氏　　　　名　三　好　利　昇（みよし　としのり）

学位(専攻分野)　博　　士（情 報 学）

学 位 記 番 号　情　博　第　253　号

学位授与の日付　平 成 19 年　3　月 23 日

学位授与の要件　学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当

研究科・専攻　情 報 学 研 究 科 複 雑 系 科 学 専 攻

学位論文題目　準線型 Keller‐Segel 方程式系の時間局所解および時間大域解の存在と一意性

論文調査委員　（主　査）教 授 磯　　祐 介　　教 授 木 上　　淳　　助教授 日 野 正 訓

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では，細胞性粘菌の走化性による集合体形成をモデル化した Keller‐Segel 型の偏微分方程式を取り上げ，特に方程式に現れる拡散係数および応答関数がともに密度に依存する準線型系モデルに焦点を絞り，その時間局所解の存在と一意性および時間大域解が存在するための一つの十分条件を与えた。

細胞性粘菌は栄養が豊富な環境下では単細胞生物として振る舞うが，飢餓状態になると化学物質（cAMP）を分泌し，個々の細胞がその化学物質の濃度が高い方向へ移動することにより多細胞的集合体を形成することが知られている。この現象を記述した数理モデルが，1970年代に Keller と Segel により偏微分方程式として提唱されているが，これは細胞性粘菌の密度ならびに cAMP を含む複数の化学物質の濃度に対応する未知関数からなる反応拡散方程式系となっている。その後，Nanjundiah により簡略化モデルの提案が行なわれ，近年までの走化性粘菌の数理モデルとしてはこの簡略モデルの解析が主流であった。これに対し，本研究では Keller‐Segel の原モデルに沿った非線型性の強いモデルを採用し，空間次元も一般化して解析を行なった。

Nanjundiah の簡略化モデルでは拡散係数が定数で応答関数が線型になっているが，これに対して Nanjundiah は空間 2 次元では有限時間で解が爆発し，またその爆発時刻においては空間的にデルタ関数的な漸近挙動を示す非負解が存在することを予想した。その後，Childress と Percus は，爆発解の存在とその漸近挙動が空間次元と細胞の密度に依存することを指摘した。またここでは空間 1 次元の場合には時間大域解が存在して解は爆発せず，空間 2 次元の場合には，初期細胞密度がある閾値よりも大きい場合にのみデルタ関数的な漸近挙動を示す爆発解が存在し，さらに空間 3 次元の場合には細胞の密度に依存することなくそのような爆発解が存在することとが予想されている。数学的にも，空間 1 次元の場合には時間大域な解の存在が示され解の爆発は起らない。空間 2 次元の場合には，初期細胞密度がある閾値よりも小さい場合には解の爆発は起らず時間大域解の存在が示される一方，有限時間で爆発するデルタ関数的な漸近挙動を示す特解の存在が証明されている。また，空間 3 次元以上の場合には，細胞の密度に関わりなく，有限時間で爆発する解が存在することが示されている。

近年は Keller‐Segel による原モデルの解析が数学では人口に膾炙され，特に空間次元の一般化や，拡散係数および応答関数が密度依存となる一般化が注目を受けてその解析が進んでいる。2005年に D. Horstmann は拡散係数は定数の場合に応答関数が細胞密度依存する場合を考察し，時間大域解の一意的な存在のための十分条件を特徴づけた。また T. Senba と T. Suzuki は，2006年に拡散係数の密度依存が線型の場合に，応答関数の密度依存が一般な場合の解析を行なっている。

このような状況下で，本論文では，これまでは未解決であった，拡散係数と応答関数の両方の細胞密度依存が一般の場合を考察し，時間大域解の一意的存在を証明した。

まずはじめに適切な函数空間を導入し，T. Senba と T. Suzuki の手法を精密に検討することから縮小写像の原理により時間局所解の存在と一意性の証明を与えた。この上で，一般の非線型関数である拡散係数と応答関数の漸近挙動についての仮定の上で，有界な時間大域解の一意的な存在のための一つの十分条件を与えた。主定理は Moser の方法を改良することに

よって証明が与えられている。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

申請者の学位申請に係る研究は，細胞性粘菌の飢餓期における集合体形成を記述する Keller - Segel 型モデルを一般化した偏微分方程式に対し，初期値問題に対する解の存在と一意性を数学解析の視点から論じている。このモデルは1970年代に Keller と Segel により提唱されたものであるが，本研究においては生物モデルという制約を一旦緩め，一般次元において濃度依存が一般的な場合の拡散係数と応答関数に対する場合を解析し，当該方程式に対する新たな成果を示すことにより Keller - Segel 型モデルの数学解析に対する新たな知見を与えている。

一般次元において，拡散係数と応答関数の両方が一般的な密度依存の場合の Keller - Segel 型方程式については，例えば A. Yagi による時間局所解の存在と一意性に関する議論を，そのままの形で修正して適用することは不可能と考えられる。このため，解の存在と一意性を議論する上で，申請者は2006年の T. Suzukiと T. Senba の結果を精密に検討し，その上で Suzuki - Senba の段階では未解決であった拡散係数と応答関数の両方が密度依存である一般の場合の初期値問題を論じ，時間局所解ならびに時間大域解の存在と一意性に対して肯定的な回答を与えている。T. Suzuki と T. Senba の解析では拡散係数の密度依存は極めて強い制約を受けていたが，申請者の研究ではこの仮定は大きく緩められ，一般の非線型問題として論じられている点が評価される。ここでは，集中効果の応答関数と拡散を競争させるための漸近的な仮定がおかれ，また時間大域解の存在では用いられる数学的手法に起因する初期条件に対するある仮定が必要となるが，この条件は生物モデルでは自動的に満されている。得られた成果は近年の研究と比較した場合にも優れたものとなっている。

得られた成果のモデル論的解釈は，申請論文で特徴づけられた条件下では解の爆発が起らないことを保証し，細胞性粘菌の飢餓期における集合体形成が生じない場合の一つの十分条件とも解釈される。得られた数学的な成果は当該方程式に対する未解決問題の回答を与えるものであり，また生物モデルとしての Keller - Segel 型方程式の理解に対して新たな知見を与えるものともいえる。

論文調査委員会は平成19年３月５日に公聴会を行ない，研究内容と関連する専攻学術に対する質疑応答を行なった。これにより，研究成果は応用解析学において高い水準にあり，また研究の過程において申請者は高い学識の涵養を行なっていることが認められるた。これらを総合し，申請者の論文は京都大学博士（情報学）の申請に相応しい研究内容との結論に達した。