

# アンサンブル概念の起源をめぐって ヘルムホルツからボルツマンへ

稲葉 肇\*

On the origin of the concept of ensemble:  
From Helmholtz to Boltzmann

Hajime INABA

## §1 はじめに

アンサンブルとは、マクロな状態としては同じだが、ミクロな状態は互いに異なるような、多数の系を集めた集団である。統計力学においては、マクロな系は、それに対応する多数のミクロな系の集団からランダムに取られたものであると前提され（等重率の原理）、この前提のもとで様々な計算が行われる。アンサンブルに基づいた統計力学の体系を整備したのはギブスであるとするのが一般的であろう。

しかし、アンサンブルに基づいた体系の整備と、アンサンブルの発案そのものとは異なる。ギブス自身、この種の研究はボルツマンおよびマクスウェルに始まると明言しているのである<sup>1</sup>。広重によれば、ボルツマンが多原子分子全体を系の集団とみなして気体の性質を研究した（1871年）のを受け、マクスウェルがこのアイデアを取り上げ、明確に系の集団としてのアンサンブル概念を導入するに至った（1879年）。これらの研究を発展させたのが1902年のギブスの業績なのである<sup>2</sup>。

一方で、1880年代には、ボルツマン独自のアンサンブルに関する研究が展開されたことが知られている。ボルツマンはアンサンブルにあたる概念のことを「総体」

---

\* 日本学術振興会特別研究員（DC2）・京都大学大学院文学研究科科学哲学科学史専修博士後期課程。本稿は、科学研究費補助金（特別研究員奨励費「ギブスの統計力学に関する研究—物理化学史の観点から—」）による研究成果の一部である。また、本稿の作成にあたり、有賀暢迪、中尾央、大西勇喜謙の各氏から有益なコメントを頂いた。記して感謝申し上げる。

<sup>1</sup> Gibbs [1902]1981, p. v-vi.

<sup>2</sup> 広重 1968, pp. 236-240.

(Inbegriff) と呼んだ<sup>3</sup>。また、クラインとピアハルターによれば、ボルツマンはヘルムホルツが行っていた「単循環系」という力学的な系に関する研究の影響を受けてアンサンブルにあたる概念を発展させたという<sup>4</sup>。しかし、実際にどのような点で影響を受けたのか、特に、ボルツマンがヘルムホルツから受け継いだ道具立てや、目標の設定の仕方に関しては、未だ分析の余地が多くあるように思われる。

本稿では、ボルツマンの「総体」概念を、ヘルムホルツの延長線上にあるものという視点から検討する。§2 では、ヘルムホルツによる「単循環系」の導入と、それによる成果について述べる。続いて §3 では、ボルツマンの「総体」概念をめぐる考察を紹介し、彼に対するヘルムホルツの影響について考察しよう。これにより、熱力学的な系とのアナロジーを論ずるという問題意識や、「単循環系」などの使用する道具立ての点で、ボルツマンがヘルムホルツの影響下にあることが示される。最後に §4 で簡単にまとめを行い、今後の課題について述べよう。

## §2 ヘルムホルツの「単循環系」

「単循環系」(monocyklisches System) とは、現代的に言えば、循環座標がひとつだけ含まれているような力学系のことである。ヘルムホルツは、「単循環系」において成立する関係式と、熱力学において成立する関係式とのアナロジーを論じた。その議論の概略(2.1)と、アナロジーという言葉に彼が込めた意図(2.2)について見てみよう。

### 2.1 「遅く変化する座標」「速く変化する座標」「単循環系」

1884年3月、ヘルムホルツは「単循環系の静力学の研究」と題する研究を発表した<sup>5</sup>。「単循環系」とは、論文冒頭にある導入的な説明によれば、「その内部に一つまたは多数の安定な、元に戻る運動が存在し、それが多数あるときは、速度においてはただ

<sup>3</sup> Brush 1986, p. 368.

<sup>4</sup> Klein 1973, p. 67 ; Bierhalter 1992, pp. 55–57

<sup>5</sup> Helmholtz 1884c. この論文に関しては、書誌事項が若干複雑なので、説明を加えておく。初出は *Sitzungsberichte der Königlich Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 誌で、ヘルムホルツは3月6日と27日の2回報告を行っている。この後ヘルムホルツは、*Journal für reine und angewandte Mathematik* 誌に「単循環系の静力学の原理」を2回に分けて出版しているが、これは *Sitzungsberichte* に掲載されたものの一部を再掲するとともに、大幅に説明を拡充している (Helmholtz 1884a ; Helmholtz 1884b ; 1884年11月執筆)。本稿では、クラウジウスやボルツマンが参照していることもあり、主として *Sitzungsberichte* に掲載された方を参照する。「単循環系」に関しては、ヘルムホルツは同年のうちに、クラウジウスからの批判に対する反駁 (Helmholtz 1884d, 7月10日報告) や、ハミルトンの原理を用いた一般化および修正 (Helmholtz 1884e, 12月18日報告) を行っている。

一つのパラメータにのみ依存しているような力学系」のことであるが、より正確な定式化は以下ようになる。Φ を系のポテンシャル・エネルギー、L を運動エネルギーとし、 $H = \Phi - L$  とおこう<sup>6</sup>。外力  $P_a$  が座標  $p_a$  に働いており、 $q_a$  を  $p_a$  の時間微分だとすると<sup>7</sup>、運動方程式は

$$P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial H}{\partial q_a} \right] \quad (1)$$

となる。「単循環系」は、この運動方程式に対する一種の制限として導入される。ヘルムホルツは、 $p_b$  を「速く変化する座標」と呼び、その変化の間には Φ も L も顕著には変化しないために、Φ も L も  $q_b = dp_b/dt$  には依存するが、 $p_b$  には依存しなくなる、と仮定する<sup>8</sup>。その結果、運動方程式 (1) は、 $P_b = +\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial H}{\partial q_b} \right]$  となる<sup>9</sup>。このような速度  $q_b$  が一つだけ存在するような系が、「単循環系」と呼ばれるのである<sup>10</sup>。

ヘルムホルツは「単循環系」に関して、 $s_b = -\partial H/\partial q_b$  とおいた時に、「運動  $q_b$  の加速のために使われる外部の仕事」 $dQ_b = -P_b \cdot q_b \cdot dt$  が  $dQ_b = q_b \cdot ds_b$  と書けることを示している<sup>11</sup>。他方で、 $p_a, q_b$  は非常に遅く変化するとされ、 $q_a, dq_a/dt, dq_b/t$  のかかった項は一次のオーダーで無視できる、とヘルムホルツは述べる。そこで、このような「遅く変化する座標」 $p_a$  に対して運動方程式 (1) は  $P_a = -\frac{\partial H}{\partial p_a}$  となる<sup>12</sup>。「単循環系」に関しては、他にヘルムホルツは、系の全エネルギー  $U$  が  $U = H - q_b \cdot \partial H/\partial q_b$  と書けること、そして  $dQ_b$  が

$$dQ_b = dU + \sum [P_a dp_a] = q_b \cdot ds_b \quad (2)$$

となることを示している<sup>13</sup>。この関係式 (2) が、熱力学と「単循環系」の関係を考える上で重要な役割を果たすのである。

<sup>6</sup> ヘルムホルツ自身は、L を「活力」(lebendige Kraft) と呼んでいる (Helmholtz 1884a, p. 165)。H は、今日のラグランジアンに負号をつけたものである。

<sup>7</sup> 現在の解析力学では、 $q$  を座標とするのが一般的であるが、ここではヘルムホルツの表記法に従った。

<sup>8</sup> 当初ヘルムホルツは  $p_b$  の変化が「元に戻る」(in sich zurücklaufende) ようなものである、すなわち周期的なものであることを仮定する、と明確に述べていた (おそらくこれが「単循環系」という名称の由来であると思われる)。クラウジウスはこの仮定が強すぎ、結局「単循環系」の適用範囲が狭くなる、と批判しているが、ヘルムホルツはこれに応じて「元に戻る」という仮定は説明のためのものであり、本来は不要であることを強調している (Helmholtz 1884d, p. 756)。

<sup>9</sup> Helmholtz 1884c, pp. 165-167.

<sup>10</sup> 実際にはヘルムホルツは、「単循環系」を扱う場合には速度  $q_b$  の添字を落として表記している。

<sup>11</sup> Helmholtz 1884c, p. 167.

<sup>12</sup> Helmholtz 1884c, p. 168.

<sup>13</sup> Helmholtz 1884c, p. 169。ヘルムホルツは式 (2) の右辺を  $s \cdot dq_b$  としているが、計算が合わないこと、また後の温度に関する発言からして誤植と思われる。

## 2.2 「単循環系」と熱力学系のアナロジー

このような変形をヘルムホルツが行うのは、「これらの関係式は、完全に上で熱運動に関して確立されたものと同じ形をしている」と述べているように、熱力学における関係式とのアナロジーを行うためである。特にヘルムホルツは、温度とのアナロジーを詳しく調べている。例えば、式(2)は、熱力学において、系に出入りする熱  $dQ$ 、温度  $\theta$ 、エントロピー変化  $ds$  の間に成立する  $dQ = \theta \cdot ds$  という式と同じ形をしており、温度  $\theta$  の代わりに速度  $q_b$  が現れている。また、温度  $\theta$  は出入りする熱  $dQ$  の積分分母となるが、これと同様に速度  $q_b$  は「運動  $q_b$  の加速のために使われる外部の仕事」 $dQ_b$  の積分分母となっている<sup>14</sup>。

もっとも、 $dQ = \theta \cdot ds$  において積分分母になる、ということだけが温度の性質ではない。ヘルムホルツは、アナロジーを行うための比較対象となる温度の性質を、2つの物体の間の熱平衡状態に関係付けて理解しており、「単循環系」における温度の対応物にも同様の性質を求めていくのである。実際、彼は論文の最初の節において熱力学の法則を要約しているが、その中で  $dQ = \eta \cdot ds$  なる形の式に対して、

熱運動の物理的な特性に対して特徴的なものは、 $dQ$  の表現が最後に挙げた形にもたらされることができる、という事情ではなく、むしろ次のことのみに存する：方程式  $dQ = 0$  の可能な積分分母  $\eta$  のひとつが、熱平衡がその間に成立しているような2つの物体それぞれに対して同じ値を持たなければならない。

と述べている<sup>15</sup>。これに対応して例えばヘルムホルツは、同じ積分分母を持った2つの「単循環系」を結合させるという操作を考えている。そのような結合を彼は「等分母結合」(isomere Koppelung)と呼び<sup>16</sup>、等しい角速度(これが  $q_b$  にあたる)を持つ2つのコマの軸を結合させるという操作を例として挙げている。また、ヘルムホルツはいわゆる熱力学第0法則に対応する命題を、「3つの単循環系に対する対応する条件は、次のように定式化できる：結合方程式<sup>17</sup>が一方では1と2の間で、他方では1と3の間において満たされるたびごとに、その方程式が2と3の間で満たされることが

<sup>14</sup> Helmholtz 1884c, pp. 169–170.

<sup>15</sup> Helmholtz 1884c, p. 165.

<sup>16</sup> Helmholtz 1884c, p. 171. isomor は、「等しい分母」を意味するギリシア語 ἴσον μόριον から作られた造語である。

<sup>17</sup> 2つの「単循環系」の間の力学的な結合を表現する方程式のこと (Helmholtz 1884c, p. 311)。

要請される」<sup>18</sup>として、「単循環系」に関して確立しようとしている。

以上のように、ヘルムホルツは「単循環系」が熱力学的な系に類似した性質をいくつか持つことを示した。ただし、ヘルムホルツは「単循環系」による熱力学的な系の性質の「説明」を主張するわけではない。これは熱運動が厳密な意味で「単循環」ではないからであり、この点はクラウジウスからの批判に応えて提出した続編の中で明確に述べられている<sup>19</sup>。

では、このような研究を行う動機は何だろうか。ヘルムホルツは、熱に関して我々は漠然とした描像しか得ていないために、さしあたって力学的に類似した系を作り上げることが合理的だと述べている<sup>20</sup>：

そのような状況においては、次のことを調べるのが完全に合理的な方法であるように私には思える：どのような最も一般的な条件のもとで、既知の最も一般的な熱運動の物理的特性が、他のよく知られた種類の運動において生ずるのだろうか。

熱力学的な系の持つ性質が、力学的な系においてどの程度再現されるのか、という問題意識は、この後ボルツマンに引き継がれる。ボルツマンは「総体」を用いて、ヘルムホルツの問題意識と道具立てを継承した議論を行うのである。

### §3 ボルツマンの「総体」

ボルツマンは、今日のアンサンブルに相当する概念に対して「総体」という言葉を最終的に用いるようになる。彼が「総体」を導入した目的意識はヘルムホルツのそれを継承するものであり(3.1)、「総体」を用いた議論の内容に「単循環系」の影響が認められる(3.2)。使用する道具立てと、目指す目標の点で、ボルツマンがマクスウェルはもちろん、ヘルムホルツの影響下にもあることを示していこう。

---

<sup>18</sup> Helmholtz 1884c, p. 314.

<sup>19</sup> Helmholtz 1884d, p. 757.

<sup>20</sup> Helmholtz 1884d, p. 757.

### 3.1 ヘルムホルツの路線の継承

既に1871年、ボルツマンは多原子分子を、原子という系の集団として考えることで、気体論に関してそれまで得ていた結果を再導出していたが<sup>21</sup>、その後この方法を直接展開させることはなかった。ボルツマンが多数の系の集団というアイデアに立ち戻るのは、マクスウェルがアンサンブルにあたる概念を導入(1879年)してから後のことであり、それが本格的に展開されるのが1884年に出版された論文「単循環系と、それに関係した系の性質について」においてである<sup>22</sup>。

この論文においては、しかし、ボルツマンはマクスウェルに言及しつつも、ヘルムホルツの「単循環系」との関係の上で、この新たな概念を用いた。このことは、冒頭の問題意識の記述から明らかである<sup>23</sup>：

そこでは、熱物体と完全に一致した力学系を作り上げるのではなく、むしろ熱物体の振舞いと多かれ少なかれアナロジーを示すようなすべての系を見出すことが問題になる。このような仕方では、問題がまずフォン・ヘルムホルツによって立てられ、私は以下で彼によって発見された、単循環として指し示される系と力学的熱理論の命題との間のアナロジーを、単循環なものと同様に結びつきたいいくつかの系においてさらに追究することを意図している。

そして、ボルツマンは「単循環」でない系でも、その集団を考えることによって「単循環系」に変換できることがある、と論じた。例えば彼によれば、楕円軌道上を中心力によって周回する一つの質点の運動は「単循環」ではないが、適切な仕方では多数の質点を軌道上に分布させることによって「単循環」な系へと変換できる。この時、多数の質点を考えるという操作において、それまでマクスウェルや彼自身によって用いられた道具立てが使用されるのである。「総体」は、このような例を論じた後に、より一般的な場合を考察しようとの意図のもとに導入されたものである。

<sup>21</sup> Boltzmann 1871. 1870年代のボルツマンとマクスウェルのアンサンブルに関する研究については、広重(1968, p. 236-237)を参照せよ。

<sup>22</sup> Boltzmann 1884. この論文も、書誌事項が若干複雑なので説明を加えておく。初出は *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Wissenschaften Classe. 2. Abt.* 誌(1884年6月17日の会合に論文送付)であるが(Boltzmann 1884)、後に *Journal für reine und angewandte Mathematik* 誌に再録された上で、内容が拡充された(Boltzmann 1885)。本稿では、主として前者を参照する。

<sup>23</sup> Boltzmann 1884, p. 281.

「総体」の導入に必要な用語を確認しておこう。「モノード」(Monode)とは、周期的ではないが、その任意の点において運動が不変なまま持続する、安定な系のことを指す。また運動エネルギーが、系の内部運動の上昇に使われる仕事  $dQ$  の積分分母である場合は、その系は「オルトード」(Orthode)と呼ばれ、「すべてのオルトードに対して、力学的熱理論のそれと完全にアナログカルな方程式が成立する。」<sup>24</sup> これらの用語の導入は、「単循環系」の性質を下敷きに行っていると考えられる<sup>25</sup>。

### 3.2 「ホロード」と「エルゴード」の導入

「単循環系とそれに関係した系の性質について」では、「ホロード」(Holode)と「エルゴード」(Ergode)という2種類の「総体」が論じられている。系の状態が座標  $p_1, \dots, p_g$  と運動量  $r_1, \dots, r_g$  によって記述され、 $\psi, \chi$  がそれぞれ系の運動エネルギー<sup>26</sup>とポテンシャル・エネルギーであるとする。また、系にかかっている外力が遅く変化するとする。ボルツマンによれば、非常に多くの  $N$  個の正確に同じ性質の系が存在し、それらが互いに依存していないとき、座標と運動量がそれぞれ  $d\sigma = \Delta^{-1/2} dp_1 \dots dp_g, d\tau = dr_1 dr_2 \dots dr_g$  ( $\Delta$  は運動エネルギーを二次形式で表したときの係数を並べた行列の行列式)の間に入っているような系の数は

$$dN = N e^{-h(\chi+\psi)} \frac{\sqrt{\Delta} d\sigma d\tau}{\iint e^{-h(\chi+\psi)} \sqrt{\Delta} d\sigma d\tau} \quad (3)$$

で与えられる<sup>27</sup>。これらすべての系を集めた「総体」(Inbegriff)が「モノード」を構成し、「ホロード」と呼ばれることになるのである。「ホロード」の全運動エネルギー  $L$  は内部運動の直接的な上昇に用いられる仕事  $\delta Q$  の積分分母となるので、「ホロード」は「オルトード」である。ボルツマンは、「従って、残りの熱理論的なアナロジーが存在しなければならぬ」と述べ、実際にヘルムホルツと同様の論法でもって熱力学的な関係式と同じ形をした式を立てている<sup>28</sup>。

これに対して「エルゴード」は、 $N$  個の系が運動エネルギーの方程式のみによって制限されている「モノード」として導入される<sup>29</sup>。やはり全運動エネルギー  $L$  は  $\delta Q$

<sup>24</sup> Boltzmann 1884, p. 238.

<sup>25</sup> なお、これらのボルツマン独特の用語の語源については、次が参考になる：Gallavotti (1995)。

<sup>26</sup> ヘルムホルツと同様、ボルツマンは「活力」と呼んだが、本稿では運動エネルギーと呼ぶ。

<sup>27</sup> 分布を決める本質的な部分は  $e^{-h(\chi+\psi)}$  であり、これは今日のマクスウェル=ボルツマン分布、あるいは系の集団であることを想起すればカノニカル・アンサンブルに対応する。

<sup>28</sup> Boltzmann 1884, p. 240-241.

<sup>29</sup> 今日のミクロカノニカル・アンサンブルに対応する概念である。いわゆるエルゴード仮説との関係に

の積分分母となり、エントロピーに対応する量がアナロジーにより提示される<sup>30</sup>。「エルゴード」に関して特に注目されるのは、ボルツマンが「単循環系」との関係を明確に述べていることである。「単循環系」とは、ただひとつの速く変化する座標を持った「エルゴード」に他ならないのであり、それゆえに「エルゴード」に関して見出された式は、熱物体に対するのと同様に、唯一の速度を持つ「単循環系」に対して通用する。これによって、ヘルムホルツによって見出された回転運動と理想気体の間のアナロジーが説明される、というのである<sup>31</sup>。「エルゴード」が熱力学的な系と「単循環系」の関係を示すために用いられていることがわかる。

ところがボルツマンは、「エルゴード」を始めとする「総体」と、熱力学的な系の関係を同論文の中で明示的に説明することはしていない。次に「総体」が登場するのは、1887年「熱力学第二主則の力学的アナロジーについて」であるが、ここでも明確にその関係を説明してはいない。ただボルツマンは、熱物体を数学的に表現することの困難に触れ、それはたかだか次のような手法によって許される、と述べている<sup>32</sup>：

唯一の系の代わりに、無限に多くの、完全に同じ性質の系があると仮定しよう。その中では、それぞれの系に等しい量のエネルギーが含まれており、しかしながら残りの点ではすべての可能な初期状態を取るものとする。

ボルツマンは、このように導入された多数の系の「総体」について、「総体」全体におけるエネルギーなどの量の平均値と、個々の系に対するそれらの量の値とが（系の初期状態に顕著に依存していないときに）一致することを述べ、従って「総体」全体における平均値を計算するだけで十分である、と主張している。ただ、このような主張が「総体」と力学的な系との関係に関するものか、それとも熱力学的な系との関係に関するものかは判然としない。

むしろここで注目されるのは、ヘルムホルツとの関係である。ボルツマンは「総体」中の系について、「それぞれの系の座標を2種類に分割しよう」と述べ、ヘルムホルツの「遅く変化する座標」と「速く変化する座標」の区別を導入し、前者が熱力学における仕事を特徴付け、後者が熱を表現する、としている<sup>33</sup>。この区別の導入によって、

---

については次を参照せよ：Brush 1986, section 10.10, esp. p. 364

<sup>30</sup> Boltzmann 1884, p. 242.

<sup>31</sup> Boltzmann 1884, p. 244.

<sup>32</sup> Boltzmann 1887, p. 206.

<sup>33</sup> Boltzmann 1887, p. 207.



「この種のすべての研究に、一挙にこれまで思いがけなかったような明瞭さがもたらされた」とボルツマンは述べているが、これは単なるヘルムホルツの概念の紹介ではない。実際に「エルゴード」に関して、「遅く変化する座標の値が定数である限り」系の分布が安定であると述べているように<sup>34</sup>、2種類の座標の区別がボルツマンの議論に効いているのである。

ただしボルツマンは、ヘルムホルツが行ったような、2つの熱物体の接触に際して温度が等しくなることや、熱力学第0法則に対応する議論は行わなかった。また、彼はこの後に「総体」を用いて大きく理論を展開することもせず、アンサンブルを用いて統計力学全体を構築する仕事はギブスが行うことになる。

## §4 まとめと展望

本稿の目的は、ボルツマンの「総体」概念を、ヘルムホルツの「単循環系」の延長線上にあるものという視点から検討することであった。これまで述べてきた事情に基づけば、ボルツマンの「総体」概念は、次の2点においてヘルムホルツの「単循環系」を継承していると言える：

- 目標：ヘルムホルツは「単循環系」によって、熱力学系で成立する関係式とのアナロジーを行っていた。ボルツマンが系の集団を考え、「総体」を導入したのは、「単循環」でない系を「単循環系」に変換するためであり、またそれによりヘルムホルツと同様のアナロジーを行っていたのであった。従って、ボルツマンは、ヘルムホルツの「単循環系」の適用範囲をより広めようとしたと考えられる。
- 使用した道具立て：ヘルムホルツの「単循環系」においては、「遅く変化する座標」「速く変化する座標」の区別を導入することが、アナロジーを行う式の導出のために効いていた。ボルツマンは、この区別を継承し、「遅く変化する座標」が熱力学における仕事に、「速く変化する座標」が熱に対応すると考えた。「総体」という新しい概念の中にも、ボルツマンはヘルムホルツの道具立てを組み入れていたのである。

ただしアナロジーに関しては、2つの熱物体が接触した際に両者の温度が等しくなることや、熱力学第0法則などの、ヘルムホルツだけが言及しているアナロジーも

<sup>34</sup> Boltzmann 1887, p. 208.

あった。ボルツマンがこれらの熱力学的な命題を扱うことを無理だと判断したのか、それとも単に無視しただけなのか、あるいは何かまったく別のことを考えていたのかは、今後検討すべき課題だろう。その他の課題としては、本稿では簡単にしか触れなかったマクスウェルとボルツマンの関係を分析することが挙げられる。また、熱力学とのアナロジーに関してはギブスにも共通するものが見られる<sup>35</sup>が、このような広く見られるアナロジーがそもそも一体何のための議論だったのかを十分に明らかにするためには、よりいっそうの史料の検討が必要である。

## 参考文献

- Bierhalter, Günter. 1992. Von L. Boltzmann bis J. J. Thomson: Die Versuche einer mechanischen Grundlegung der Thermodynamik (1866–1890). *Archive for History of Exact Sciences* 44: 25–75.
- Boltzmann, Ludwig. 1871. Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe. 2. Abt.* 63: 679–711.
- . 1884. Über die Eigenschaften monocyclischer und anderer damit verwandter Systeme. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe. 2. Abt.* 90: 231–245.
- . 1885. Ueber die Eigenschaften monozyklischer und anderer damit verwandter Systeme. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 98: 68–94.
- . 1887. Ueber die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 100: 201–212.
- Brush, Stephen G. 1986. *Statistical physics and irreversible processes*. Bk. 2 of *The kind of motion we call heat: A history of the kinetic theory of gases in the 19th century*. Amsterdam: North-Holland.
- Gallavotti, Giovanni. 1995. Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond. *Journal of Statistical Physics* 78: 1571–1589.
- Gibbs, Josiah Willard. [1902]1981. *Elementary principles in statistical mechanics: Developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics*. Woodbridge, Conn.: Ox Bow Press.

<sup>35</sup> ギブスの統計力学理論については稲葉(2010, pp. 4–6)、広重(1968, p. 239)を参照せよ。

- Helmholtz, Hermann von. 1884a. Principien der Statik monocyclischer Systeme. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 97: 111–140.
- . 1884b. Principien der Statik monocyclischer Systeme. Zweiter Aufsatz. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 97: 317–336.
- . 1884c. Studien zur Statik monocyclischer Systeme. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1884: 159–177, 311–319.
- . 1884d. Studien zur Statik monocyclischer Systeme (zweite Fortsetzung). *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1884: 755–760.
- . 1884e. Verallgemeinerung der Sätze über die Statik monocyclischer Systeme. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1884: 1197–1202.
- Klein, Martin J. 1973. Mechanical explanations at the end of the nineteenth century. *Centaurus* 17: 58–82.
- 広重徹 . 1968 年 . 『物理学史 I』東京 : 培風館 .
- 稲葉肇 . 2010 年 . 「ギブスの熱力学と統計力学 物理化学の視点から」『科学史研究』第 49 巻 , 1–10 頁 .

