

氏名	塚本真輝
学位(専攻分野)	博士(理学)
学位記番号	理博第3317号
学位授与の日付	平成20年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	The geometry of the moduli space of Brody curves (Brody曲線のモジュライ空間の幾何)

論文調査委員 (主査) 教授 深谷賢治 教授 重川一郎 教授 河野明

### 論文内容の要旨

塚本真輝の学位論文「Brody 曲線のモジュライ空間の幾何」はプロディー曲線のモジュライ空間の平均次元に関わるものである。

プロディー曲線とは、複素平面から複素射影空間(など)への正則写像であって、Fubini-Study 計量についての、写像のノルムが定数(塚本の規格化では1)以下のものことである。

主論文の内容は、プロディー曲線の作る空間(モジュライ空間)の平均次元についてのものである。

平均次元は、amenable な群が作用する無限次元の距離空間に対して、群作用を法にしてその次元をはかるものであり、距離空間が無限次元であっても、有限の数をしばしば与える。この概念はグロモフによる難解で野心的な論文で提示されたが、その後の研究はあまり進展していなかった。特に、具体的に意味深い空間について、平均次元を計算することは大変困難であり、全くなされていなかった。

プロディー曲線のモジュライ空間には、定義域の複素平面の平行移動を用いて、複素数の加法群が作用し、平均次元が定義される。これについてはグロモフにより正であることが知られていた。

塚本はプロディー曲線のモジュライ空間の平均次元を定数比を除いて決定する、双方向からの、よい評価式を与えた。

その主結果は、プロディー曲線のモジュライ空間の平均次元が、プロディー曲線のエネルギーの平均的な量と、ほぼ比例するというもので、楕円型作用素の指数定理に近いレベルの精密な結果である。(すなわち、平均次元が解析的指数のアナロジーであり、エネルギーの平均的な量が位相的指数(あるいは特性数)のアナロジーである。)

塚本の証明は、平均次元の下からの評価と上からの評価からなり、それぞれに異なった深い考察によりなされている。

エネルギーの平均的な量を正しく定式化するには、清水-Ahlforsの特性関数という Nevalinna の値分布論と深くかかわる量が用いられる。

すなわち、平均次元をエネルギーの平均的な量で、上から評価するには、値分布論のアイデアが用いられる。

「エネルギーの平均的な量」そのものの考察は、参考論文において、パッキングデンシティの考察として興味深い結果が得られている。

一方、平均次元を下から評価するには、無限個のパラメータを持つプロディー曲線の族を構成する必要がある。

塚本は  $L^\infty$  空間と局所ソボレフ空間の混合を用いた局所理論を、関数解析的偏微分方程式の巧みな技巧を用いて建設し、さらに、有限被覆で楕円型作用素の指数定理を用いて、線形化方程式の解を十分に多く作ることで、楕円関数を用いて作ったプロディ曲線の近傍に、プロディー曲線の巨大な族を構成し、プロディー曲線のモジュライ空間の平均次元の下からの評価を与えた。

なお、参考論文の一つでは、有限の  $p$  についての  $L^p$  空間では、平均次元の概念が自明になるという、グロモフの提示した問題の解決が与えられている。

別の一つでは、ヤンミルズ方程式の解を無限個張り合わせるにより、無限次元のヤンミルズ方程式の解の族を（コンパクト多様体を無限個連結した空間上に）構成している。この構成は、本論文での平均次元の下からの評価に関わるものである。

## 論文審査の結果の要旨

塚本真輝の学位論文「Brody 曲線のモジュライ空間の幾何」は、無限次元のモジュライ空間の「次元」に関する意欲的な内容の論文である。

モジュライ空間を微分幾何学的な立場で研究する場合には、非線形方程式の解の空間の適当な同値類を研究することになる。コンパクト多様体上の非線形楕円型方程式の場合、しばしば解空間は有限次元になり、その場合が多くの重要な研究の対象になってきた。一方、非コンパクト空間上のエネルギーが無限の解の空間の場合には、楕円型の場合でも、解の空間は無限次元になる。線形方程式の場合には、この無限次元の空間から、有限の領を取り出す試みがなされ、重要な研究対象となってきた。

塚本の研究は、非コンパクト空間上のエネルギーが無限の非線形方程式の解の空間に関するものであり、いままでほとんど研究がなされていない、困難な対象を研究するものである。

主論文では、射影空間などへの複素平面からの正則写像のモジュライ空間が研究されている。このモジュライ空間は無限次元であるが、複素平面には複素数体（の加法群）が作用する。この作用を用いてグロモフによる平均次元の概念を適用することができる。しかし、平均次元は著しく超越的な操作を用いて定義される量であり、通常はとても計算できるような量ではない。塚本は、上記複素平面からの正則写像のモジュライ空間の場合に、その平均次元を有限比を除いて決定した。

塚本の主結果は平均次元の下からの評価と上からの評価からなる。上からの評価には、値分布論の深い結果が用いられる。

下からの評価には、線形化方程式がFredholm作用素にならない状況下での、線形化方程式の解からの非線形方程式の解の構成、すなわち変形理論が使われる。

平均次元は非コンパクト空間上で線形方程式の次元を数えるのに用いられる、フォンノイマン次元とは、本質的に異なる量であり、とくに $L^2$ 空間や、（さらには有限の $p$ についての $L^p$ 空間）を用いては、考察できず、 $L^\infty$ 空間を用いることが必要である。（この事実は塚本の参考論文の結果の一つによっても明確に把握される）。これが理由で、塚本が用いた変形理論では、 $L^\infty$ 空間と局所ソボレフ空間の混合を用いた局所理論が必要とされる。無限次元のモジュライ空間を構成するのであるから、線形化方程式がFredholm作用素にならない。この状況での変形理論の構成は、従来コンパクト多様体の場合などに知られていたものより、遥かに困難であり、塚本はそれを巧みに乗り越えている。

この構成は、無限個のヤンミルズ方程式の解を張り合わせた、塚本の以前の仕事（参考論文）とも関わるものであるが、より洗練された一般化に耐えうる定式化になっている。

また、塚本が用いたグロモフによる平均次元を定義した論文は、細部が書かれないまま長期間あまり研究されずにいた論文であり、塚本のような研究が現れなければ、理解する人がほとんどいないまま埋もれていった可能性が大きい。

以上のように塚本真輝の学位論文は、著しく困難で、しかし有望かつ斬新な問題に、重要な寄与をしたものであるので、大学院在学5年未満であるが、本論文は、博士（理学）の学位論文として価値あるものであると認めた。また論文内容とそれに関連した事項について、試問を行った結果、合格と認定する。