラス均衡が存在する。そこで、本節において、どのような非ワルラス均衡が存在するか、また、その均衡は安定であるか否かについて検討して、これまでの議論の補論とする。

すでにIIIにおいて明らかにしたように、存在しうる非ワルラス均衡は R_1 と R_2 の2局面に限られる。すなわち、ケインズ均衡とインフレーション均衡である。



第8図

まず R_1 において(3.11)を仮定しないとき、起りうべきケインズ均衡としては、第8図(i), (ii)の2つの型が考えられる²⁷⁾。 $\dot{k}=0$ 曲線と $\dot{w}=0$ 曲線の交点 (\bar{w}, \bar{k}) がケインズ均衡点を表わす。 $\dot{w}=0$ 曲線の勾配を定める(3.10)に関して、

26) (6.10), (6.19), (6.19)の双方とも非成立の場合には、第6図において、 B_2 の横断軌道が逆向きになるだけで、均衡点近傍の安定性は保存される。

27) もちろん(i), (ii)が同一図に合成されるような複数のケインズ均衡も存在しうる。

(i)においては $dk/dw \geq 0$ が成立し、(ii)においては $dk/dw < 0$ が成立する。

ケインズ均衡点の近傍における安定性を調べるために、 (\bar{w}, \bar{k}) において評価した(3. 5)の Jacobian を計算しよう。直ちに

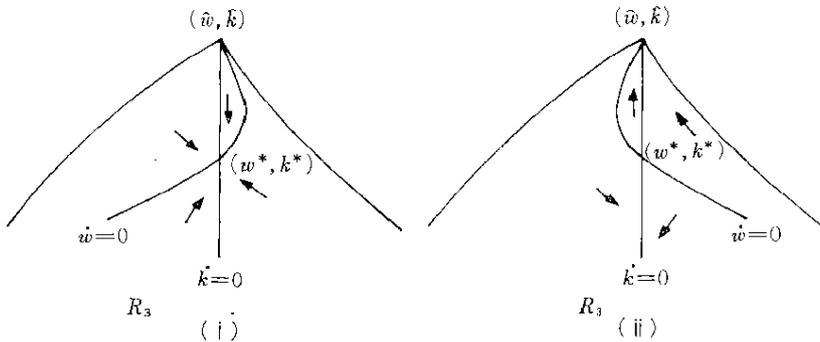
$$(7. 1) \quad \bar{J}^{(w)} = \begin{bmatrix} \bar{w}[\lambda_2 \bar{k} + \mu_2 \bar{I}_k \bar{v}^3 f''(\bar{v})] & \bar{w}[\lambda_2 - \mu_2 \bar{I}_k \bar{v} + \mu_2 s f(\bar{v})]/\bar{v} \\ + \mu_2 s \bar{k} \bar{w}]/\bar{v}^3 f''(\bar{v}) & \\ -\bar{I}_r/\bar{v} & \bar{I}_k - n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & + \\ - & - \end{bmatrix}$$

が算出される。これと(3. 10)を比較すれば

$$\text{Sig.}[\bar{J}^{(w)} \text{ の } (1, 1) \text{ 成分}] = -\text{Sig.} \frac{dk}{dw} \quad (3. 10)$$

が成分することが分る。よって、第8図(i)の場合には $\bar{J}^{(w)}$ の(1, 1)成分 < 0 。したがって、(7. 1)において $\text{tr } \bar{J}^{(w)} < 0, \det \bar{J}^{(w)} > 0$ が成立するので、 (\bar{w}, \bar{k}) は漸近安定である。これに対して(ii)の場合には、位相図手法により、 (\bar{w}, \bar{k}) は不安定となる。

次に R_3 において、(3. 14)を仮定しないとき、起りうべきインフレーション均衡としては、第9図(i)、(ii)の2つの型が考えられる。 (w^*, k^*) がインフレーション均衡点を表わす。



第9図

(w^*, k^*) において評価した(3. 7)の Jacobian は

$$(7. 2) \quad J^{(3)*} = \begin{bmatrix} \frac{w^*[\lambda_1 k^* + \mu_1 I_r^* v^{*2} f''(v^*)]}{v^{*3} f''(v^*)} & w^*[\lambda_1/v^* - \mu_1 I_k^* + \mu_1 s f'(k^*)] \\ 0 & s f'(k^*) - n \\ - \begin{bmatrix} ? & + \\ 0 & - \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

となる²⁸⁾。

そこで $J^{(3)*}$ の(1, 1)成分と(3. 3)を比較すれば²⁹⁾

$$\text{Sig.}[J^{(3)*} \text{ の(1, 1)成分}] = -\text{Sig.} \frac{dk}{dx} \quad (3. 13)$$

が分る。したがって第9図(i)の場合は $J^{(3)*}$ の(1, 1)要素 < 0 。よって(7. 2)において $\text{tr } J^{(3)*} < 0$, $\det J^{(3)*} > 0$ が得られるので, (w^*, k^*) は漸近安定である。それに対して, (ii)の場合には, 位相図手法により, (w^*, k^*) は不安定となる。

(1986・9・5 拙筆)

参考文献

- [1] Azam, J. P., "Money, Growth and Disequilibrium", *Economica*, Vol. 50, No. 199, Aug. 1983, pp. 325-35.
- [2] Eckalbar, J. C., "The Stability of Non-Walrasian Processes: Two Examples", *Econometrica*, Vol. 48, No. 2, Mar. 1980, pp. 371-86.
- [3] Filippov, A. F., "Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side", *Mat. Sb.* 51 (1960), pp. 99-128, [English Translation Amer. Math. Soc. Trans. Series 2, 42, 1964, pp. 199-231].
- [4] German, I., "Disequilibrium Dynamics and the Stability of Quasi-Equilibria", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. C, Issue 3, Aug. 1985, pp. 571-96.
- [5] Hénin, P. Y., *Macrodynamics: Fluctuations and Growth*, 1986.
- [6] Hénin, P. Y. and PH. Michel, "Harroddian and Neoclassical Paths in a Con-

28) $J^{(3)*}$ の(2, 2)成分の符号は次のようにして決定される。(1.12) および $k^* = \hat{k}$ より $s f'(k^*) - n = -s[f(\hat{k}) - \hat{k} f'(\hat{k})]/\hat{k}$ 。他方, R_0 の内点においては $k > v$ となっていることと(2.14)より $w^* < f(\hat{k}) - \hat{k} f'(\hat{k})$ 。よって $s f'(k^*) - n < -s w^*/\hat{k} < 0$ 。

29) $k^* = \hat{k} = \hat{v}$ に注意。

- strained Growth Model”, *Economic Letters*, 10, 1982, pp. 237-42.
- [7], “A Dual Decision Approach to Disequilibrium Growth”, *Oxford Economic Papers*, Vol. 37, No. 3, Sep. 1985, pp. 353-61.
- [8] Honkapohja, S. and T. Ito, “Stability with Regime Switching”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 29, No. 1, Feb. 1983, pp. 22-48.
- [9] Ito, T., “A Filippov Solution of a System of Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides”, *Economic Letters*, 4, 1979, pp. 349-54.
- [10], “Disequilibrium Growth Theory”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 23, No. 3, Dec. 1980, pp. 380-409.
- [11] 伊藤隆敏「不均衡の経済分析」, 昭和60年。
- [12] Malinvaud, E., *Profitability and Unemployment*, 1980.
- [13] Picard, P., “Inflation and Growth in a Disequilibrium Macroeconomic Model”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 30, No. 2, Aug. 1983, pp. 266-97.
- [14] Van den Heuvel, P., *The Stability of a Macroeconomic System with Quantity Constraints, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 1983.
- [15] 山谷恵俊, 不均衡成長試論, 「大阪府立大学経済研究」, 第31巻第2号, 昭和61年3月, 1-23ページ。