研究ノート

W. トムソン＆テイト『自然哲学論』
——「ラググランジュの解析力学」から「現代的な解析力学」へ——

橋本 秀和[*]

Thomson & Tait, *Treatise on Natural Philosophy*: From Lagrange's analytical mechanics to modern analytical mechanics

Hidekazu HASHIMOTO

§1　序

現代ラグランジュ形式の解析力学と呼ばれるものはラグランジュ（Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813）の『解析力学』（初版 1788, 第 2 版 1811）にその起源を持つ[1]．ところが,『解析力学』で展開された理論体系と現在ラグランジュ形式で展開される理論体系との間には大きな違いが見られる．簡単に両者の違いを整理しておこう．

1.1　「ラグランジュの解析力学」と「現代的な解析力学」の相違点

『解析力学』では，ダランベールの原理と仮想速度の原理から一般公式と呼ばれる基本方程式

$$\sum m\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z+P\delta p+Q\delta q+R\delta r+\text{etc.}\right\}=0 \tag{1}$$

が導出され（本稿ではこの方程式 (1) を『自然哲学論』にならって変分方程式と呼ぶことにする[2]），変分原理の一種である最少作用の原理，あるいは現在ラグランジュ方程式と呼ばれるものはこの基本方程式から導出される諸原理の一つという位置づけでしかない．本稿ではこのような『解析力学』で展開された理論体系による解析力学を

* （独）製品評価技術基盤機構 scarlet.tachyon@gmail.com

1 『解析力学』については山本（1997）を参照せよ．

2 Thomson and Tait 1867，p. 204．不定または変分方程式（the indeterminate or the variational equation of motion）と呼ばれている．

「ラグランジュの解析力学」と呼ぶこととする．

一方，20 世紀初頭のホイッターカー（Edmund Taylor Whittaker，1873–1956）による有名な解析力学のテキスト[3]以降の多くの解析力学のテキストで展開される理論体系では，まずニュートンの運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$ から出発して，ラグランジュ方程式が導出されることが多いが，理論体系的には，このようなラグランジュ方程式の導出は「ニュートン力学」に慣れている読者への教育的配慮の意味合いが強い．実際，この立場ではニュートンの運動方程式とは異なる方向性から，つまり変分原理（通常はハミルトンの原理）からもラグランジュ方程式を導出する議論がなされ，その後のハミルトン形式との関連を含めて，この変分原理からラグランジュ方程式の導出という流れが理論体系の核となっている．そして，この体系ではラグランジュ方程式から様々な保存則が導出されたりするなど多くの議論がラグランジュ方程式を用いて行われることになり，「Lagrange 方程式こそが力学の基本方程式」[4]と位置づけられている．このように，変分原理を体系の基礎原理に据えて，そこから導出されるラグランジュ方程式を基本方程式として理論が展開される解析力学を本稿では「現代的な解析力学」と呼ぶこととする．

以上で確認したことをまとめると，「ラグランジュの解析力学」と「現代的な解析力学」の体系は図 1 のようになり，前者から後者へと至ることによって解析力学に生じる特徴的な変化は以下のようになる．

1. 体系の基本方程式が変分方程式からラグランジュ方程式へと移行する．
2. 変分原理からラグランジュ方程式が導出されるようになる．

1.2　19 世紀における解析力学

この両者の違いを踏まえて 19 世紀における解析力学の様子を見てみよう．ラグランジュが『解析力学』を世に送り出したのは 19 世紀前後のことである[5]．20 世紀に入って出版されたホイッターカーのテキストではラグランジュ方程式が理論体系の基本方程式として明確に位置づけられていることから解析力学は 19 世紀に「ラグランジュの解析力学」から「現代的な解析力学」へと変容していったと考えられる．

その 19 世紀において解析力学はどのように扱われていたのかに関してマクスウェ

[3] Whittaker 1904.

[4] 山本 1997, 321 頁.

[5] 初版 1788 年, 第 2 版 1811 年.

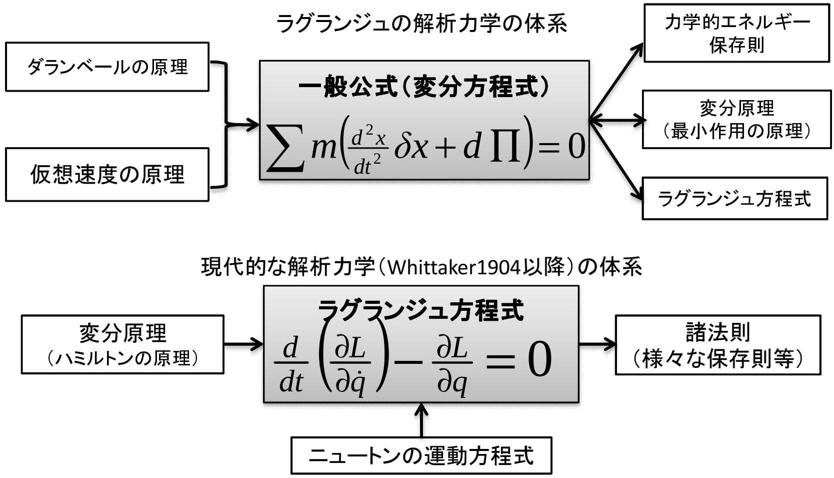

図 1 「ラグランジュの解析力学」と「現代的な解析力学」の体系

ル（James Clerk Maxwell, 1831–1879）は次のように述べている．

> ［ラグランジュの］解析力学が出版された 1788 年以来この［ラグランジュの］方法は数学者の支配下にあり，ハミルトン, ヤコビといった何人かの偉大な数学者がこの動力学の一般理論に大きな貢献をしていたにもかかわらず，一般的な自然哲学者がこの方法を使用するのにどれほど手間取っていたのかは注目に値する．... しかし，現在では，物理学を題材にしたどんな論文を開いても，深遠な数学の聖域から引き出されたこれらの動力学の理論が見出される．... 呪文を使う偉大な能力者［数学者］による独占を解体し，これらの言葉をよく知られた言葉として我々になじみのあるものへと変えた功績はトムソンとテイトにある[6]．

実際 19 世紀中ごろまでは欧州の各国の力学のテキストにおいてはラグランジュ方程式はほとんど登場せず，仮に登場するにしてもあくまで一般公式から導出されるものでしかないという「ラグランジュの解析力学」を踏襲したものである[7]．そこで本稿では，

[6] Maxwell 1879, p. 215.

[7] 当時のフランスの主要なテキストではラグランジュ方程式は使用されていない（Wise 2005, p. 529）．ドイツでもマッハ（Ernst Waldfried Joseph Wenzel Mach, 1838–1916）の有名な *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*（Mach [1883]2006）の第 4 章第 3 節は「解析力学」（Die analytische Mechanik）と題されているが，登場するのは変分方程式であって，やはりラグランジュ方程式は登場しない．イギリス

上述した引用でマクスウェルが名前を挙げたトムソン（William Thomson, 1824–1907）とテイト（Peter Guthrie Tait, 1831–1901）による力学のテキスト『自然哲学論』の初版[8]と第 2 版[9]を考察する．両者を比較すると，「ラグランジュの解析力学」から「現代的な解析力学」への変化が垣間見えるのである．

§2 『自然哲学論』初版

『自然哲学論』初版[10]は 19 世紀中ごろに発見されたエネルギー保存則に基づいて力学理論を再構築しようと作られたテキストであり，当時の動力学理論に大きな影響を与えた[11]．これまでの研究[12]では，このテキストがエネルギー保存則を基礎としていること，ラグランジュやハミルトンの解析力学的手法を取り入れていること等が強調されているが[13]，このテキストの理論体系，さらに初版から第 2 版への変化に対する観点が欠けている．しかし，この点を詳細に検討すれば，ラグランジュ方程式の位置付けに関して大きな違いが両者の間にあることが明らかになる．本章ではこのテキストの初版のうち力学理論について扱われている第 1 部第 2 章の内容を考察し，少なくとも初版の段階では「現代的な解析力学」には到達しておらず，「ラグランジュの解析力学」に近い内容であることを明らかにする．まず，今後の議論の見通しをよくするために，初版の体系を簡単に整理した図 2 をあらかじめ載せておくことにする．この体系の具体的な繋がりについて以下で詳しく見ていこう．

2.1 ニュートンの三法則の再解釈

前述したように，このテキストの理論の基礎となるのはエネルギー保存則である．問題はこのエネルギー保存則からいかにして運動方程式を含んだ実用的な力学理論を導出するかにある．そこで，トムソンとテイトはニュートンの三法則（特に第 3 法則）がエネルギー保存則を含むという再解釈から出発するという方策を採った．ただし，

ではラウス（Edward John Routh, 1831–1907）による力学のテキストの初版（Routh 1860）を見ると，確かにラグランジュ方程式は登場しているものの，『解析力学』と同様に基本方程式という位置づけではない．

8 Thomson and Tait 1867.

9 Thomson and Tait 1879–1883.

10 Thomson and Tait 1867.

11 Harman [1982]1991, 76 頁.

12 Harman [1982]1991；Smith and Wise 1989；Smith 1998；Wise 2005.

13 Wise 2005, pp. 532–533.

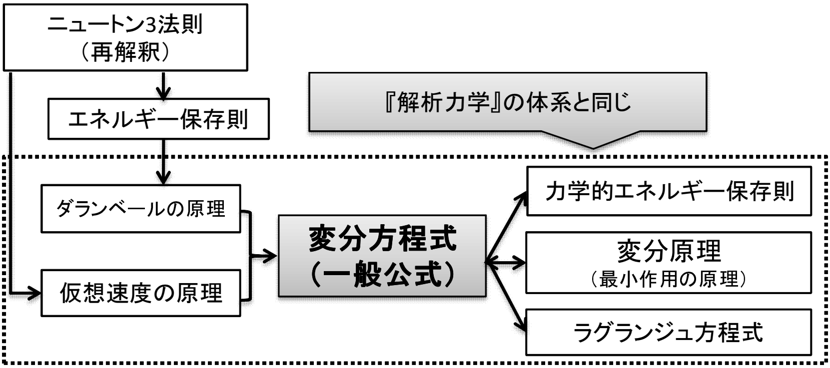

図 2 『自然哲学論』（初版）の体系

この三法則以降の理論展開は現在でいうニュートン力学とは全く異なる．

彼らはまずニュートンの第 1 法則を時間の測定方法の定義と再解釈する[14]．続いて，第 2 法則についてはその時間の定義と組み合わせることで質量及び力の測定方法を定義するものと再解釈し，このような力 X と質量 M の定義から最終的に $M\frac{d^2x}{dt^2} = X$ という有名な運動方程式を具体的な形として表現している[15]．

続いて，彼らは複数粒子によって構成される系の記述に必要なものとして第 3 法則の第 1 の解釈について「平衡時における力の重ね合わせの原理によって，系の点に作用するあらゆる力は，加速力に対する反作用と合わせることで，系全体に作用する力の総計のつりあいを形成する」[16]と述べ，これは有名なダランベールの原理であると宣言する[17]．さらに彼らは第 3 法則をエネルギー保存則とみなす第 2 の解釈を持ち出し[18]，このエネルギー保存則から仮想速度の原理を導出する[19]．

最終的に，この仮想速度の原理を第 3 法則の第 1 の解釈であるダランベールの原理

---

[14] Thomson and Tait 1867, p. 179.

[15] *Ibid.*, pp. 182–183.

[16] *Ibid.*, p. 185．なお，加速力に対する反作用とは，現在でいう加速度運動の際に生じる慣性力のことである．

[17] ダランベールの原理を単純に外力と慣性力のつりあいとして解釈している意味では，『解析力学』の第 2 版ではなく初版の見方（山本 1998, 316 頁）を踏襲していると言える．

[18] Thomson and Tait 1867, p. 188.

[19] *Ibid.*, pp. 200–201．ただし，この「導出」は，このテキストの 1912 年版を編集したラム（Horace Lamb，1849–1934）が脚注で「エネルギー方程式のみから仮想速度の原理を導出するこの試みは決して満足のいくものとみなされない」と指摘しているように，論理的には判然としない．

に対して適用することで変分方程式（ラグランジュの一般公式）を導く．

$$\sum\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0. \tag{2}$$

2.2 諸原理の導出

ラグランジュと同様に，彼らもまたこの変分方程式を体系の基本方程式に据えており，以下で示すように様々な力学理論をこの方程式と結びつけている．

まず，変分方程式が導出された直後に，力学的エネルギー保存則を次のように導出する．保存系においてはポテンシャル V を用いて $-\delta V=\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$ と表すことが可能なので，式 (2) は $\sum -m(\ddot{x}\delta x+\ddot{y}\delta y+\ddot{z}\delta z)=-\delta V$ となる．両辺を積分すると $\sum\frac{1}{2}mv^2=V_0-V+E_0$ （ただし，V_0 は初期ポテンシャル）と力学的エネルギー保存則が導出される[20]．

続いて変分方程式 (2) と最小作用の原理との関係の議論[21]を見てみよう．トムソンとテイトは作用を $A=\int_0^t\sum mv^2d\tau=\int_0^t\sum mvds=\int_0^t\sum m(\dot{x}dx+\dot{y}dy+\dot{z}dz)$ と定義し[22]，最小作用の原理を次のように表現する．

> 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの合計が一定のもとで，保存系がある座標から別の座標へと運動するように導かれるあらゆる経路の中でも作用が最小になる経路では，系は適切な速度で出発しその経路に沿って自ら運動しさえすればいい[23]．

この原理から変分方程式が次のように導出される．

$$\delta A=\int\sum m(\dot{x}d\delta x+\dot{y}d\delta y+\dot{z}d\delta z+\delta\dot{x}dx+\delta\dot{y}dy+\delta\dot{z}dz) \tag{3}$$

の後ろの 3 つの項は，$dx=\dot{x}d\tau$ 等を代入し，さらに $\sum m(\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}+\dot{z}\delta\dot{z})=\delta T$ であることに注意すると，$\int\sum m(\delta\dot{x}dx+\delta\dot{y}dy+\delta\dot{z}dz)=\int_0^t\delta T d\tau$ となる．また，式 (3) の最初

[20] 議論の流れとしては，一般的なエネルギー保存則を理論体系の原理として採用し，その一つの帰結として力学的エネルギー保存則を導出したことになっていることに注意.

[21] *Ibid.*, pp. 231–233.

[22] 当時最少作用の原理はこのように使用されることが多かったらしい（*Ibid.*, p. 231）．なお，テキストではベクトル表記されていないために現代的に見ると最後の等式がつながらないが，作用の定義が $A=\int_0^t\Sigma m\boldsymbol{v}^2d\tau$ とベクトルであると考えれば問題ない.

[23] *Ibid.*, p. 232.

の 3 つの項を部分積分すると次のようになる[24].

$$\int_A^B \sum m(\dot{x}d\delta x + \dot{y}d\delta y + \dot{z}d\delta z) = \left[\sum m\,(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)\right]_A^B - \int_0^t \sum m\,(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z)\,d\tau \tag{4}$$

以上より，$\delta A = [\sum m\,(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)]_A^B + \int_0^t d\tau\,\{\delta T - \sum m\,(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z)\}$ となるが，初期位置と終端位置は不変であると仮定しているので第 1 項目は消える[25]．さらに，最小作用の原理の仮定よりエネルギーは保存され $T + V = E$（一定）となるので，$\delta T = -\delta V$ より $\delta A = -\int_0^t d\tau\,\{\delta V + \sum m\,(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z)\}$ となる．したがって，作用が最小になるように $\delta A = 0$ とするためには，$\sum m\,(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) + \delta V = 0$ でなくてはならないが，これは保存系における変分方程式にほかならない．以上より，最小作用の原理から保存系の変分方程式が導出された[26].

2.3　ラグランジュ方程式の導出

ここまで見てきたこのテキストの議論においては変分方程式が中心にあり，ラグランジュ方程式は一切登場しなかった．ラグランジュ方程式はこれらの議論が終了してからようやく登場する[27] のである．そして，このテキストの初版ではラグランジュ方程式もまたやはり変分方程式から導出される．

まず出発点とされているのは変分方程式

$$\sum m\,(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \tag{5}$$

であり，この式で使用されている直交座標 $x, y, z, \ldots$ を一般化座標 $\psi, \phi, \theta, \ldots$ へと変換していく．まず，(5) の左辺に注目すると，$\sum m\ddot{x}\delta x = \sum m(\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x) - \dot{x}\delta\dot{x})$ となる．$\delta x = \frac{dx}{d\psi}\delta\psi + \frac{dx}{d\phi}\delta\phi + \cdots, \dot{x} = \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{d\psi}\dot{\psi} + \frac{dx}{d\phi}\dot{\phi} + \cdots$ であり，後者より $\frac{d\dot{x}}{d\dot{\psi}} = \frac{dx}{d\psi}$ となるの

[24] テキストでは特に初期位置 A や終端位置 B という記号は使われていない．また，$[\ldots]_A^B$ はテキストの表記では初期位置 A の代入量を $\{\ldots\}$，終端位置 B の代入量を $[\ldots]$ と二つに分けられているが，本稿では簡単のため定積分で用いる現代的な表記で書き換えた．

[25] この仮定は，最小作用の原理の「ある座標から別の座標へと運動するように導かれる経路」という部分に含まれている．

[26] このことから逆に変分方程式が成立すれば最小作用の原理が成立することも自明である．Thomson and Tait（1867, pp. 232–233）の議論はどちら向きの証明とも取れる．

[27] *Ibid.*, pp. 251–253

で，$\delta\dot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\psi}\delta\psi + \frac{d\dot{x}}{d\dot{\psi}}\delta\dot{\psi} + \cdots = \frac{d\dot{x}}{d\psi}\delta\psi + \frac{dx}{d\psi}\delta\dot{\psi} + \cdots$ が得られる．これらから

$$\sum m\ddot{x}\delta x = \delta\psi\Big\{\frac{d}{dt}\sum m\left[\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{d\psi}\dot{\psi} + \frac{dx}{d\phi}\dot{\phi} + \cdots\right]\frac{dx}{d\psi} - \sum m\frac{d}{d\psi}\left[\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{d\psi}\dot{\psi} + \frac{dx}{d\phi}\dot{\phi} + \cdots\right]^2\Big\} + \delta\phi\{\cdots\} + \cdots$$

また，一般化座標の運動エネルギー T については，以下の関係が成立するので

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left\{\left[\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{d\psi}\dot{\psi} + \frac{dx}{d\phi}\dot{\phi} + \cdots\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt} + \cdots\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt} + \cdots\right]^2\right\}$$

$$\frac{dT}{d\dot{\psi}} = \sum m\left\{\left[\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{d\psi}\dot{\psi} + \frac{dx}{d\phi}\dot{\phi} + \cdots\right]\frac{dx}{d\psi} + \left[\frac{dy}{dt} + \cdots\right]\frac{dy}{d\psi} + \left[\frac{dz}{dt} + \cdots\right]\frac{dz}{d\psi}\right\}$$

これらから式 (5) の左辺は $\sum m(\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y + \ddot{z}\delta z) = \left\{\frac{d}{dt}(\frac{dT}{d\dot{\psi}}) - \frac{dT}{d\psi}\right\}\delta\psi + \{\cdots\}\delta\phi + \cdots$ となる．一方で，式 (5) の右辺については

$$\begin{aligned}
&\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\\
&= \sum\left\{X\left(\frac{dx}{d\psi}\delta\psi + \frac{dx}{d\phi}\delta\phi + \cdots\right) + Y\left(\frac{dy}{d\psi}\delta\psi + \cdots\right) + Z\left(\frac{dz}{d\psi}\delta\psi + \cdots\right)\right\}\\
&= \sum\left(X\frac{dx}{d\psi} + Y\frac{dy}{d\psi} + Z\frac{dz}{d\psi}\right)\delta\psi + \sum\left(X\frac{dx}{d\phi} + Y\frac{dy}{d\phi} + Z\frac{dz}{d\phi}\right)\delta\phi + \cdots\\
&= \Psi\delta\psi + \Phi\delta\phi + \cdots
\end{aligned}$$

と書き換えられる（ただし，$\Psi = \sum(X\frac{dx}{d\psi} + Y\frac{dy}{d\psi} + Z\frac{dz}{d\psi}), \Phi = \sum(X\frac{dx}{d\phi} + Y\frac{dy}{d\phi} + Z\frac{dz}{d\phi}), \cdots$）．以上より，式 (5) は最終的に $\left\{\frac{d}{dt}(\frac{dT}{d\dot{\psi}}) - \frac{dT}{d\psi}\right\}\delta\psi + \{\cdots\}\delta\phi + \cdots = \Psi\delta\psi + \Phi\delta\phi + \cdots$ となる．$\delta\psi, \delta\phi, \cdots$ は独立であり，特に保存系では，$-\delta V = \Psi\delta\psi + \Phi\delta\phi + \cdots$ と表されるので，次の現代でいうラグランジュ方程式が導出される．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\psi}}\right) - \frac{dT}{d\psi} = -\frac{dV}{d\psi}, \cdots \tag{6}$$

実はこの初版におけるラグランジュ方程式の導出はラグランジュ自身の導出[28]と本質的には同様の議論であり，トムソンらはラグランジュの手法を踏襲している[29]．

[28] 山本 1997, 325–330 頁.

[29] 『自然哲学論』第 2 版で彼ら自身もそのように述べている（3.1 節参照）.

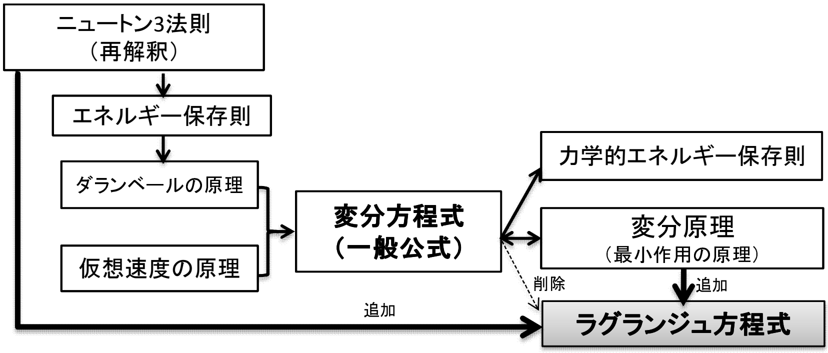

図 3 『自然哲学論』（第 2 版）の体系

§3　『自然哲学論』（第 2 版）

初版の出版から約 10 年後の 1879 年に出版された『自然哲学論』の第 2 版では，「ラグランジュの一般化された運動方程式の取り扱いには大きな改良が加えられている.」[30] この第 2 版を初版と比べると，ニュートン法則の再解釈によってエネルギー保存則を理論体系の基礎に据えて変分方程式を導出するところ，さらに，保存系においてはこの変分方程式から力学的エネルギー保存則を導出するところまでは特に変更されていないが，ラグランジュ方程式の導出方法の変更と最小作用の原理からのラグランジュ方程式の導出の追加という本稿の目的上注目すべき変化がある[31]．第 2 版の体系を簡単に整理した図 3 をあらかじめ示しておこう．この図 3 において新しく加わった部分についての議論を以下で詳しく見ていくことにする．

3.1　ラグランジュ方程式の導出方法の変更

初版ではラグランジュ方程式は変分方程式から導出されていた．そして，このことはラグランジュ方程式が変分方程式という基本方程式からの派生物でしかないという「ラグランュの解析力学」を踏襲するものであった．一方，第 2 版ではラグランジュ方

[30] Thomson and Tait 1879–1883, p. viii. 「ラグランジュの一般化された運動方程式」とはむろんラグランジュ方程式のことである．

[31] 他にも循環座標についての取り扱いなど様々な重要な追加議論がなされている．

程式は直交座標の運動方程式から導出される[32]ことになり，変分方程式は特に登場しない．その導出を簡単に見てみよう．

まず，各点の直交座標の運動方程式 $X_1 = m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}, Y_1 = m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}, Z_1 = m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}, X_2 = m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}, \cdots$ に対して，それぞれ $\frac{dx_1}{d\psi}, \frac{dy_1}{d\psi}, \cdots$ などを乗じて和をとると

$$X_1\frac{dx_1}{d\psi}+Y_1\frac{dy_1}{d\psi}+Z_1\frac{dz_1}{d\psi}+\cdots = m_1\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\frac{dx_1}{d\psi}+\frac{d^2y_1}{dt^2}\frac{dy_1}{d\psi}+\frac{d^2z_1}{dt^2}\frac{dz_1}{d\psi}\right)+m_2(\cdots)+\cdots \quad (7)$$

となる．$\frac{d\dot{x}_1}{d\dot{\psi}} = \frac{dx_1}{d\psi}$ と $\frac{d\dot{x}_1}{d\psi} = \frac{d}{dt}\frac{dx_1}{d\psi}$ を用いると[33]，(7) の右辺の各項が

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\frac{dx_1}{d\psi} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_1\frac{dx_1}{d\psi}\right)-\dot{x}_1\frac{d}{dt}\frac{dx_1}{d\psi} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_1\frac{d\dot{x}_1}{d\dot{\psi}}\right)-\dot{x}_1\frac{d\dot{x}_1}{d\psi} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}_1)^2}{d\dot{\psi}}-\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}_1{}^2)}{d\psi}\right\} \quad (8)$$

となる．これらを (7) の右辺に代入し，さらに $\Psi = \sum\left(X\frac{dx}{d\psi}+Y\frac{dy}{d\psi}+Z\frac{dz}{d\psi}\right)$[34]を式 (7) の左辺に代入すると，$\Psi = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{\psi}}-\frac{dT}{d\psi}$ とラグランジュ方程式が得られる．このようにして，第 2 版では変分方程式を使用せずにラグランジュ方程式が導出されている．トムソンらはこの変更について．「我々の知る限り，我々の初版を含めてラグランジュ以降の著者はみなラグランジュと同じく，不要な変分［直交座標から一般化座標へと変分方程式を変換すること］を経由した証明を行ってきた」[35]と語っており，この変更には「ラグランジュの解析力学」からの解放の萌芽が見られる．しかも，この変更されたラグランジュ方程式の導出方法が実はホイッターカーによるラグランジュ方程式の導出[36]と全く同じであることは注目に値する．

3.2 最小作用の原理からのラグランジュ方程式の導出

また，最小作用の原理に関する議論[37]についても重大な追加がなされている．まず，初版と同様の議論で最小作用の原理から変分方程式を導出した後，「直交座標を一切

---

32 Thomson and Tait 1879–1883，pp. 301–303.

33 これらは，テキストでは特に導出されていない．前者については，2.3 節参照．後者は以下のように導出できる．

$$\frac{d\dot{x}_1}{d\psi} = \frac{d}{d\psi}\left(\frac{dx_1}{d\psi}\dot{\psi}+\frac{dx_1}{d\phi}\dot{\phi}+\cdots\right) = \frac{d^2x_1}{d\psi^2}+\frac{d^2x_1}{d\psi d\phi}+\cdots = \frac{d}{d\psi}\left(\frac{dx_1}{d\psi}\right)\dot{\psi}+\frac{d}{d\phi}\left(\frac{dx_1}{d\psi}\right)\dot{\phi}+\cdots = \frac{d}{dt}\frac{dx_1}{d\psi}$$

34 2.3 節参照．

35 *Ibid.*，p.304.

36 Whittaker 1904, chap. 2.

37 Thomson and Tait 1879–1883, pp. 340–341.

使用することなく，保存系での運動における一般化座標のラグランジュの方程式を最小作用の原理から直接導出することは最小作用の原理の実例として興味深くしかも教育的である」[38]として，以下のように最小作用の原理からもラグランジュ方程式を導出する．

まず，作用は $A=\int 2Tdt$ であるが，ここでの T は一般化座標における運動エネルギー $T=\frac{1}{2}\{(\psi,\psi)\dot{\psi}^2+(\phi,\phi)\dot{\phi}^2+\cdots+2(\psi,\phi)\dot{\psi}\dot{\phi}+\cdots\}$ である[39]．ここで，$T=\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2}$ と置くと，$ds^2=(\psi,\psi)d\psi^2+2(\psi,\phi)d\psi d\phi+\mathrm{etc.}$ となり，$A=\int\frac{ds}{dt}ds$ が得られる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\delta A&=\int\delta\left(\frac{ds}{dt}ds\right)=\int\left(\delta\frac{ds}{dt}ds+\frac{ds\delta ds}{dt}\right)=\int dt\frac{ds}{dt}\delta\frac{ds}{dt}+\int\frac{\frac{1}{2}\delta(ds^2)}{dt}\\
&=\int dt\delta T+\left\{\int\frac{(\psi,\psi)d\psi+(\psi,\phi)d\phi+\mathrm{etc.}}{dt}\delta d\psi\right.\\
&\quad\left.+\int\frac{(\psi,\phi)d\psi+(\phi,\phi)d\phi+\mathrm{etc.}}{dt}\delta d\phi+\mathrm{etc.}\right\}+\int dt\delta_{(\psi,\phi,\mathrm{etc.})}T
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となる（ただし，$\delta_{(\psi,\phi,\mathrm{etc.})}$ は二次関数 T の係数のうち $\psi,\phi,\mathrm{etc.}$ が陽な出現に依存した変分である）[40]．最後の式の $\{\cdots\}$ の項は $\int\frac{dT}{d\dot{\psi}}d\delta\psi+\int\frac{dT}{d\dot{\phi}}d\delta\phi+\mathrm{etc.}$ に等しい[41]ので，$\delta A=\int dt\delta T+\int\frac{dT}{d\dot{\psi}}d\delta\psi+\int\frac{dT}{d\dot{\phi}}d\delta\phi+\mathrm{etc.}+\int dt\delta_{(\psi,\phi,\mathrm{etc.})}T$ となり，これを部分積分す

---

38 *Ibid.*, p. 340.

39 (ψ,ψ) などは係数である．

40 以上はテキストの式変形を忠実に再現してあるが，(9) 式の最後の変形が非常に分かりにくい．しかも，この部分はラグランジュ方程式の導出にクリティカルに効いてくる部分なので，もう少し補足しておこう．まず注意しなければならないのは，直交座標での運動エネルギーは位置には依存しないが，一般化座標での運動エネルギーの場合は，係数 (ψ,ϕ) などが陽に一般化座標 ψ などに依存する場合があると考えなければならないことである．これを踏まえて (9) の 4 つ目の式の第 2 項を計算すると，

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\frac{1}{2}\delta(ds^2)}{dt}&=\int\frac{(\psi,\psi)d\psi\delta d\psi+(\psi,\phi)(d\psi\delta d\phi+d\phi\delta d\psi)+\cdots}{dt}\\
&\quad+\int\frac{\frac{1}{2}d\psi^2\delta(\psi,\psi)+d\psi d\phi\delta(\psi,\phi)+\cdots}{dt}
\end{aligned}
$$

となる．この第 1 項は，(9) の最後の式の $\{\cdots\}$ の項になる．一方，第 2 項は以下のように考えると，$\int dt\delta_{(\psi,\phi,\mathrm{etc.})}T$ となることが分かる．まず，T の一般化座標 $\psi,\phi,\cdots$ だけに関する変分を考えると，前述したように，T のうち，一般化座標 $\psi,\phi,\cdots$ に依存する項は係数 (ψ,ϕ) などだけなので，$\delta_{(\psi,\phi,\mathrm{etc.})}T=\frac{1}{2}\frac{d\psi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\delta(\psi,\psi)+\frac{d\psi}{dt}\frac{d\phi}{dt}\delta(\psi,\phi)+\cdots$ より $\int dt\delta_{(\psi,\phi,\mathrm{etc.})}T=\int\frac{\frac{1}{2}d\psi^2\delta(\psi,\psi)+d\psi d\phi\delta(\psi,\phi)+\cdots}{dt}$ となって，先ほどの第 2 項と $\int dt\delta_{(\psi,\phi,\mathrm{etc.})}T$ が一致する．

41 テキストではこの計算は省かれているが，$\frac{dT}{d\dot{\psi}}=\frac{1}{2dt^2}\frac{ds^2}{d\dot{\psi}}=\frac{1}{2dt^2}(2(\psi,\psi)d\psi+2(\psi,\phi)d\phi+\cdots)$ などより確かに等しくなる．

ると，

$$\delta A=\left[\frac{dT}{d\dot{\psi}}\delta\psi+\frac{dT}{d\dot{\phi}}\delta\phi+\text{etc.}\right]_A^B+\int dt\left\{-\left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{\psi}}+\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{\psi}}+\text{etc.}\right)+\delta T+\delta_{(\psi,\phi,\text{etc.})}T\right\} \tag{10}$$

が得られる．ここで，保存系を仮定すると力学的エネルギー保存則 $T=C-V$ が成立するので，$\delta T=-\left(\frac{dV}{d\psi}\delta\psi+\frac{dV}{d\phi}\delta\phi+\text{etc.}\right)$ となる．一方，T の一般化座標 $\psi,\phi,\cdots$ のみに関する変分は $\delta_{(\psi,\phi,\text{etc.})}T=\frac{dT}{d\psi}\delta\psi+\frac{dT}{d\phi}\delta\phi+\text{etc.}$ となるので，これらを (10) 式に代入すると，

$$\delta A=\left[\frac{dT}{d\dot{\psi}}\delta\psi+\frac{dT}{d\dot{\phi}}\delta\phi+\text{etc.}\right]_A^B+\int dt\left\{-\left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{\psi}}+\frac{dT}{d\psi}+\frac{dV}{d\psi}\right)+(\text{etc.})\,\delta\phi+\text{etc.}\right\}$$

となる．したがって，最小作用の原理，つまり $\delta A=0$ を仮定すると，以下のラグランジュ方程式が得られる[42]．

$$-\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{\psi}}+\frac{dT}{d\psi}+\frac{dV}{d\psi}=0,\text{etc.} \tag{11}$$

§4　結論

『自然哲学論』初版においては『解析力学』と同様に変分方程式が理論体系の基本方程式と位置づけられていたために，ラグランジュ方程式は変分方程式から導出されていたし，最小作用の原理という別の視点からこの理論体系を基礎付ける際にもやはり変分方程式を導出するという作業が行われていた．しかし，第 2 版では，ラグランジュ方程式はまずニュートン法則（直交座標の運動方程式）から直接導出され，後に最小作用の原理からも直接導出されている．ここで，「現在的な解析力学」になるために必要だった 2 つの条件を思い出そう．

1. 体系の基本方程式が変分方程式からラグランジュ方程式へと移行する．
2. 変分原理からラグランジュ方程式が導出されるようになる．

すると，まずラグランジュ方程式が単純に変分方程式から導出されるものではなくなったことによって第 1 の条件，そして，変分原理の一種である最小作用の原理から

[42] この導出において，$\frac{dT}{d\psi}$ の部分が脚注 40 で詳しく見た $\int dt\delta_{(\psi,\phi,\text{etc.})}T$ に基づいていることに注意しよう．つまり，直交座標空間では，運動エネルギーは速度にのみ依存するので $\frac{dT}{d\psi}$ は 0 となってこのような項は不要ではあるが，一般化座標空間では，運動エネルギーが位置に依存する可能性からこの $\frac{dT}{d\psi}$ という項が出現するのである．

ラグランジュ方程式の導出がなされたことによって第 2 の条件に大きな進展が見られる．したがって，この『自然哲学論』（第 2 版）は「ラグランジュの解析力学」から「現代的な解析力学」への一歩を確実に進んでいると言っていいだろう．

この初版から第 2 版への変更の背景には何があるのだろうか．第 1 の条件に関連しては,『自然哲学論』初版が世に出てからしばらくして，マクスウェルがラグランジュ方程式を電磁気分野へと適用することでその有用性を広めた[43]ことが影響を与えた可能性が考えられる．しかし，このマクスウェルの試みと『自然哲学論』の初版から第 2 版への変化との因果関係はまだはっきりしておらず，今後さらに検討が必要である．

一方，第 2 の条件についてであるが，例えば，最小作用の原理と熱力学第 2 法則との間に強い関係があると当時思われており[44]，また，19 世紀後半のドイツではヘルムホルツを筆頭に変分原理に関する研究が盛んだった[45]．この問題は，19 世紀後半の物理学全体と深く関わりがある壮大なもので，19 世紀後半の解析力学の発展の歴史を探る上で大きな課題となるだろう．

参考文献

Boltzmann, L. [1866]1970 年. 「熱理論の第 2 法則の力学的意義」『物理学古典論文叢書 6 統計力学』恒藤敏彦訳．東京：東海大学出版会.

Harman, P. M. [1982]1991. 『物理学の誕生』杉山滋郎訳．東京：朝倉書店．［原著：*Energy, force, and matter* (Cambridge University Press, 1982)］

Helmholtz, H. v. [1886]1895. Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. In Bd. 3 of *Wissenschartliche Abhandlungen,* pp. 203–248. Leipzig: Johann Ambrosius Barth.

Hölder, O. 1896. Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math. Phys. Klasse* 1896: 122–157.

Mach, E. [1883]2006. 『マッハ力学史』岩野秀明訳．東京：筑摩書房．［原著：*Die*

[43] Maxwell 1873, chap. 6．後にラグランジュ方程式の他分野への応用を試みる J. J. トムソン（Joseph John Thomson，1856–1940）もマクスウェルのこの成功を称えている（Thomson J. J. 1885, p. 308)．

[44] Boltzmann [1866]1970.

[45] Helmholtz [1886]1895 ; Hölder 1896 ; Planck [1909]1970．プランクによると，「ヘルムホルツ（1886）は最小作用の原理を物理学一般に，力学，電気力学，熱力学に広く適用し，当時可能であったものを全てを系統づけた」（Planck [1909]1970, 111 頁）らしい.

Mechanik in ihrer Entwicklung: historisch-kritisch dargestellt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1933)]

Maxwell, J. C. 1873. *A treatise on electricity and magnetism*. Oxford: Clarendon Press.

Maxwell, J. C. 1879. Thomson and Tait's *Natural Philosophy*. *Nature*. 20: 213–216.

Planck, M. [1909]1970.「物理学的世界像の統一」『世界の名著 66 現代の科学 II』湯川秀樹・井上健編．東京：中央公論社.

Routh, E. J. 1860. *An elementary part of a treatise on dynamics of a system of rigid bodies*. 1st ed. London: Macmillan.

Smith, C. 1998. *The science of energy*. London: Athlone Press.

Smith, C and M. N. Wise. 1989. *Energy and empire: A biographical study of Lord Kelvin*. Cambridge: Cambridge University Press.

Thomson, J. J. 1885. On some applications of dynamical principles to physical phenomena. *Philosophical Transactions* 176: 307–342.

Thomson, W. and P. G. Tait. 1867. *Treatise on natural philosophy*. Oxford: At the Clarendon Press.

Thomson, W. and P. G. Tait. 1879–1883. *Treatise on natural philosophy*. 2nd ed. 2 vols. Cambridge: At the University Press.

Whittaker, E. T. 1904. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies: With an introduction to the problem of three bodies*. Cambridge: University Press.

Wise, M. N. 2005. William Thomson and Peter Guthrie Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, first edition (1867). Ch. 40 of *Landmark writings in western mathematics, 1640–1940*, ed. I. Grattan-Guinness, pp. 521–533. Amsterdam: Elsevier.

山本義隆．1997 年．『古典力学の形成：ニュートンからラグランジュへ』東京：日本評論社.