氏　　　名	清水大輔（しみずだいすけ）
学位(専攻分野)	博　士（情 報 学）
学位記番号	情　博　第　254　号
学位授与の日付	平 成 19 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	情 報 学 研 究 科 複 雑 系 科 学 専 攻
学位論文題目	FEM Analysis for 2nd Order Elliptic Initial Value Problems with Regularization （正則化法による2階楕円型初期値問題の有限要素法解析）
論文調査委員	（主　査）教 授 磯　祐 介　教 授 木 上　淳　教 授 西 村 直 志

論　文　内　容　の　要　旨

本論文では，Hadamard の意味で非適切な問題の数値解の構成を Tikhonov 正則化法の離散化を用いることを視野にいれ，いわゆる楕円型初期値問題の数値解析について論じている。具体的には，滑らかな境界を持つ有界領域上での2階楕円型偏微分方程式に対し，境界の一部で Dirichlet 条件と Neumann 条件を課すことから領域内部でこの方程式を満足する函数（微分方程式の解）を数値的・近似的に構成することを目指している。さらに本問題は典型的な非適切問題（ill-posed problems）であるため，問題を安定化させる手法として Tikhonov 正則化法を利用した上で有限要素法の適用を図っているが，正則化と離散化の双方を弱形式を利用して統一的に論じている。

Laplace 方程式を代表例とする2階楕円型偏微分方程式は，数学においても工学においても重要な方程式としてよく現れる。この方程式については，対象とする領域や方程式の係数が既知の場合に，領域の境界全体で Dirichlet 境界値または Neumann 境界値を与えて領域内部で方程式を満す函数（解）を求める問題は境界値問題と呼ばれ，然るべき函数空間の導入によって問題が Hadamard の意味で適切（well-posed）となることはよく知られており，数値的・近似的にこの函数を求める方法も確立している。これに対して本研究においては，境界の一部で Dirichlet 境界値と Neumann 境界値の両方を与えて領域内部で方程式を満足する函数（解）を求める問題を設定しているが，この問題は任意の初期値に対しては解が存在しないことが容易に示され，さらに標準的な Sobolev 空間の位相では初期値から解への連続性（安定性）が成立しない典型的な非適切問題である。このような解の存在あるいは安定性を持たない非適切な問題の解の構成に際しては，正則化パラメータを導入して，対象を well-posed な問題系列の極限として捉えて近似解を求めることがしばしば行なわれる。特に本論文で採用した Tikhonov 正則化法についてはその数学的構造の研究も十分に行なわれており，一定の条件下では正則化パラメータを0に近付けることにより，正則化解が元の非適切問題の厳密解に収束することが知られている。このような背景にあって，本論文では有限要素法による正則化方程式の近似も行ない，Tikhonov 正則化と有限要素法の収束理論の統合を行なっている。

Laplace 方程式の場合には1960年代に Latt¥{e}-Lions により提案された Quasi-reversibility 法の研究がある。ここでは正則化パラメータに相当する重み函数が適当な Sobolev 空間で導入されているが，複数あるパラメータの相互依存性が明確ではなく，異るパラメータに依存する函数空間での議論を行なうという解析的評価上の問題点があった。この問題に対する理論数値解析の視点での精密な近似評価は永らく明示的には行なわれていなかったが，本論文では基礎となる函数空間の統一を図り，さらに Tikhonov 正則化法を弱形式で捉えるという視点から数学解析を利用した明快な評価を与えた。これにより，Latt¥{e}-Lions の研究では差分近似で仮定されていた基底函数の正則性を弱めることが可能となり，見通しの良い事前誤差評価を与えた。

さらに議論を発展させ，本論文では2階楕円型偏微分方程式の初期値問題に対する境界要素法の適用についても論じている。ここでは円環領域における Laplace 方程式に対象を限定するものの，球面調和関数展開を利用して非適切な境界積分方

程式に適用された Tikhonov 正則化法に対して精密な評価を与えた。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

申請者の学位申請に係る研究は，２階楕円型偏微分方程式の初期値問題の数値解析を有限要素法または境界要素法を用いいて行なうものであるが，弱形式を利用した Tikhonov 正則化の数学理論と Galerkin 法による離散化を統一的に論じるもので，この点で特徴的な研究になっている。

申請者の研究では，いわゆる Tikhonov 正則化法の離散化を，標準的な関数解析の枠組みで論じている。ここでは先行研究の Latt¥{e}-Lions による Quasi-reversibility の議論で現れる函数空間および内積の設定を参考にし，正則化法と離散化の両方を双一次形式を利用した見通しの良い形で記述し，正則化法の収束性と離散化の収束性を同じ立場で論じている。とくに後半の Galerkin 法による離散化を念頭においた議論が正則化法と関連して展開されていることが，本研究の特徴となっている。具体的は Hilbert 空間の直交射影を利用するタイプの Galerkin 法の適用によって正則化方程式の離散化を行ない，離散化パラメータと正則化パラメータの両方についての収束評価を統一的に与えている。この種の議論は，正則化法あるいは離散化手法として個別的にはこれまでも多くの研究が行なわれているが，正則化法と離散化を総合的に扱って収束評価を厳密に与えているものは少なく，さらに有限要素法解析として基底函数の構成まで言及した研究は他にないため，研究全体を通して新たな知見を与えているものと考えられる。

申請論文では関数解析を利用した Tikhonov 正則化法の離散化に関する一般論を展開した上で，楕円型偏微分方程式に対し，境界の一部で Dirichlet 境界値と Neumann 境界値の両方を与えるという「(楕円型) 初期値問題」を設定し，この問題の有限要素法解析を理論数解析の観点から論じている。この問題は1960年代に Latt¥{e}-Lions によって正則化法に相当する Quasi-reversibility 法による数値計算も含めた先駆的アプローチがあるが，その後は離散化まで含めた正則化法の研究が数学的な意味で厳密に行なわれているとは言いがたい状況にある。また Latt¥{o}-Lions の先行研究では差分法による離散化が利用されており，さらに収束に関する議論では強い条件が課されているため，現在の数値計算技術と数値解析理論ならびに非適切解析理論に沿った形での修正が望まれていた。申請者の研究は，本研究によりこの点を肯定的に解決したといえる。

議論の前半では，滑らかさを要求した上で高次要素による離散化を行ない，その上で正則化方程式の有限要素解の収束が精密に述べられ，さらに後半では，滑らかさの低い場合について，条件付きで事前誤差評価が与えられている。何れの結果も申請者の構成した正則化法の Galerkin 法による離散化の評価を，問題に即した Sobolev 空間に適用することで得られるものである。これらの成果は新たな内容といえる。

さらに Laplace 方程式に対しては「(楕円型) 初期値問題」に対する境界要素法の適用についても考察し，領域は円環領域と限られるものの，球面調和函数を利用した精密な議論が行なわれている。

本申請論文は，楕円型初期値問題を始めとする非適切問題の数値解析に新たな知見を与えるもので，数学に立脚した数値計算という数理情報的視点で高い内容の研究である。これにより，京都大学博士（情報学）の学位論文として価値のあるものと認める。また，論文調査委員会は平成19年２月21日に論文公聴会ならびに申請者の研究内容ならびに関連する専攻学術に対する試問巣を行ない，合格とした。