

氏名	ダニエル ダビデ モスコビッチ Daniel David Moskovich
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博第3085号
学位授与の日付	平成18年9月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Surgery Untying of Coloured Knots (色付き結び目を手術で解く)
論文調査委員	(主査) 助教授 大槻知忠 教授 藤重悟 教授 齋藤恭司

論文内容の要旨

3次元球面の特定の結び目の補空間内にある枠付き絡み目にそって3次元球面を手術することにより3次元多様体内の結び目が得られ、とくにその3次元多様体が3次元球面に同相であるときは3次元球面の結び目が得られるが、与えられた結び目をそのような方法で与えることを結び目の手術表示という。結び目補空間の基本群から位数 $2p$ の2面体群への全射準同型写像を p 彩色といい、 p 彩色が与えられているような結び目を p 彩色結び目という。 p 彩色の準同型写像の核に各成分がある枠付き絡み目にそった手術による p 彩色結び目の手術表示を以下では考える。

申請者 Daniel Moskovich 氏の学位論文の主定理は、そのような手術によってうつりあう p 彩色結び目(以下 $p=3, 5$)を同値な結び目とみなしたときの同値類の集合はちょうど p 個の類からなり、各類の代表元として $(2, p)$ トーラス結び目の p 個以下のコピーの連結和がとれることを示すものである。すなわち、主定理は、そのような手術により $(2, p)$ トーラス結び目の p 個以下のコピーの連結和を手術することで任意の p 彩色結び目を手術表示することができることを示している。

主定理の証明は、任意に与えられた p 彩色結び目を p 彩色の準同型の核にある枠付き結び目にそった手術をくりかえしてほどこいていくことにより、なされる。具体的には、

- (1) 与えられた p 彩色結び目にたいして、それを境界とするような向きづけられた閉曲面を結び目補空間にとり、これを円板にバンドをつけた形に変形する(円板-バンド表示)。
- (2) 所定の条件をみだす手術によって、円板-バンド表示のバンド同士の絡まりをほどこいて、さらにバンドのねじれを解消することにより、特定の有限個の結び目の任意個のコピーの連結和に帰着する。
- (3) それらの有限個の結び目を具体的な手術によって $(2, p)$ トーラス結び目のコピーの連結和に帰着し、さらに $(2, p)$ トーラス結び目の任意個のコピーの連結和を具体的な手術によって $(2, p)$ トーラス結び目の p 個以下のコピーの連結和に帰着する。

という手順で主定理の「同値類が高々 p 個である」という部分が証明される。無限個ある p 彩色結び目を特定の形に表示することで各段階で有限個の場合に帰着していくことがポイントである。主定理の「同値類がちょうど p 個である」という主張は p 彩色結び目の同値類の Z/pZ 値不変量を構成することにより示される。申請者は p 彩色結び目を分岐集合とする3次元球面の2重分岐被覆空間のコホモロジー環の構造をつかってそのような不変量を構成した。主定理は構成的な方法で証明されるため、主定理の証明にそって、任意に与えられた p 彩色結び目の具体的な手術表示を得ることができる。

申請者は多くの p 彩色結び目について試行錯誤を繰り返すことにより主定理の主張を発見的に得た。どの p 彩色結び目はどのようにしてほどこくことができるのかという具体的な計算例を申請者はたくさんもっており、それらの計算例そのものは論文に明示的には現れてこないが、主定理の証明中で使われている数々の技巧的な補題はそのような計算例を基礎にして定式化されたものである。

論文審査の結果の要旨

3次元球面内の枠付き絡み目にそって3次元球面を手術することにより任意の有向閉3次元多様体を表示することができ、このときその枠付き絡み目をその3次元多様体の手術表示という。3次元多様体の多くの(量子不変量に関連する)不変量は3次元多様体の手術表示にもとづいて定式化されており、一方、3次元球面の分岐被覆空間として与えられている3次元多様体の(量子不変量に関連する)不変量の値の性質はまだあまり調べられておらず、「3次元球面の分岐被覆空間として与えられている3次元多様体を手術表示する方法を与えよ」という問題は、そのような観点から、基本的な問題である。

申請者の主定理は、分岐集合が結び目でありモノドロミー群が位数 $2p$ の2面体群であるときに3次元球面の分岐被覆空間の手術表示を与えるものであり、この場合のときにその問題に完全な解を与えている。すなわち、 p 彩色結び目から p 彩色の準同型写像をモノドロミーとする3次元球面の分岐被覆空間が得られ、 p 彩色の準同型写像の核に各成分がある枠付き絡み目によって p 彩色結び目を手術表示したとき、この枠付き絡み目の分岐被覆空間内の原像はこの分岐被覆空間の手術表示を自然に与える。非可換なモノドロミー群が定める分岐被覆空間の不変量の性質等についてはこれまでほとんど研究されておらず、申請者の主定理は今後のこのトピックの発展の基礎となることが期待される基本的な結果である。任意の有向閉3次元多様体は3次元球面の非正則3重被覆空間として構成することができることが知られており、上記のようにして与えられる分岐被覆空間はかなり一般的な3次元多様体を与えていて、そのような3次元多様体の手術表示を組織的に構成しようとしたことが申請者の研究のそもそもの発端であった。

結び目の無限巡回被覆空間の不変量を被覆変換群にかんする同変不変量として定式化したとき、これはもとの結び目の重要な不変量(たとえば、結び目のKontsevich不変量のループ展開)を与えることがある。そのような枠組みを非可換化しようという動機が申請者の主論文の研究の背景としてあった。すなわち、 p 彩色結び目を p 彩色の準同型写像の核に各成分がある枠付き絡み目によって手術表示したとき、その枠付き絡み目の不変量として p 彩色結び目の不変量を定式化することができるが、さらに、この手術表示の分岐被覆空間内の原像の同変不変量として p 彩色結び目の精密化された不変量を定式化することをめざすものである。その目標のためには、2つの手術表示の枠付き絡み目が同値な p 彩色結び目を表示するための必要十分条件(Kirby型の定理)が必要となるが、申請者は主論文であつかった場合についてKirby型の定理を証明した。その証明とこの定理をもちいた p 彩色結び目の不変量の構成法について申請者は参考論文1にまとめている。

申請者はこれまで国内外での研究集会に活発に参加して講演してきた。申請者は語学にも非常に堪能であり(ヘブライ語英語日本語で流暢に会話することができ、フランス語ラテン語ロシア語アラビア語を読むことができる)、今後国際的に活躍することが期待される。

よって本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。