氏名	笠谷昌弘（かさたにまさひろ）
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博第3219号
学位授与の日付	平成20年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	Zeros of symmetric Laurent polynomials of type $(BC)_n$ and Koornwinder-Macdonald polynomials specialized at $t^{k+1}q^{r-1}=1$ （$(BC)_n$-対称Laurent多項式のある零点と，パラメータが特殊化されたKoornwinder-Macdonald多項式）
論文調査委員	(主査)教授 三輪哲二　教授 上野健爾　教授 柏原正樹

論文内容の要旨

本論文の目的は，BC型のWeyl群不変なn変数Laurent多項式環において，ある種の零点条件で特徴づけられるイデアルの基底を，Koornwinder多項式を用いて構成することである。A型のWeyl群に対応する場合，すなわち通常の対称多項式の場合には，Macdonald多項式による同様の基底の構成が，Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhinによって得られていた。本論文ではこの結果をBC型の場合に拡張している。

Macdonaldによる対称多項式の理論では対称多項式環の基底となるMacdonald多項式が中心的役割を果たす。n変数の場合，Macdonald多項式は深さn以下のYoung図形λでパラメトライズされる。多項式をLaurent多項式に拡張し，変数$\chi=(\chi_1,\dots,\chi_n)$の$n$次対称群による入れ替えの対称性に加えて，各変数$\chi_i$を逆数に置き換える変換に対する不変性を課した場合に，Macdonald多項式に代わるものがKoornwinder多項式であり，$P_\lambda(\chi)$と書かれる。Macdonald多項式の持つ基本的な性質が拡張されるだけでなく，Macdonald多項式の場合がt,qという2つのパラメタを含んでいるのに対し，Koornwinder多項式は6個のパラメタを含むという点で，理論の本質的な拡張になっている。

Koornwinder多項式は，可換な差分作用素の族を同時対角化する基底という条件で特徴づけられる。本論文では6つあるパラメタのうちt,qに対して，$t^{k+1}q^{r-1}=1$という特殊化を考えている。このような特殊化をすると，差分作用素の固有値どうしの間で互いに一致するものが現れ，そのときに半単純性が崩れる場合がある。すなわち自明でないJordan blockが現れる。これは，対応するKoornwinder多項式においてパラメタの有理式である係数が極を持つことに対応している。すなわち，P_λの中には特殊化したときに意味を失うものがある。

多項式環のイデアルは掛け算作用素による不変性が条件であるが，差分作用素と掛け算作用素は交換しないので，差分作用素によって不変な自明でないイデアルの存在は自明ではない。言い替えると，Koornwinder多項式（あるいはMacdonald多項式）による基底を持つようなイデアルが，いつ存在するかという問題は，対称多項式の理論における新しいタイプの問題である。Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhinは，パラメタの上記の特殊化の下で次のような零点条件で特徴づけられるイデアルを考えた。

$$\chi_{i+1}=tq^{s_i}\chi_i \qquad s_i\geq 0,\ s_1+\cdots+s_{k+1}=r-1$$

これはwheel conditionと呼ばれる。

本論文の主要な結果は，BC型の対称性を満たすLaurent多項式の空間で，$t^{k+1}q^{r-1}=1$の場合に上記のwheel conditionによってイデアルを定義すると，その基底がKoornwinder多項式によって構成できるという結果である。イデアルの基底を構成するYoung図形$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$は

$$\lambda_i-\lambda_{i+k}\geq r$$

という条件で特徴づけられる。

以上の結果はA型の場合とパラレルであるが，本論文における証明方法はFeigin-Jimbo-Miwa-Mukhinとは全く異なる。その証明の基本となるのは双対性という等式である。

$$\frac{u_\mu^*(P_\lambda)}{u_0^*(P_\lambda)}=\frac{u_\lambda(P_\mu^*)}{u_0(P_\mu^*)}$$

ここでu_μはYoung図形μによって決まる変数のある特殊化である。また，$*$がついているものはパラメタのinvolutionに付随する変換を表す。

証明は3つの内容からなる。第一に，条件を満たすYoung図形λに対応するP_λに対して今考えているパラメタの特殊化をしたときに，係数が極を持たないことを示す必要がある。第二に，さらにwheel条件に現れる変数の特殊化をしたときに，多項式自体が零点を持つことを示す必要がある。最後に，このようなKoornwinder多項式が考えているイデアルを張っていることを示す必要がある。

最初の2点に双対性が用いられる。特殊化u_0に関しては因数分解した形で明示公式が存在するので，多項式P_λの係数が，u_μ^*という特殊化をしたとき極あるいは零点を持つかどうかは，P_μ^*の係数が極も零ｵ点も持たないようにｵを選んでおけば，ｵ双対公式を使って判定できる。多項式自体の零点についても同様である。最後の部分の証明は次元の勘定をする。有限次元となるようにイデアルの適当な同次成分を考えると，その双対空間の単項的基底が構成できるので，それをYoung図形の個数と比較することによって証明が完結する。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

2重アフィンヘッケ環の多項式表現の既約性についての研究は，申請者等の研究によって大きく発展した。本論文はその基石となった重要な論文である。主要定理は，A型のMacdonald多項式に対するFeigin-Jimbo-Miwa-Mukhinによる結果の類似をBC型のKoornwinder多項式の場合に証明したものであるが，Feigin-Jimbo-Miwa-Mukhinの証明はad hocで，BC型への拡張が困難であるばかりでなく，その後の発展にはつながらないものであった。申請者が，双対性を鍵とする証明を与えたことはその後の発展の鍵になったもので大いに評価される。よって，博士（理学）の学位論文として十分と考える。

以下捕捉として，本論文以降の研究の進展について述べる。申請者の当初の研究では，6個あるパラメタに対して，$t^{k+1}q^{r-1}=1$よりもさらに特殊化した状況を考えていた。この状況では，余計な特殊化をしているため，wheel条件を満たす多項式自身が，極をもってしまう。その状況を乗り越えるために，申請者は双対性を利用して多項式の修正を行なうという手法を考えた。申請論文は，余計な特殊化がない場合に，双対性を用いてFeigin-Jimbo-Miwa-Mukhinによる結果を拡張したものである。

VeselovとSergeevはwheel条件を2重に課した場合にも，Macdonald多項式による基底の構成ができるか，という問題を提起した。この問題は申請者が考えた修正された多項式を使うことによって肯定的に解決された。この問題がきっかけとなって，申請者は，wheel条件を複数個課すことによってイデアルの列を作ることに成功する。これと前後して，Cherednikは2004年の京都滞在中に，Macdonald多項式からなるような基底を持つイデアルの存在を問う問題に対する正しい定式化は，2重アフィンヘッケ環の多項式表現においてパラメタを特殊化したときの既約性を問うことであるという指摘を行なった。さらにCherednikは，既約性判定の鍵となるものはintertwining operatorであるとの注意をしている。彼は2007年に京都滞在中にこのアイデアを実行に移し，reducedなルート系に対応する2重アフィンヘッケ環に対する多項式表現の既約性の判定条件を与える論文を書き上げている。一方申請者は，このCherednikの示唆を受けて，非対称Macdonald多項式を扱える形にA型の理論を完成させた。榎本は申請者の構成したイデアルの列が，2重アフィンヘッケ環の表現空間としての組成列であることを証明している。他方申請者は，非対称Koornwinder多項式の場合を，$C^\vee C$型の2重アフィンヘッケ環のLaurent多項式による表現（野海表現）の問題として捉え，intertwining operatorを用いる解析を行なった。この場合はCherednikの扱った場合からは，はずれている。2重アフィンヘッケ環の生成元のうち，多項式環に可換な差分作用素としてはたらくY生成元たちを同時対角化するときの固有値が一致するという意味での，discriminant locusを決定し，各既約成分のgeneric pointにおける，既約性とYの半単純性を判定した。申請者の用いた手法は，

intertwining operatorおよび非対称Koornwinder多項式を，極が消えるように線形結合によって修正したものを用いるというもので，修正されたintertwining operatorや非対称Koornwinder多項式をもとめる効率的な帰納的定義を与えた。これによってパラメタを特殊化したときの$C^\vee C$型の2重アフィンヘッケ環の多項式表現の構造が解明された。