氏　　　名	黒（くろ）田（だ）邦（くに）彦（ひこ）
学位（専攻分野）	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第3099号
学位授与の日付	平成19年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Abelian Conformal Field Theory with Level Structure （レベル構造を持ったアーベル的共形場理論）
論文調査委員	（主　査） 教授 上野健爾　　教授 三輪哲二　　教授 森脇　淳

論文内容の要旨

本論文はレベル付きアーベル的共形場理論の一般論を数学的に厳密に展開し，共形場理論に新しい知見を付け加えたものである。

アーベル的共形場理論は共形場理論の最も簡明な例として理論物理学で古くからから研究されおり，数学的にも厳密な基礎付けが種々の観点から行われている。しかしながら，こうした従来の研究はレベルが1の理論であった。土屋昭博は一般レベルのアーベル的共形場理論を提唱し，上野との共同研究において一般レベルのアーベル的共形場理論のあらすじを描いた。しかしながら，そこではアーベル的共形場理論で重要な役割をする半標準束が，通常特異点のみを特異点として持つ特異代数曲線，いわゆる半安定曲線ではその正規化が可約曲線となる場合には定義できないという重大な問題点が看過され，共形場理論の真空がなす層のモジュライ空間の境界での挙動が誤って認識されていた。

アーベル的共形場理論では理論の対称性を記述する無限次元代数として交換関係

$$[a(m),\ a(n)]=Mn\delta_{m+n,0}$$

を満足するハイゼンベルク代数 $\{a(n)\}_{n\in Z}$ を基礎にする。ここで M は任意の正整数で，M をレベルと呼ぶ。レベル M のハイゼンベルク代数からカレント

$$a(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a(n)z^{-n-1}$$

および頂点作用素

$$V_{\pm1}(z)=\exp\left\{k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(-n)}{n}z^{n}\right\}e^{kMt_0}z^{ka(0)}\exp\left\{k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n}z^{-n}\right\}$$

が定義される。座標及びN 点付きリーマン面

$$\mathfrak{X}=(C\,;\ Q_1,\ \cdots,\ Q_N\,;\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_N)$$

を考える。$\Lambda=\{-M/2,\ -M/2+1,\ \cdots,\ M/2-1,\ M/2\}$ とおき，各点 Q_j に対して整数 $p_j\in\Lambda$ を対応させ $\vec{p}=(p_1,\ \cdots,\ p^N)$ と記す。このとき，$\vec{p}$ に対してカレントと頂点作用素および $H^0\left(C,\ O_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$，$H^0\left(C,\ \omega_C^{\otimes(1-M)}\left(*\sum_{j=1}^{N}\right)\right)$ を使ってレベル M のアーベル的共形場理論における真空 $V_{\vec{p}}(\mathfrak{X})$ が定義できる。この空間は $\sum_{j=1}^{N}p_j\neq0$ のとき 0 であることが分かるので，以下 $\vec{p}$ は常 $\sum_{j=1}^{N}p_j=0$ と仮定する。

真空 $V_{\vec{p}}(\mathfrak{X})$ は $\mathfrak{X}$ の各点 Q_j に $p_j\in\Lambda$ でラベル付けられた粒子が飛び込んできた場合の物理状態を表すベクトル空間と考えられる。従って真空が有限次元であるかが重要な問題になる。申請者は頂点作用素の相関関数とリーマン面 C の直積から C のヤコビ多様体 $J(c)$ へのアーベル・ヤコビ写像を考えることによって，次の重要な定理の厳密な証明を与え，真空の次元を決定した。

主定理 1　標準的同型写像

$$V_{\vec{p}}(\mathcal{X}) \cong H^0(J(c),\ O(M\Theta))$$

が存在する。ここで Θ はヤコビ多様体のテータ因子である。従って C の種数を g とすると

$$\dim_C V_{\vec{p}}(\mathcal{X}) = M^g$$

が成り立つ。

以上は閉リーマン面の場合，すなわち非特異第代数曲線の場合であるが，申請者は以上の議論を閉リーマン面の族 $\mathfrak{F} = (\pi : F \to S\ ;\ s_1,\ \cdots,\ s_N\ ;\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_N)$ の場合に拡張し，真空の作る層 $V_{\vec{p}}(\mathfrak{F})$ を定義し，この層が射影的接続を持つことを示した。

次に申請者は座標及び点付き閉リーマン面が退化した座標及び点付き安定曲線 $(C : Q_1,\ \cdots,\ Q_N\ ;\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_N)$ に対して真空を定義する問題を考察した。その際，半標準束 $\omega^{1/2}$ は C 上必ずしも定義されないが，半標準束が定義できる場合，あるいは M が偶数の場合には，閉リーマン面と同様に真空の空間が定義できることを示し，さらに C が通常特異点を唯一つ点 P で有する場合に，正規化 $\widehat{C}$ から定義できる $N+2$ 点付き閉リーマン面 $(\widehat{C}\ ;\ Q_1,\ \cdots,\ Q_N,\ P_+,\ P_-\ ;\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_N,\ z,\ \omega)$ の定める真空 $V_{\vec{p},q,-q}(\widehat{C})$ との関係を考察し次の定理を得た。

主定理 2　写像

$$\phi : \bigoplus_{q \in \Lambda} V_{\vec{p},q,-q}(\widehat{\mathcal{X}}) \to V_{\vec{p}}(\mathcal{X})$$

は単射である。従って C の種数が g であれば

$$\dim_C V_{\vec{p}}(\mathcal{X}) \geq (M+1)M^{g-1}$$

が成り立つ。

非アーベル的共形場理論では類似の写像 ϕ は同型写像となり次元も種数 g の半安定曲線の場合と閉リーマン面の場合は等しいことが示されているが，アーベル的共形場理論では事情が全く違うことを申請者は示した。さらに通常特異点を１つもつ半安定曲線に退化する代数曲線の平坦族とその真空の層とその上の射影的接続を考察することによって閉リーマン面の真空の極限空間として現れる $V_{\vec{p}}(\mathcal{X})$ の部分空間を特徴付けることに成功した。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

従来アーベル的共形場理論ではレベルが１の場合が扱われ，レベルが２以上の場合はほとんど考察されてこなかった。土屋昭博は一般レベルのアーベル的共形場理論を提唱し，上野との共同研究によって理論の粗筋を作ったが，数学的に厳密な理論の展開は行われなかった。申請者は，一般レベルのアーベル的共形場理論を数学的に厳密に構成した。従来，アーベル的共形場理論はいくつかの理論構成が可能であったが，申請者は従来から研究されてきた手法を拡張し，非アーベル的共形場理論との類似する形で理論展開を行った。この事自体きわめて重要な結果であるが，非アーベル的共形場理論との類似から，レベルが一般のアーベル的共形場理論でも，閉リーマン面上の理論と半安定曲線上の理論とは全く同様の理論展開ができるものと漠然と予想されていた。

申請者は閉リーマン面の場合の理論をを頂点作用素の相関関数を考察することによってレベル M のテータ函数と関連させて展開した。この手法は，半安定曲線の場合はテータ函数の退化と関係して同様に展開できると予想されていたが，申請者は半安定曲線の場合は事情が全く異なり，新しい現象が生じて，テータ函数の退化の考察だけからはアーベル的共形場理論を展開できないことを示した。これは驚くべき結果であり，共形場理論に新しい知見を与えたものとして高く評価できる。また，申請者はテータ函数の退化に対応する真空の部分空間も定義しており，従来予想されていた理論はこの部分空間に対して適用できることを予想させており，今後の研究への指針を与える結果となっている。

このように，申請者のアーベル的共形場理論に関する業績はこの分野の研究の従来の知見を深め新しい研究方向を示唆する顕著な業績であり，博士（理学）の学位を授与するに十分と考えられる。

よって，本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

平成19年１月16日，主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心として，これに関連した研究分野について口頭試問した結果，合格と認めた。