

氏名	マリア ヴィヴィアン ヴィサヤ Maria Vivien V. Visaya
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博第3084号
学位授与の日付	平成18年9月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	A lower estimate of the topological entropy from a one-dimensional reconstruction of time series (時系列の1次元再構成からの位相的エントロピーの下からの評価)
論文調査委員	(主査) 国府寛司 教授 河野明 教授 重川一郎

論文内容の要旨

本論文の主定理は力学系によって生成される時系列データの情報から元の力学系の性質、特にそのカオス性に密接に関わる位相的エントロピーの下からの評価を与えるものである。実験や観察を通して非線型現象を研究する際には、多くの場合、現象の情報は時系列データとして得られ、力学系理論を援用する際には、その時系列データから元の力学系の性質を導くことが要求されるが、これは一般には大変困難な問題である。力学系理論の時系列解析への応用では、従来、時系列データを十分高い次元のユークリッド空間に忠実に埋め込むことでその性質を調べるという方針が基本的であったが、元の力学系が未知であるために、どれくらい高い次元のユークリッド空間を取れば埋め込みになっているかを判定する方法がなく、統計的な手法によってその次元を推定することしかできていなかった。

申請者は、与えられた時系列を1次元多価写像に対応付け、それが適当な幾何的条件をみたすときに、その情報から、時系列データを生成する未知の力学系の位相的エントロピーの下からの評価を与える結果を得た。より具体的には、対象とする非線型現象が弧状連結なコンパクト距離空間 M 上の連続写像 $f: M \rightarrow M$ のある初期点 x_0 から出発する軌道 $\{x_n = f^n(x_0)\}_{n=0,1,2,\dots}$ として表現されているとき、それを実数値関数 ρ を通して観測して $\{u_n = \rho(x_n)\}_{n=0,1,2,\dots}$ なる時系列データを得た場合に、2次元平面内の点集合 $\{(u_n, u_{n+1}) \mid n=0, 1, 2, \dots\}$ が適当な区間 I 上の1次元多価写像 $F: I \rightrightarrows I$ のグラフと見なせるという状況を考える。このとき申請者の主定理(定理1, 定理2)は次のことを述べている: 上述のようにして得られた1次元多価写像 F が I 内のある有限個の互いに素なコンパクト部分区間の組 J_1, \dots, J_ℓ に対してマルコフ的性質をみたすならば、もとの未知の力学系 f の位相的エントロピーは、 F の区間の組 J_1, \dots, J_ℓ へのマルコフ的作用から決まる遷移行列のスペクトル半径の対数によって下から評価される。位相的エントロピーは力学系の軌道の位相的な複雑さを測る量であり、それが正であることは、その力学系がカオス的であることの1つの定義とされる。従って、時系列データから決まる1次元多価写像が上述のような条件をみたす場合には、そのことから元になる未知の力学系のカオス性のための十分条件が得られる。

さらに申請者は、磁気弾性薄膜のある具体的な実験データについて主定理に沿った解析を行い、その実験データが定理の前提をみたすような力学系から生成されていると仮定するならば、その位相的エントロピーが正であり、従ってそれがカオス的であることを示した。もちろん、実際の実験から得られるデータが、完全に決定論的な力学系だけから生成されているとは必ずしも言えず、現実的には様々な外的要因に起因するノイズや実験誤差が含まれていると考えられる。このようなノイズを含む場合などへの拡張や精密化については、今後の検討課題である。

論文審査の結果の要旨

時間変数を含む微分方程式、あるいは写像の反復合成として数学的に定式化される力学系は、自然科学や工学などの様々な分野で、決定論的法則に従って時間発展する現象の数理解析モデルとして用いられ、力学系理論はそのような現象を数理的に

理解するための数学的手段を提供している。しかしながら実際の現象の情報は実験や観測を通して時系列データとして得られることが多く、それから直接にその現象の背後にある数理的構造について何らかの結論を得ることは多くの場合困難な問題である。

力学系理論に基づいた時系列解析とは、時系列データが未知ではあるが何らかの力学系によって生成されているということとを基本的な仮定として、その下で適当な条件がみたされている場合に時系列データからそれを生成する力学系について数学的に明確な結論を与えようとするものである。従来の研究では Ruelle, Crutchfield et al. による delay coordinates の方法に基づく Takens (1981) やその精密化である Sauer-Yorke (1991) らによる時系列再構成とその埋め込みの理論を用いて、十分大きな次元のユークリッド空間に未知の（有限次元）力学系の忠実な再現を達成しようとするが、元の力学系の相空間の次元が未知であるためにどれ位大きな次元のユークリッド空間をとれば埋め込みとなるかを決定する明確な方法がなく、統計的な手法によりその次元を推定することしかできていなかった。

申請者はこのような困難を回避するために、埋め込みを達成できなくても時系列データが適当な条件をみたせば元の力学系の複雑さ（カオス性）を判定することが可能であることを示した。すなわち、時系列から得られる 1 次元多価写像 F がその定義域 I 中にある有限個の互いに素なコンパクト部分区間の組 J_1, \dots, J_ℓ に対してマルコフ的性質をみたすならば、もとの未知の力学系 f の位相的エントロピーは、 F の区間の組 J_1, \dots, J_ℓ へのマルコフ的作用から決まる遷移行列のスペクトル半径の対数によって下から評価され、従って元になる未知の力学系が（位相的な意味で）カオス的であるための十分条件が得られる。このような時系列の埋め込みに頼らない発想は未だ希少であり、この点で申請者の結果の時系列解析の研究への貢献は十分あると考えられる。また、磁気弾性薄膜の振動の実験データに主定理を適用して、申請者の結果が具体的な現象に実際に応用可能であることも示している。現実の複雑な振る舞いを示す系は例えば発達した乱流のように高い自由度の複雑さを持っていることが多いと思われるので、申請者の主定理がそのような対象について適用できる可能性は小さいと考えられるが、これについては申請者の今後の研究の発展に期待したい。

以上により、本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認めた。また、主論文の内容を中心に、それに関連した事項について試問した結果、合格と認めた。