【123】

氏名	高木　聡（たかぎ　さとし）
学位(専攻分野)	博士（理学）
学位記番号	理博第3101号
学位授与の日付	平成19年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Fujita's Approximation Theorem in Positive Characteristics （正標数における藤田の近似定理）
論文調査委員	（主査）教授 森脇　淳　教授 河野　明　教授 重川一郎

論文内容の要旨

高木氏の主論文は正標数の代数的閉体上定義された射影多様体における藤田の近似定理である。まず始めに，この藤田の近似定理について説明したい。

非特異射影代数曲面上の非負Q-因子Lは，Q-因子によるL＝P＋Nという形の分解で，Pがネフとなり，Nは非負でNを既約成分に分けてその交点行列を考えたとき，それが負定値になるような分解が存在する。この分解はザリスキにより証明されたこともあり，ザリスキ分解と呼ばれる。このとき，任意の正の整数nについて，$h^0(nL)=h^0(nP)$となることより，あとで定義する直線束の体積関数の意味では，LもPも同じ体積を持つ。このことの高次元での類似を考えることは自然であるが，中山により，高次元では一般的に不可能であることが知られている。しかしながら，藤田はLの近似的なPを作ることを考えた。これは，次のようなものである。d-次元射影多様体X上のQ-因子Lに対して，Lの体積を

$$\mathrm{vol}(L)=\limsup h^0(nL)d!/nd \quad (n->\infty)$$

と定める。このとき，藤田は，Lがビックのとき，任意の正の数εに対して，双有理射f : Y－＞XとY上の豊富なQ-因子Aが存在して，

$$\mathrm{vol}(A)>\mathrm{vol}(L)-\varepsilon$$

が成り立つことを示した。しかしながら，彼の証明には，基礎体の標数がゼロであることが必要であった。その後，ラザースフェルトを含め，その定理の重要性から他の証明も考えられたが，どの証明も基礎体の標数がゼロであることを仮定したものであった。高木氏の主論文は，この藤田の近似定理が正標数でも正しいことを示した画期的な論文である。証明の大筋は藤田のオリジナルと同様であるが，正標数では特異点解消の定理がないため，多くの困難が伴うが，高木氏は卓越したアイデアでそれを乗り越えている。

高木氏が正標数での藤田の近似定理が必要であった理由について述べたい。高木氏が修士論文から引き続き考えている問題は有限体上定義された射影多様体上の非負のサイクルの数え上げの問題である。具体的には，n-次元射影多様体上の豊富な因子Hを固定して，N(a，d)で射影多様体上での次数がdであるa-次元の非負なサイクルの個数を表すことにすると，高木氏の問題はN(a，d)を求めることにある。a＝0の場合，これは古典的な問題でゼータ関数とも関係する有限体上の代数幾何学の主テーマである。高木氏は，上の正標数での藤田の近似定理の応用として，a＝n－1の場合のN(a，d)の漸近的挙動を決定することに成功した。すなわち，

$$\limsup N(n-1,\ d)/d^n=1/n!(H^n)^{n-1}(d->\infty)$$

であることを示した。

論文審査の結果の要旨

高木氏の主論文の成果は正標数の代数的閉体上定義された射影多様体における藤田の近似定理である。この結果は，藤田

氏により標数ゼロの場合に確立され，その後，ラザースフェルトを含め，その定理の重要性から他の証明も考えられたが，どの証明も基礎体の標数がゼロであることを仮定したものであった。高木氏は，正標数の場合にこの結果を拡張し，あとで述べる結果を含め，多くの応用があり，今後の正標数における代数幾何学の基本的な道具となるものである。その意味で，非常に価値のある結果であると言える。

ここで，その証明方法を簡単に述べてみたい。標数ゼロの場合の代数幾何学において最も重要な定理は広中による特異点解消定理である。正標数の場合は，特異点解消定理がまだ証明されていないが，双有理ではなく生成的なエータール射を許せば，ドゥヨングにより，ある種の特異点解消定理が証明されている。かれは，これを用いて，藤田の証明のある部分が正標数でも成り立つことを発見したが，それだけでは，不十分である。これ以外に，双有理幾何の範囲で，ヴェイユ因子の系統的な使用が必要になる。ヴェイユ因子はカルチエ因子に比べ，その取り扱いが非常に難しい。例えば，群構造を保つよい引き戻しは存在しない。このような困難を数々のテクニックで乗り越えている。そこにみられる彼の力は十分に博士の学位に値する。

さらに，彼は，副論文で，学位論文の主結果である正標数での藤田の近似定理の応用について考えている。これは，有限体上定義された射影多様体おける代数的サイクルの数え上げの問題である。0-次元サイクルの個数から決まる生成関数はゼータ関数と呼ばれ，代数幾何学の主テーマである。例えば，グロタンディークのスキーム論はゼータ関数の零点についてのヴェイユ予想を解決するために構築された理論である。彼は，正標数での藤田の近似定理の応用として，非負の因子の数え上げの漸近的挙動についての一般的結果を得ている。これは，ゼータ関数の収束域を求めることを意味しており，新しい数学の地平線の開拓であり，高く評価できる。

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また，論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果，合格と認めた。