氏名	丹下基生（たんげ もとお）
学位(専攻分野)	博士（理学）
学位記番号	理博第3071号
学位授与の日付	平成18年5月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Ozsváth Szabó's correction term and lens surgery （Ozsváth Szabó の補正項不変量とレンズ手術）
論文調査委員	（主査）教授 上　正明　教授 森脇　淳　教授 河野　明

論文内容の要旨

本論文が扱うのは3次元球面内の結び目のデーン手術で得られる多様体がレンズ空間L(p,q）になる「レンズ手術」において実際に実現されるレンズ空間や結び目が満たすべき条件の探求である。双曲結び目以外の結び目のデーン手術で得られるレンズ空間のタイプとその結び目は完全に決定されており，双曲結び目の場合はレンズ空間が得られるのは整数係数のデーン手術の場合に限られる。また必要なら多様体の向きを変えることにより，正の整数係数の場合を考えれば十分である。従って正整数係数の場合のみ以下考察する。

一方 Ozsváth と Szabó は一般の3次元多様体を2つのハンドル体の和として表すヘーガード分解から出発して，3次元多様体Yとその上のスピンc構造sの組に対し「ヘーガードフレアホモロジー」と呼ばれる3次元多様体の位相不変量を定式化し。Yが有理ホモロジー3球面の場合にその中でねじれのない元の中の最小次数としてYの補正項d(Y，s）を定義した。彼らはレンズ空間L(p，q）が3次元球面内の結び目Kの正整数係数デーン手術で得られる場合（係数は必然的にp）その補正項と結び目Kのトージョン係数との関係を表す公式，およびアレクサンダー多項式が満たすべき条件を与えた。この2条件は結び目がレンズ手術を許すための必要十分条件になると予想されている。

申請論文の内容は3次元球面内の結び目がレンズ手術を許容する場合にフレアホモロジーに基づく上記の2条件に立脚しながらより明示的かつ具体的な補正項やアレクサンダー多項式に関する公式を与え，得られるレンズ空間や結び目のタイプに関する新たな条件を見いだしたものである。まず Ozsváth-Szabó の流儀により，レンズ空間 −L(p，q)（L(p，q）の向きを逆にしたもの）のスピンc構造をレンズ空間の標準的ヘーガード分解に対応して $0\leqq i<p$ となる整数iで表す。Ozsváth と Szabó は補正項d(−L(p，q)，i）どうしの相互関係を与えたが，本論文では補正項をデデキント和s(q，p）を用いてより直接的に表す公式を与えた。この公式と Ozsváth-Szabó の条件から，次の主定理が得られた。

定理：−L(p，q）が結び目Kの係数pのデーン手術で得られる場合，Kのアレクサンダー多項式のpを法として次数がiに等しい項の係数を足し合わせた値はある整数 $0<h<p$（その二乗がpを法として −qに等しい）とある整数cにより $-m+\Phi(h')$ という形で与えられる，ここでh'はpを法とするhの逆数，$m=(hh'-1)/p$，$\Phi(h')$ はp，q，h，cにより具体的に書かれるある関数である。

この定理よりKのアレクサンダー多項式を復元することができ，あるトーラス結び目のアレクサンダー多項式を対称な形になるように x^p-1 で割った余りとして特徴づけることができる。また系として上記のmが1の場合に現れる結び目のアレクサンダー多項式が完全に決定される。また主定理から次の結果も得ている。

定理：−L(p，1）が結び目Kのp-手術で得られるならば，p=2でKは自明，またはp=5でKが三葉結び目であり，かつこの場合に限る。

この定理はL(p，1）がKのp-手術で得られるときはKは自明なものに限るという既知の結果と好対照をなす。さらに−L(p，2)，−L(p，3）がレンズ手術で得られる場合のpの値も本論文で決定されている。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

3次元球面内の結び目に沿うデーン手術（一般に有理数係数を与えることで表示される）によりどのような3次元多様体が現れるかという問題は結び目，3次元多様体論の大きなテーマの1つである。結び目の大多数をしめる双曲結び目の場合有限個の係数の場合を除いて得られるのは双曲多様体であるが，逆に有限個の例外的な場合，特に3次元レンズ空間が得られるいわゆる「レンズ手術」に関しては3次元多様体論，結び目理論の様々な手法によって研究されてきた。レンズ手術の場合整数係数の手術のみが未解明である。これに対して Ozsváth と Szabó が3次元多様体とその上のスピンc構造の対（Y，s）に対して定式化したヘーガードフレアホモロジーの研究は，結び目，3次元多様体，4次元多様体に関して多くの新たな知見をもたらしつつ急速に進展している。レンズ手術に関しても Ozsváth-Szabó はフレアホモロジーから派生して定義されるレンズ空間の補正項と結び目のトージョン係数との関係，結び目のフレアホモロジーの考察からレンズ手術を実現する結び目のアレクサンダー多項式に関する公式を与え，従来の手法では得られない新たな知見をもたらした。本申請論文は Ozsváth と Szabó の2つの公式に準拠しつつレンズ手術を実現する結び目のアレクサンダー多項式をより詳細かつ具体的に決定している。またレンズ空間のフレアホモロジー補正項については Ozsváth と Szabó が再帰的に求める公式を与えているがこれにより計算を実行するのはかなりの困難が伴う。本論文は補正項に関して再帰的でないより直接的な公式を与えておりより計算可能性が高い点に意義がある。なお Némethi が同様な直接的公式を与えているがスピンc構造の表示法が異なり，本論文の結果はこれとは独立に得られたものである。また本論文の主定理はアレクサンダー多項式の係数を初等的関数で表す手段を与えているが，これは Ozsváth-Szabó の公式から出発しているがかなり複雑な計算過程を経て得られるものであり，非自明性の高い結果である。さらに $-L(p,1)$ が結び目の手術で得られる場合のレンズ空間と結び目を完全に決定するなど新たな知見をもたらしていること，門上-山田，斉藤らによって別の手法で得られている結果の類似物が得られるなど多くの情報を内包している。また主定理をより解析することにより，別のタイプのレンズ空間（たとえば $-L(p,q)$ において $q=2,3$ の場合）が現れる場合の p の値を決定するなど他の手法では得難い，また Ozsváth-Szabó の公式自体からは自明でない結果も得られている。レンズ手術で実現可能なレンズ空間と結び目のタイプは Berge が与えたリストで完全に決定されるというのがこの分野の中心的予想である。この予想の解決は Berge のリストの複雑さもあってなお困難と思われるが，主結果は明示的に計算可能な形の公式を与えたことによりその解明に対する有効なアプローチを提供することが期待される。以上の点を考慮し，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また，論文内容とそれに関連した事項について諮問を行った結果，合格と認めた。