坑道周辺応力状態および覆工応力に関する基礎的研究

川　本　眺　万

坑道周辺応力状態および覆工応力に関する基礎的研究

川　本　眺　万

坑道周辺応力状態および覆工応力に関する基礎的研究

川　本　眺　万

緒　　　言

国土総合開発のためには各種の公共施設を完備して、産業の基盤を確立しなければならない。産業の発展にともなつて各種の分野で新しく研究開発が進められているが、土木工学の分野においても現在のわが国の情勢からみて、とくに陸上輸送施設の整備拡充および動力資源の開発などの問題が大きく取り上げられねばならない。陸上輸送機関としては従来は、もつぱら輸送量の大きいことや長距離輸送の容易なことなどのゆえに、鉄道が用いられていたが、最近では自動車の迅速性、機動性、簡便性に加えて大型化、道路整備による高速度化および長距離輸送に伴う自動車輸送の経済的価値が高まつてきたため、自動車輸送が陸上輸送機関として大きい比重を占めるようになつてきている。これらの陸上輸送施設は健康な人体の血管のごとく国土の末端までも整備されていなければならず、これなしでは完全な国土総合開発、産業の発展は考えられない。現在わが国においても道路交通計画や道路構造物の施工、管理に関する諸問題がとりあげられ、また実際に多くの新しい路線が開発されている。一方国鉄では道路輸送の増大に対処して新東海道幹線を建設し、あわせて現在線における輸送量の増大を計画している。このような輸送施設を建設するにあたつては種々の新しい土木技術や施工機械の導入が行われて、より完全な施設を完成すべく努力されていることは勿論であるが、わが国地勢の関係からこれらの施設にはおのずから数多くのずい道を設置する必要があり、また電源開発に伴う水路ずい道の建設に対する合理的な設計および施工が必要になつてきており、しかもそれらのずい道が大断面になり、また長大となつて、設計、施工または維持管理の上にいろいろの新しい課題を生ずるに至つている。

またわが国の石炭鉱業界においては、当然に企業の合理化による出炭能率の向上が要望されているが、鉱業経営合理化の目的は限りあるわが国の貴重な地下資源を有効に開発し、これに伴う諸産業の発達に貢献するにあることは言うまでもない。出炭能率の向上をうるために解決しなければならない問題は各方面にわたつて多いが、とくに技術面より見た場合、生産性向上の今後の問題としては立坑開削による深部炭田開発、集約採炭および機械化採炭などが考えられる。従来より炭鉱においては保安上坑内地圧の統制という問題に対処しているが、まだ根本的な対策は完成されていない現状である。とくに深部開発に伴つて坑道の延長が大きくなり、地圧の増大に対する坑道の維持、新しい立坑の開削、坑道の集約化による本格的な完全巻立の大断面坑道の開削が技術的な問題の一部として生じてくる。

以上のように鉄道、道路、水路ずい道や炭鉱における坑道等の建設を合理的に計画するとともに、既設のずい道あるいは坑道の維持、管理、老朽化による変状の補修等を適切に行うには、ずい道あるいは坑道が通過する地山の地形、地山材料の性状、地質構造等についての充分な知識をうることは勿論のこと、地下構造物に作用する地圧およびずい道あるいは坑道周辺応力状態や覆工応力状態を適確に把握しなければならない。この点にかんがみ従来よりこれらの問題に関して多数の研究が行われてきており、いちぢるしい進歩を遂げてきた。しかしずい道あるいは坑道における地圧現象はきわめて複雑な多くの条件に支配されているため、なお今後の詳細な研究にま

たねばならない多くの問題が残されている。たとえば従来よりずい道あるいは坑道の支保工、覆工にかかる地圧は、もつぱら土圧論にもとずいて算定されているか、地山を完全な弾性体とみなしての弾性理論にもとずく理論的ないしは実験的な研究がなされているが、実際には地山の状態は種々複雑であり、むしろ完全な弾性体でない場合が多く、また土圧論の適用される地山にも限度がある。したがつて地山の種々の状態における坑道応力あるいは坑道の変形状態についての研究が問題になつてくるわけであつて、近年ずい道や坑道の開削に伴うそれらの周辺の応力およびヒズミ状態に対して*rheolcgy*の立場より新しい概念が導入されたりしている。このようにできるかぎり地山の現実の状態に近い条件のもとで坑道周辺応力状態、坑道の変形、覆工応力等、すなわち地圧現象を把握することが、ずい道あるいは坑道の合理的設計およびそれらの保安、維持管理の上からも、重要なことと考える。本文はこれらずい道や坑道の周辺応力状態、変形状態、覆工応力等が地山の状態によつていかに影響されるかを究明し、またそれらの断面形状による坑道および覆工の応力分布の変化をしらべ、合理的なずい道および坑道設計に資するために行つた基礎的研究の成果をまとめたものである。なお本文においては今後ずい道や鉱山における坑道あるいは立坑のごとき、地山中に設けられた開孔をすべてひつくるめて「坑道」と呼ぶことにする

まず第1篇では地山状態の工学的考察として、坑道が開削される地山の地形、地質構造、地山材料の性状等の種々の要素を考慮して、地山状態をつぎのように分類し、それぞれの状態に対する工学的な意義を従来の研究と対比して説明するとともに、それらに対する理論的な取扱いについて述べ、今後の理論計算に用いるべき基礎方程式を示した。地山の状態としては、(1)完全弾性地山、(2)非等方性あるいは非等質性地山、すなわち直交異方性弾性地山、層状弾性地山、点等方性弾性地山、(3)土質（塑性）地山および弾塑性地山、(4)粘弾性地山等である。

第2篇では第1篇に示した種々の地山状態における素掘坑道、巻立坑道および立坑等の周辺応力状態を理論的に求めつぎのような考察を行つた。第2章では完全弾性地山に対して、まず地表面の条件を考慮した重力場内での解を示し、つづいて地表面の影響を無視した場合の解および坑道開削位置における初期応力状態を無限遠における外荷重としたときの有孔無限板としての近似解を求め、それぞれの場合の坑道応力状態を比較検討し、地表面よりある程度の深さ（坑道半径の約10倍）以上のところでは、後者の近似解が充分に用いられることを明らかにした。したがつてその後は有孔無限板の近似解として、*Muschelishvili*の複素変数の方法を用いて種々の一般的な形状の坑道に対する内周辺応力式の誘導を示した。また巻立を施した円形および楕円形坑道に対する応力式を導き、覆工の弾性係数に対する地山のそれが種々異なつた場合について、地山と覆工との境界面における応力成分（あるいは覆工にかかる地圧）を算定して、地山の弾性係数が地圧に及ぼす影響について考察した。

つぎに第3章で直交異方性弾性地山における水平な素掘円形坑道が、地山の弾性主軸に対して任意の方向から初期応力をうけた場合について、坑道周辺応力式および変位式を導き、種々の主弾性係数比および初期応力の方向に対する坑道の応力や変形の状態を求めて、それらの影響について理論的考察を行つた。また巻立坑道に対しても同様に坑道周辺応力を算出し、覆工外壁に

かかる地圧と地山の異方性との関係について論じた。

第4章では地山が層状の弾性体と考えられるような場合を対象にして、同種あるいは異種の層の場合に対して層間に摩擦の作用しないときと、完全に附着しているときを仮定して、その中に開削された水平円形坑道の応力状態を理論的に考察した。そして2種の互層よりなる地山において、各層の高さおよび弾性係数の差異が坑道周辺応力状態にいかなる影響を及ぼすかを明らかにした。

第5章では地山中のそれぞれの位置においては等方性であるが、弾性性質が位置によつて変化するために地山全体としては非等質性になるような、いわゆる点等方性弾性地山を考え、その場合の坑道応力の近似的な解析方法を(i)地表面よりかなり離れた坑道の場合および(ii)等分布荷重をうける地表面下の坑道の場合に対して示した。

第6章では、せん断降伏強度の低い地山で坑道が開削された場合、坑道周辺において生ずる応力集中によつて惹起される塑性領域およびその領域での応力状態と、その外側の弾性状態にとどまつている領域での応力状態について考察するため、水平円形坑道周辺の弾塑性応力式を導いた。さらに塑性領域が坑道周辺に生ずるための条件を求めた。数値計算としては地山材料の単純せん断時の破壊限界として2つの値をとり、弾塑性境界の半径、坑道周辺応力分布および地山内部の弾性、塑性両領域における応力分布等を求め、同時に地山のせん断強度が大きくて坑道周辺でなお弾性を保つているごとき場合の応力分布と比較するとともに、せん断強度の大小による応力状態の変化について考察を行つた。

第7章では、塑性地山における坑道に対して*Fenner*の導いた応力式およびその式より計算された応力分布を示し、　第8章では粘弾性地山内の坑道の変形挙動について説明した。

第9章では、現場の素掘立坑がかなり深い位置においても長期間安定を保ちうることを明らかにするため、立坑周辺の応力状態に関する理論的考察を行つた。まず素掘および巻立立坑の弾性応力状態に対する近似解を求め、同じ条件のもとで数値計算を行うことによつて素掘と巻立の場合の地山内の応力分布を比較考察した。つぎに円形立坑周辺の弾塑性応力状態に対する近似解法を、(i)地山材料を非圧縮性と考え、平面ヒズミの状態を仮定した場合と、(ii)同一水平断面内の弾塑性両領域において一定の鉛直圧力が作用しているものと考え、3主応力による降伏条件を考慮した場合について示した。これらの解は立坑が素掘および巻立の場合に対して求められ、数値計算を行つて解法(i)と解法(ii)とによる応力分布状態の比較を示すとともに、解法(i)を用いて素掘、巻立のそれぞれの場合に対して弾性応力分布と弾塑性応力分布について比較考察し、弾塑性応力状態では弾性応力状態に対してどの程度の応力減少をおこすか、また最大応力を生ずる位置がいかに坑壁より地山内部に移動するかを説明した。さらに能動変形の際の物体の塑性状態を示す方程式は、同一の応力－ヒズミダイヤグラムをもつ非線型弾性体を表示する方程式となんら異なるところがないとゆう考えから、立坑周囲の地山の塑性変形領域における応力状態に対する近似解を求め、その応力分布について考察した。

第3篇では、坑道周辺応力分布に関する実験的考察として、主として光弾性実験を行い、まず

数学的に取扱いの困難な種々の断面形状に対する坑道応力を求めてそれらを比較考察し、坑道応力分布に影響を及ぼすところの坑道断面形状の一般的な性質を明らかにした。ついで直交異方性地山に対して光弾性被膜法を、層状地山に対してはエポキシ樹脂およびゼラチンの模型を、点等方性地山に対しては浸漬法を用いて、それらの地山中の坑道応力の解析に対する光弾性実験法の適用および解析方法について述べ、さらにそれぞれの場合の坑道応力を究明して理論計算値と検討した。また理論的な解析の困難な水平交差坑道における応力集中の問題を解決するために、凍結法による3次元光弾性実験を行い、坑道周辺における応力集中の解析方法を示すとともに、坑道の交差角と応力集中の大きさとの関係について実験的に考察を行つた。

第4編では、坑道の覆工の応力状態に関する考察として、まず弾性地山中の水平円形坑道と弾性および弾塑性地山における円形立坑との覆工周辺応力および内部応力分布について理論的考察を行い、とくに前者に対しては覆工と地山との弾性係数比や覆工厚が覆工応力分布にいかなる影響を及ぼすかを明らかにするために、多くの場合について計算を行い、それらの関係を図示して考察を行つた。つぎに膨脹性の地山におけるあるずい道覆工の破壊状態の例より、その破壊の原因となつた坑道周辺の条件および地圧状態を明らかにするために、理論的および実験的な考察を行つた。最後に覆工の形状と覆工応力との関係を明らかにするために、種々の曲率のインバートアーチをもつ半円形断面の坑道覆工に対して光弾性模型実験を行い、地山の弾性係数および覆工形状の変化による覆工内周辺応力分布の変化する様子を明らかにした。

以上は著者の行つた坑道周辺応力状態および覆工応力に関する研究であるが、これによつて種種の地山状態における坑道応力、覆工にかかる地圧および覆工応力等がある程度明らかにされ、またそれらの応力が地山の弾性性質によつていかに変化をうけるかを知ることができ、今後の坑道の設計、施工あるいは覆工の合理的な設計に資するところが少くないと思う。

第 I 篇　地山状態の工学的考察

才/章　緒　　　　言

新設坑道（各種ずい道および鉱山における坑道等をすべて含めて、地山中に開さくされる開孔を坑道と呼ぶことにする。）の計画、設計、既設坑道の変形、崩壊に伴う補修工事、あるいは実際坑道施工時における保安対策や局所的な不良地盤に対する施工計画等を合理的に行うためには、地質状態を十分検討することが必要である。このように地質条件は設計、施工、工費および工程等に影響を及ぼすだけでなく、将来の維持、管理、保安等にも多大の影響を与えるものである。

坑道の地質条件としては坑道位置の地形、深さ、周辺地山材料の性状（岩石の強度、節理、亀裂など割目の頻度等）、地質構造（成層状態、断層および褶曲、地辷りおよび崖錐等）、および地下水などが考えられるが、これらを調査研究して坑道開発の計画を立て、地質に適した施工を行うことは建設を容易にするのみでなく保安上にも必要なことであろう。これらの点については実際現場で坑道の計画施工に当つている人達が痛感していることであり[1]、地質調査についても多くの報告が行われて地質調査の重要性あるいはその工事上の問題点が検討されている。[2]
いま述べたように地山を構成する岩盤の性質が多くの要素を含み、さらに各種の地質学的影響によつてそれぞれの条件が異なり、複雑多種であることが地下構造物に関する応力問題の解決を困難にしている。
坑道応力に関する初期の理論的研究の大部分は、いずれも現場観測の結果を単純な材料力学的解釈によつて説明した局部的理論解であり、さらに進んで粉体力学を基礎とした土圧論および弾性理論の導入による純数理的解明が行われるに至つた。また最近では地山材料を非等質非等方性弾性体、弾塑性体、粘弾性体と見なして理論的研究が行われ、また、それに伴う実験的研究も行われて来ているが、さきに述べたごとき地山状態に及ぼす種々の要素をすべて考慮することは不可能であることより、いづれの場合もある種の理想的な状態を仮定し、少しでも現場の状態に近い状態での坑道応力および変形を把握しようとつとめている。こゝにおいては坑道開削に伴うその周辺の応力状態、あるいは坑道の変形およびそれに施される支保、覆工について行われる研究に必要な種々の地山状態に対する理論的な取扱いについて述べる。当然坑道に及ぼす地下水の影響や岩石の吸水性、透水性およびそれに伴う膨張性質[3]なども重要な要素であるが、こゝではふれないことにし、主として直接坑道に影響を及ぼす地山の力学的な状態についてのみ考えることにする。

地山を構成する土砂あるいは岩石の力学的性質すなわち強度、圧縮性、粘性度、透水性、弾性

などについては従来より多くの研究[4)]がある。土砂および岩石が弾性体とみなされる場合もあるが、実際には弾性的、塑性的、あるいは粘性的な性質と合せ持つているものと考えられる。これらに関しては最近 *rheology* の立場より研究がなされ、わが国においても星埜[5)]の土の力学における塑性理論の研究、村山[6)]らの粘土の粘弾性に関する研究等があり、また岩石に関しては平松、西原[7)]の研究がある。このような *rheology* 的な土砂あるいは岩石の性状については才5章において地山全体としての状態について考察する場合に詳しく述べる。また土砂および岩石の力学特性については従来よりの多数の文献、書籍にゆずることにする。

才2章　完全弾性地山

一般に地山が均質な堅岩からなる場合にはその力学的性質は弾性体に近いと考えられる。そのためこのような岩盤中の坑道の周囲の岩石に発生する応力および変位は弾性学の問題として取扱われ、従来より行われて来ている坑道応力および変位の理論的および実験的研究は、その坑道を開削する地山の状態を等方等質の弾性体と仮定したものがきわめて多い。実際に坑道が開削される地山全体が完全なる弾性体である場合はまれであり、多くの場合岩盤中に岩目、成層面、亀裂などが存在して地山全体としては非等質性、非等方性（異方性）を有している[8]。しかし地山を等質等方性弾性体と仮定し、その中に開削された坑道周辺状態および変形状態を理論的に研究することは、地圧の根本概念を明らかにする上にきわめて有意義である。

いま水平な坑道を考える場合地表面が水平であるか、あるいは坑道の位置がかなり深いところにあり、地表面の影響をうけることが少ないときには平面ひずみの問題として取扱いうる。したがつてこゝでは等方性体に対する弾性理論の平面問題における基礎方程式について述べる。

2・1直角座標による基礎方程式

まず直角座標系（図－1・2・1参照）における釣合条件式は、XおよびYをそれぞれx方向およびy方向の単位体積当りの物体力とするとき、次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.2.1)$$

この場合実際問題として物体力は物体の自重のみであるから、y軸を上向きに取り、ρを物体の単位体積当りの質量とすると（1・2・1）式は、

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho g &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1.1.2)$$

つぎに歪成分 ε_x、ε_y、γ_{xy} はつぎのごとく、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1.2.3.)$$

変位成分（u，v）で表わされるが、これらの間にはある関係が存在して、それらを自由にとることはできない。(1・2・3) 式の３つの式より歪成分の間に存在すべき関係はいわゆる適合条件

式としてつぎのごとき微分方程式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon x}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma xy}{\partial x \partial y} \qquad (1.2.4.)$$

さらにフックの法則を用いて上式を応力成分の間の関係式に変換することが出来る。

平面応力状態の場合、応力ーひずみ関係は次式で与えられるから、

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon x &= \frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y) \quad , \quad \varepsilon y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x) \\ \gamma xy &= \frac{1}{G}\tau xy = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau xy \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.5.)$$

これらを(1・2・4)式に代入して、(1・2・1)式の関係を用いれば結局次式をうる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad (1.2.6.)$$

もし物体力の成分が物体の自重のみの場合には(1・2・2)式を用いて

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (1.2.7.)$$

つぎに平面ひずみ状態の場合は $\varepsilon z=0$ $\sigma z=(\sigma x+\sigma y)$ であり、フックの法則より応力ーひずみ関係はつぎのように与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_x-\nu(1+\nu)\sigma_y\} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_y-\nu(1+\nu)\sigma_x\} \\ \gamma xy &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau xy \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.8.)$$

これらの関係を(1・2・4)式に代入し、(1・2・1)式を用いればさきの場合と同様にして適合条件式がつぎのような形で得られる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad (1.2.9.)$$

なおこの場合も物体力が自重のみの場合には適合条件式は(1・2・7)式と同じになる。

(1・2・6)式、(1・2・7)式あるいは(1・2・8)式の関係は物体(領域 S)のすべての点において満足されねばならない。しかして境界(L)においては内部応力は外力とつり合い、また変位は外部から与えられる変位と等しくしなければならない。したがつて才1種境境値問題の場合、すなわち領域 S の境界 L の上で外荷重が与えられている場合には境界条件はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x \cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y) &= X_n \\ \tau xy\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y) &= Y_n \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.10.)$$

こゝに n は外向きの法線方向であり、Xn, Yn は境界 L に作用する外荷重のベクトル成分である。

また第2種境界値問題の場合、すなわち領域 S の境界 L 上で変位が与えられている場合には、境界条件はつぎのようになる。

$$u = g_1(s) \qquad v = g_2(s) \qquad (1.2.11)$$

こゝに $g_1(s)$ および $g_2(s)$ は境界上で与えられた各点の変位である。

いま x および y の関数 F（いわゆる $Airy$ の応力関数）として応力成分とつぎのような関係、

$$\left.\begin{aligned} \sigma x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \rho g y, \quad \sigma y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho g y \\ \tau xy &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.12)$$

にあるものをとれば、応力の釣合式（1・2・2）が満足されることは容易に判る。(1・2・12)式の関係を(1・2・7)式に導入すれば、つぎのように応力関数 F による適合条件式として重調和関数をうる。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \qquad (1.2.13)$$

結局物体力が自重のみの場合の平面問題の解は問題の境界条件(1・2・10)式あるいは(1・2・11)式を満足するように(1・2・13)式の解を見出すことに帰着する。またこの場合の変位成分 u, v は(1・2・3)式に(1・2・5)式を代入して積分することより得られる。

2.2 直交曲線座標による基礎方程式

平板の外形および孔（すなわち領域 S の境界 L の形）の種々変わつている場合には、それぞれの場合に適した座標系を用いて平面問題が取扱われる。したがつて次に極座標、双極座標、楕円座標等の直交曲線座標系に対する基礎方程式について述べることにする。

(1) 極座標の場合（図－1・2・2）

物体力が自重（y 軸方向下向きに作用）のみの場合にはつり合方程式はつぎのようになる。[9]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau r\theta}{\partial \theta} + \frac{\sigma r - \sigma \theta}{r} - \rho g \sin\theta = 0 \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma \theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau r\theta}{\partial r} - \frac{2\tau r\theta}{r} - \rho g \cos\theta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.14)$$

これらの式は応力関数 $F(r, \theta)$ としてつぎの関係にあるものを導入することにより満足される。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \rho g_r \sin\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\theta^2 r} + \rho g \sin\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.15)$$

また応力関数$F(r\cdot\theta)$は境界条件とともに適合条件式を満足するものでなければならないが、極座標系による適合条件式は直角座標によるもの、すなわち(1・2・13)式から座標変換することによりつぎのごとく求められる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right)=0 \qquad (1.2.16.)$$

したがつて境界条件を満足する(1・2・16)式の解$F(r\cdot\theta)$を求めれば平面弾性問題が解けたことになるわけであるが、適合条件(1・2・16)を満足する応力関数Fの一般式としては次式が与えられている。[10]

$$\begin{aligned}F=\;& a_0\log r+b_0r^2+c_0r^2\log r+d_0r^2\theta+a_0'\theta\\&+\frac{a'}{2}r\theta\sin\theta+(d_1r^3+a_1'r^{-1}+b_1'r\log r)\cos\theta\\&-\frac{c'}{2}r\theta\sin\theta+(d_1r^3+a_1'r^{-1}+d_1'r\log r)\sin\theta\\&+\sum_{n=2}^{\infty}(a_nr^n+b_nr^{n+2}+a_n'r^{-n}+b_n'r^{-n+2})\cos n\theta\\&+\sum_{n=2}^{\infty}(c_nr^n+d_nr^{n+2}+c_n'r^{-n}+d_n'r^{-n+2})\sin n\theta\end{aligned} \qquad (1.2.17.)$$

こゝで$a_0, b_0 \cdots\cdots a_n, b_n \cdots\cdots c_n', d_n'$等は決定さるべき常数である。結局(1・2・17)より問題に適した項を選び、境界条件を満足するように常数を定めれば応力関数Fが求められるからそれを(1・2・15)式に代入して各応力成分をうることができる。

極座標におけるひずみ成分ϵ_r, ϵ_θ, $\gamma_{r\theta}$は半径方向、切線方向の変位成分uおよびvによつてつぎのごとく与えられる。

$$\epsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \epsilon_\theta=\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{r\partial\theta},\quad \gamma_{r\theta}=\frac{\partial u}{r\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r} \qquad (1.2.18.)$$

(1・2・18)式をフックの法則(平面ひずみ状態)

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_r&=\frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_\partial-\nu(1+\nu)\sigma_\theta\}\\ \epsilon_\theta&=\frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_\theta-\nu(1+\nu)\sigma_r\}\\ \gamma_{r\theta}&=\frac{1}{G}\tau_{r\theta}\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.19.)$$

に代入すればuおよびvを決定するための式をうる。

(2) 双極座標の場合[11] (図-1・2・3)

直交曲線座標を用いることにより平板(領域S)の種々の外形および孔の形を座標α=一定またはβ=一定の形に表わすことができて、その外周または孔の周辺(L)に与えられた外力系の

ある平面問題を解くのに便利となる。いま直交曲線座標の1例として双曲座標をとれば、直角座標との転換式は

$$z=x+iy=f(\zeta)=i\,a\coth\frac{\zeta}{2} \qquad (1.2.2\,0.a)$$

$$\zeta=\alpha+i\beta=\log\left(\frac{z-a}{z+a}\right)=\log\frac{x+i(y+a)}{x+i(y-a)} \qquad (1.2.2\,0.b)$$

である。この双極座標を使用した場合についてはJeffery が取扱つているが、この座標系は2つの偏心円にかこまれた領域、半無限板中に円孔のある場合、無限板に2つの円孔がある場合などの問題をとくのに適しており、それらはα＝一定の値を適当に選ぶことにより得られる。この双極座標を用いた解は、従来より多くの研究者によつていろいろな例に適用されてきている。[13)] [14)] [15)] [16)] [17)]

(1.2.20)式をx、yについて解けば

$$x=\frac{a\sin\beta}{\cosh\alpha-\cos\beta} \qquad y=\frac{a\sinh\alpha}{\cosh\alpha-\cos\beta}$$

となるから、写像拡大率Jは$J^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2$から

$$J=a\,/\,(\cosh\alpha-\cos\beta) \qquad (1.2.2\,1)$$

となる。しかしてこの座標での応力成分はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} a\sigma_\alpha\quad & \left\{(\cosh\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\sinh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cosh\alpha\right\}\left(\frac{F}{J}\right)\\ & -\rho gaJ\sinh\alpha \\ a\sigma_\beta= & \left\{(\cosh\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\sinh\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\cos\beta\right\}\left(\frac{F}{J}\right)\\ & -\rho gaJ\sinh\alpha \\ a\,\tau_{\alpha\beta}= & -(\cosh\alpha-\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left(\frac{F}{J}\right)\end{aligned} \qquad (1.2.2\,2)$$

適合条件式は

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)\left(\frac{F}{J}\right)=0 \qquad (1.2.2\,3.)$$

となる。

α＝一定のところでβについてのFourier 級数の形に応力を出すための応力関数の一般式が与えられているが、そのうちで各境界ごとにつり合つた外力が作用している場合を考えると、応力関数の一般式はつぎのようになる。

$$F/J=\{B_0\,\alpha+K\log(\cosh\alpha-\cos\beta)\}(\cosh\alpha-\cos\beta)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{\phi_n(\alpha)\cos n\beta+\psi_n(\alpha)\sin n\beta\} \qquad (1.2.2\,4.)$$

こゝでϕ_n・ψ_nは$n=1$に対して

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(\alpha)&=A_1\cosh2\alpha+B_1+C_1\sin2\alpha\\ \psi_1(\alpha)&=A_1'\cosh2\alpha+C_1'\sinh2\alpha\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.2\,5)$$

$n \geqq 2$に対して

$$\left.\begin{aligned}\phi_n(\alpha) &= A_n \cosh (n+1)\alpha + B_n \cosh (n-1)\alpha + C_n \sinh (n+1)\alpha \\ &\quad + D_n \sinh (n-1)\alpha \\ \psi_n(\alpha) &= A'_n \cosh (n+1)\alpha + B'_n \cosh (n-1)\alpha + C'_n \sinh (n+1)\alpha \\ &\quad + D'_n \sinh (n-1)\alpha\end{aligned}\right\} \quad (1.2.26.)$$

である。また$\alpha=o$の片側のみに問題の領域があるときには$K=o$と置くことができる。

つぎに変位に対する式は応力関数Fが定まれば、それをつぎの式

$$\frac{Q}{J} = \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1\right) \frac{F}{J}\, d\alpha\, d\beta \quad (1.2.27.)$$

に用いてQを定めると、次式によつて変位成分u_α、u_βが与えられる。

$$\left.\begin{aligned}2Gu_\alpha &= \frac{m-2}{m} \frac{\partial F}{J\partial \alpha} - \frac{m-1}{m} \frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial \beta} \\ 2Gu_\beta &= \frac{m-2}{m} \frac{\partial F}{J\partial \beta} + \frac{m-1}{m} \frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial \alpha}\end{aligned}\right\} \quad (1.2.28.)$$

上式でmはポアソン数である。

,3) 楕円座標の場合(図－1.2.4)

無限板に楕円孔のある場合等では楕円座標を採用するのが便利である。この場合の直角座標(x、y)との転換式は

$$z = c \cosh \zeta \quad (1.2.29.)$$

で与えられるから、これよりつぎの関係をうる。

$$x = c \cosh \alpha \cos \beta \;, \quad y = c \sinh \alpha \sin \beta \quad (1.2.30.)$$

したがつてα＝一定の曲線は($\pm c, o$)を共通の焦点とする楕円部、β＝一定の曲線は($\pm c, o$)を焦点として上の楕円群に直交する双曲線群となる。なおこの場合βには双曲線の$\frac{1}{4}$の部分を対応させ、oから2πまで変化させるものとする。なおこの場合の写像拡大率はつぎのように与えられる。

$$J^2 = \frac{1}{2} c^2 (\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta) \quad (1.2.31.)$$

一般に直交曲線座標に対しては*Laplace* の演算子は

$$\triangle = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right) \quad (1.2.32.)$$

で書かれるから、この場合の適合条件式はつぎのようになる。

$$\triangle\triangle F=\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-\left\{\frac{1}{J^2}c^2(\sinh^2\alpha+\cosh^2\alpha-\sin^2\beta+\cos^2\beta)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2}{J^4}c^4(\sinh^2\alpha\ \cosh^2\alpha+\sin^2\beta\ \cos^2\beta)\right\}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\right]F=0$$

(1.2.3 3.)

また応力成分は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}(2J^2)^2\sigma_\alpha&=(2J^2)\cdot2\frac{\partial^2F}{\partial\beta^2}+2c^2\sinh\alpha\cosh\alpha-2c^2\sin\beta\cos\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}\\&\quad+(2J^2)^2\rho gc\sinh\alpha\sin\beta\\(2J^2)^2\sigma_\beta&=(2J^2)\cdot2\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+2c^2\sin\beta\cos\beta\frac{\partial F}{\partial\beta}-2c^2\sinh\alpha\cosh\alpha\frac{\partial F}{\partial\alpha}\\&\quad+(2J^2)^2\rho gc\sinh\alpha\sin\beta\\(2J^2)^2\tau_{\alpha\beta}&=-(2J^2)\cdot2\frac{\partial^2F}{\partial\alpha\partial\beta}+2c^2\sin\beta\cos\beta\frac{\partial F}{\partial\alpha}+2c^2\sinh\alpha\cosh\alpha\frac{\partial F}{\partial\beta}\end{aligned}\right\}\quad(1.2.3\,4)$$

一般に(1・2・33)式の解のうち1価の変位を与えるものとしてつぎのような関数が考えられる。すなわちnを整数として、

$$F_n=e^{\pm n\alpha}\cos n\beta\ ,\quad e^{\pm n\alpha}\sin n\beta \qquad (1.2.3\,5.)$$

$$\left.\begin{aligned}F_n&=e^{(n+1)\alpha}\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}(n-1)\beta+e^{(n-1)\alpha}\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}(n+1)\beta\\F_n&=e^{-(n+1)\alpha}\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}(n-1)\beta+e^{-(n-1)\alpha}\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}(n+1)\beta\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.3\,6.)$$

さらに(1・2・36)式の形の解に対する変位成分はつぎのようである。

$$\left.\begin{aligned}2GJu_\alpha&=\left(\frac{3m-4}{m}-n\right)e^{(n+1)\alpha}\cos(n-1)\beta\\&\quad-\left(\frac{3m-4}{m}+n\right)e^{(n-1)\alpha}\cos(n+1)\beta\\2GJu_\beta&=\left(\frac{3m-4}{m}+n\right)e^{(n+1)\alpha}\sin(n-1)\beta\\&\quad-\left(\frac{3m-4}{m}-n\right)e^{(n-1)\alpha}\sin(n+1)\beta\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.3\,7.)$$

2・3　複素関数による解法に対する基礎方程式

上式においてはx・y座標による弾性基礎方程式および極座標、楕円座標、双極座標によるものを示したが、これらの基礎方程式はそれぞれに適した問題に対して用いられ、たとえば円形、楕円形、2つの円形孔を有する等方性体の平面問題に適用されている。さらに境界の形状の複雑なたとえば一般的な坑道形状のごとき孔を有する等方性体が任意の荷重をうける場合の平面問題に対しては複素応力関数の導入や等角写像の理論の応用によつて取扱いが可能である場合が多い。

平面弾性問題の解析的な解法の可能性は*N.I Muschelishvili*の方法[19] によつて根本的に拡大されてきているが、ここにその方法について述べる。

Goursat の公式によれば重調和関数すなわち適合条件式(1・2・13)式の解$F(x,y)$ はつぎの形で表わされる。[20]

$$F(x,y)=Re\left[\bar{z}\varphi_1(z)+\chi_1(z)\right] \tag{1.2.38}$$

ここにRe は$[\quad]$内の式の実数部を示しており、$\varphi_1(z)$及び$\chi_1(z)$は複素変数 $z=x+iy$ と $\bar{z}=x-iy$ の解析関数である。したがつて平面問題の解は直接適合条件式(1・2・13)の解$F(x.y)$ を求めるかわりに、2つの解析関数 $\varphi_1(z)$ および $\psi_1(z)=\dfrac{d\chi_1(z)}{dz}$ を境界条件から定めることに帰着する。 いま物体力としてy軸下向き方向の自重のみを考えれば、この場合の境界条件はつぎのように与えられる。

(1) オ一種境界値問題(荷重が与えられている)の場合

(1・2・10)式で与えられる境界条件に(1・2・12)式を代入して積分することにより次式をうる。

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_0^s X_n\,ds-\frac{1}{2}\rho g y^2+c_1,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=-\int_0^s Y_n\,ds+\rho g x y+c_2 \tag{1.2.39}$$

したがつて上式に(1・2・38)式を用いて境界条件はつぎのごとく与えられる。

$$\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}=\varphi_1(z)+\overline{z\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)}$$
$$=i\int_0^s (X_n+iY_n)\,ds+\frac{i}{2}\rho g y\,(2x+iy)+c=f_1+if_2+const \tag{1.2.40}$$

上式でcは境界Lにおける常数である。

(2) オ二種境界値問題(変位が与えられている)の場合

$$2\mu(u+iv)=\kappa\varphi'(z)-\overline{z\varphi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}=2\mu(g_1+ig_2) \tag{1.2.41}$$

ここに平面応力状態に対して$\kappa=\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ 平面ひずみ状態に対して$\kappa=3-4\nu$ であつて、νはポアソン比、$\mu=G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$である。

関数 $\varphi_1(z)$および $\chi_1(z)$が知られれば応力成分 τ_x,τ_y,τ_{xy}はこれらの関数を用いて*Kolossow-Muschelishvili* の公式[21] よりつぎのごとく求められる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x+\sigma_y&=2\left[\varphi_1'(z)+\overline{\varphi_1'(z)}\right]\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}&=2\left[\bar{z}\varphi_1''(z)+\psi_1'(z)\right]\end{aligned}\right\} \tag{1.2.42}$$

さて一般に孔の形状が複雑な場合には写像関数$z=\omega(\zeta)$を用いて孔の外部の領域Sを単位円γの内部(あるいは外部)に写像して問題が取扱われる。単位円上のζの値をσで示すと、(1・2・40)

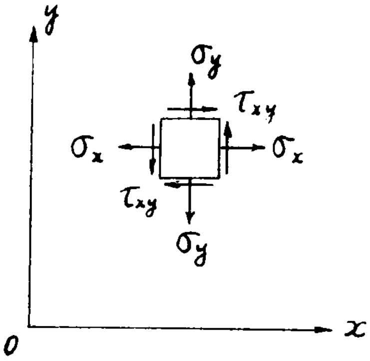


図-1·2·1

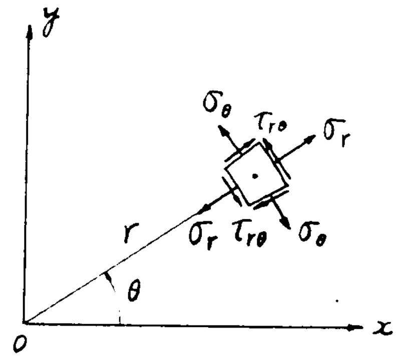


図-1·2·2

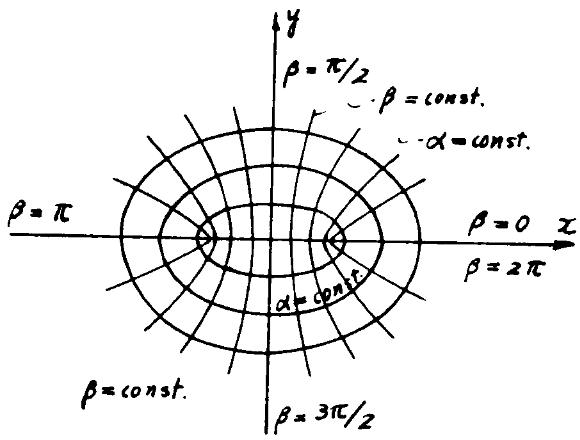


図-1·2·4

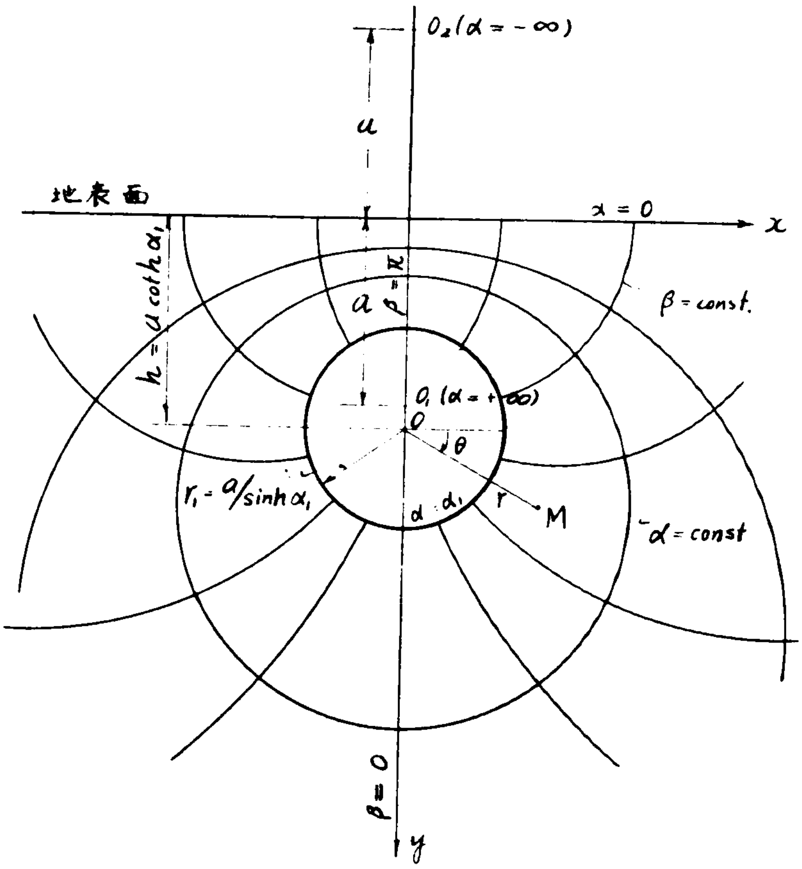

$O_2(\alpha=-\infty)$
a
地表面
$x=0$
x
$h=a\coth\alpha_1$
a
$\beta=\pi$
$\beta=const.$
$O_1(\alpha=+\infty)$
O
θ
$r_1=a/\sinh\alpha_1$
$\alpha=\alpha_1$
r
M
$\alpha=const$
$\beta=0$
y

図-1·2·3

式で示されている境界条件はつぎのようになる。

$$\varphi(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{\overline{w'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + i f_2 + const \qquad (1.2.4\ 3.)$$

こゝに関数$\varphi(\sigma)$ および$\psi(\sigma)$ は$\varphi_1[w(\sigma)]$ および$\psi_1[w(\sigma)]$ のことである。さらに(1・2
42)式で変数 z を$w(\zeta)$に変換すると

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}]$$

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\, w'(\zeta)}[\overline{w(\zeta)}\,\Phi'(\zeta) + w'(\zeta)\Psi(\zeta)] \qquad (1.2.4\ 4.)$$

ここで

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{w'(\zeta)} \qquad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{w'(\zeta)}$$

また σ_ρ・σ_θ および $\tau_{\rho\theta}$ はy軸をρ＝一定なる線の切線とする場合、考えている点に原点をもつ可動な直角座標系の応力 σx，σy，τxy に相当する。したがつて問題に与えられた境界条件よりそれぞれの境界上で(1・2・43)式の右辺を算出し、それらを用いて２つの解析関数$\varphi(\zeta)$ および$\psi(\zeta)$ を求め、さらにその値を(1・2・44)式に代入して応力成分を得る。あるいは求められた$\varphi(\zeta)$および$\psi(\zeta)$において変数ζを変数zに変換することにより写像平面（ζ－平面）を物理平面（ζ－平面）にもどして$\varphi(z)$ および$\psi(z)$を得、それを(1・2・42)式に代入することにより応力成分 σx，σyおよび τxy を求めることができる。

才 3 章　非等方性あるいは非等質性弾性地山

地山状態には種々の要素が含まれているため、従来からの研究の多くはそれらの複雑な要素を省略して問題を簡素化するために、地山を完全弾性体あるいは完全塑性体として取扱つていることとはさきにも述べた通りであるが、実際の現場においてわれわれが遭遇する岩盤は種々様々であつて、地山の成層状態、岩石の組織や成分鉱物の位置的差異、亀裂節理の発達、風化変質の状態などのため、地山状態はかなり複雑な様相をていしていることは以前より指適されているとおりである。[22)]

また地表面下の浅いところに坑道を設ける場合においてもその周囲の土塊の応力－ひずみ関係が合理的によくフックの法則に一致するということより、等方等質の弾性体と考えて問題が処理されている場合が多いが、弾性的な土壌がしばしば深さとともに弾数係数を増加するということが土質試験の資料からも示されており、等方等質性であることはまれである。したがつてここではさらに実際的な土壌、岩盤および地層の性質を考慮した地山状態を考えるため、地山材料がつぎのごとき弾性性質をもつものと仮定する。

a ）等質異方性地山、すなわち地山材料は等質性を有するが、その弾性係数が方向によつて異つた値を有するものか、地山が弾性係数を異にする層よりなる横層状の場合でも層間に相対変位を生ずることのない場合には、地山合体としての等値主弾性係数を考慮することにより同様に取扱うことができる。

b ）層状性の地山。各層は等方等質であるが、地山が成層状態をなしているため非等方性を有する場合である。地山全体が同一材料よりなる場合でも、規則的な割目やそのほかの原因により層状をなしており各層間の連続性が絶たれることによつて、地山全体が異方性になる場合も考えられる。

c ）点等方性の地山。地山材料が各点においては等方性であるが、弾性常数がその位置によつて変化することにより非等方性の性質をもつものである。

つぎにこれらの種々の地山状態における平面弾性基礎方程式についてそれぞれ述べることにする。

3.1　直交異方性弾性地山

直交異性弾性体の平面問題については従来より多くの研究がなされており、種々の問題に対して応力式および変位式が算出されている。[23) 24) 25) 26)] 坑道が地表面下かなり深いところに水平にかなりの長さで開削される場合の応力および変位状態を求めるためには、平面ひずみの問題として取扱われうる。

その場合、x，y 軸を平面内にとり、それに直角に z 軸をとれば $e_z=0$，$\gamma_{xz}=\gamma_{zy}=0$（したがつて $\tau_{xz}=\tau_{zy}=0$）となり、x 軸および y 軸方向の変位成分（u，v）は x，y のみの関数である。したがつて応力ーひずみ関係はつぎのような形で与えられる。[27]

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ e_x &= \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{1.3.1.}$$

またこの場合のつり合方程式は（1・2・1）式と、適合条件式は（1・2・4）式と同じになる。すなわち

$$\frac{\partial \sigma x}{\partial x} + \frac{\partial \tau xy}{\partial y} + X = 0 \qquad \frac{\partial \sigma xy}{\partial x} + \frac{\partial \tau y}{\partial y} + Y = 0 \tag{1.3.2.}$$

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{1.3.3.}$$

平面ひずみ状態に対しては基本方程式は（1・3・1）（1・3・2）（1・3・3）だけである。これらの式は平面応力状態に対しても全く同じ形がとられ、たゞ応力ーひずみ関係式（1・3・1）式における係数を変えればよい。

（1・3・2）式において物体力が重力のみの場合には、y 軸を鉛直上向きにとると $X=o$，$Y=-\rho g$ となる。しかるときは

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \qquad , \qquad \sigma_y = \rho g y \tag{1.3.4.}$$

ととるとき（1・3・2）式は明らかに満足される。これらの値を（1・3・1）式に用い積分することによりつぎのように変位が与えられる。

$$\left.\begin{aligned} u &= a_{12}\rho g x y + \frac{1}{2} a_{26}\rho g y^2 \\ v &= \frac{1}{2} a_{22}\rho g y - \frac{1}{2} a_{12}\rho g x^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.3.5.}$$

（1・3・1），（1・3・2），（1・3・3）式等はいづれも線型であるから、これら基礎方程式の特解としての応力成分（1・3・4）式および変位成分（1・3・5）式を σ_x°，σ_y°，τ_{xy}°，u°，v° で示し、$\sigma_x = \sigma_x^\circ + \sigma_x'$　$\sigma_y = \sigma_y^\circ + \sigma_y'$　$\tau_{xy} = \tau_{xy}^\circ + \tau_{xy}'$，$u = u^\circ + u'$，$v = v^\circ + v'$ とおくとき、σ_x'，σ_y'，τ_{xy}，u'，および v' は物体力のない場合の基礎方程式の解であることは明らかである。物体力が含まれないことを仮定すれば、この場合も等方性板の場合と同様につぎのような関係

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{1.3.6}$$

のもとに応力関数を導入すると 釣 合方程式(1・3・2) 式は満足される。(1・3・6) 式を(1・3・1) 式に代入し、さらに(1・3・1) 式に用いると平面問題の基本方程式として応力関係による適合条件式がつぎのように得られる。

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\,\partial y^3}- a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}= 0 \quad (1.3.7.)$$

とくに x，y 軸が弾性対称軸と一致するときは $a_{16}=a_{26}=0$ となり、上式はさらに簡単に次式のようになる。

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (2a_{12}+ a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2}+ a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1.3.8.)$$

(1・3・8) 式の各係数はつぎのごとく弾性性質と関係している。平面ひずみの状態の場合は

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = (1-\nu_{13}\,.\,\nu_{31})/E_1 \quad , \quad a_{22}=(1-\nu_{23}\,.\,\nu_{32})/E_2 \\ &a_{12} = (\nu_1 + \nu_{23}\,.\,\nu_{32})/E_1 \quad , \quad a_{66}=1/G \end{aligned}\right\} \quad (1.3.9.)$$

また平面応力状態の場合は

$$a_{11} = 1/E_1 \qquad a_{22} = 1/E_2 \qquad a_{12} = \nu_1/E_1 = -\nu_1/E_2 , \quad a_{66} = 1/G$$

(1.3.1 0.)

ここで E_1 および E_2 は主弾性係数であり、(1・3・8) 式は弾性主軸が x，y 軸に一致する場合に対するものであるから、$E_1=E_x$　$E_2=E_y$ であって ν_{31}，ν_{32} は z 軸方向に関する x 軸，y 軸方向のポアソン比である。(1・3・8) 式の特性方程式

$$a_{11}s^4 + (2a_{12}+ a_{66})\,s^2 + a_{22} = 0 \quad (1.3.1\ 1.)$$

の根はこの場合 $s_1=i\beta_1$，$s_2=i\beta_2$，$s_3=-i\beta_1$，$s_4=-i\beta_2$ (β_1，β_2 は実の常数，$\beta_1>0$　$\beta_2>0$) となり、これらの係数 β_1，β_2 はつぎのように与えられる。

$$\beta_1^2\,\beta_2^2 = a_{22}/a_{11} \quad , \quad \beta_1^2+\beta_2^2=(2a_{12}+a_{66})/a_{11} \quad (1.3.1\ 2.)$$

しかるときは(1・3・8) 式の一般解はつぎのような形で与えられる。

$$F(x,y) = U_1(z_1) + U_2(z_2) + \overline{U_1(z_1)} + \overline{U_2(z_2)} \quad (1.3.1\ 3.)$$

ここで

$$z_k = x + S_k\,y \qquad (k=1,2) \quad (1.3.1\ 4.)$$

であり、$U_1(z_1)$ および $U_2(z_2)$ は2つの解析関数である。

いま

$$\varphi(z_1)=\frac{dU_1}{dz_1} \qquad \psi(z_2)=\frac{dU_2}{dz_2} \tag{1.3.15}$$

とすれば $\overline{\varphi(z_1)}=d\bar{U}_1/d\bar{z}_1$ ，$\overline{\psi(z_2)}=d\bar{U}_2/d\bar{z}_2$ となり（1・3・13）式で与えられた応力関数を（1・3・6）式に代入することにより各成分応力に対する一般式は２つの解析関数 $\varphi(z_2)$ および $\psi(z_1)$ によつてつぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2Re\left[s_1^2\varphi'(z)+s_2^2\psi'(z_2)\right]\\ \sigma_y &= 2Re\left[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)\right]\\ \tau_{xy} &= -2Re\left[s_1\varphi'(z_1)+s_2\psi'(z_2)\right]\end{aligned}\right\} \tag{1.3.16}$$

上式で $\varphi'(z_1)=\partial\varphi/\partial z_1$ ・$\psi'(z_2)=\partial\psi/\partial z_2$ である。

（1・3・1）式において $a_{16}=a_{26}=0$ とおき，その式に（1・3・16）式の σ_x ，σ_y の値を代入し積分すれば、この場合の変位 $u(x,y)$ および $v(x,y)$ はつぎのようにえられる。

$$\left.\begin{aligned}u(x,y) &= 2R_e\left[p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)\right]-\gamma_0 y+\alpha_0\\ v(x,y) &= 2R_e\left[q_1\varphi(z_2)+q_2\psi(z_2)\right]+\gamma_0 x+\beta_0\end{aligned}\right\} \tag{1.3.17}$$

上式において

$$\begin{aligned}p_1 &= a_{11}s_1^2+a_{12} & p_2 &= a_{11}s_2^2+a_{12}\\ q_1 &= (a_{12}s_1^2+a_{22})/s_1 & q_2 &= (a_{12}s_2^2+a_{22})/s_2\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

であり、また $(-\gamma_0 y+\alpha_0)$ および $(\gamma_0 x+\beta_0)$ は物体全体の剛体としての変位を生ずる値であつて、弾性的な釣合を考える場合には考慮しなくてもよい。

つぎに応力関数 $F(x,y)$ は適合条件式（1・3・8）の外に、考えている境界 L において与えられた境界条件を満足しなければならない。境界条件は一般に（1・2・10）式で与えられるが、それらを２つの解析関数 $\varphi(z_1)$ および $\psi(z_1)$ によつて表わすとつぎのごとくなる。

(1) ﾅ１種境界値問題

（1・2・10）式に（1・3・6）を代入し、$\cos(n,x)=dy/ds$ ，$\cos(n,y)=-dx/ds$ なることを考慮すると、（1・2・10）式はつぎのようになる。

$$X_n=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$Y_n=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{ds}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

上式を積分し、応力関数Fを(1・3・13)式の右辺で置換え、(1・3・15)式を用いれば結局関数
$\varphi(z_1)$ および $\psi(z_2)$ による境界条件式がつぎのように得られる。

$$\begin{aligned} \varphi(z_1)+\overline{\varphi(z_1)}+\psi(z_2)+\overline{\psi(z_2)} &= -\int_0^s Y_n ds + c_1 = f_1 \\ s_1\varphi(z_1)+\overline{s_1\varphi(z_1)}+s_2\psi(z_2)+\overline{s_2\psi(z_2)} &= \int_0^s X_n ds + c_2 = f_2 \end{aligned} \qquad (1.3.19.)$$

(2) オ2種境界値問題

領域Sの周縁Lの上で変位成分uおよびvが与えられている場合は(1・3・17)式よりただちにつぎのような形で関数 $\varphi(z_1)$ および $\psi(z_2)$ に対する境界条件式がえられる。

$$\begin{aligned} p_1\varphi(z_1)+\overline{p_1\varphi(z_1)}+p_2\psi(z_2)+\overline{p_2\psi(z_2)} &= g_1(s) \\ q_1\varphi(z_1)+\overline{q_1\varphi(z_1)}+q_2\psi(z_2)+\overline{q_2\psi(z_2)} &= g_2(s) \end{aligned} \qquad (1.3.20.)$$

ここで $g_1(s)$ および $g_2(s)$ は周縁Lの上で与えられた変位成分であり、任意点から測られた周縁の弧sの関数である。

このようにして応力を決定すべき二つの解析関数 $\varphi(z_1)$ および $\psi(z_2)$ の解は境界条件(1・3・19)式あるいは(1,3,20)式から導かれる。

3・2 層状弾性地山

層状弾性体の平面問題については*V.Kafka*[28] *G.Sonntag*[29]等の研究がある。これらはいずれも規則的な半無限層状体がその表面において荷重をうける場合を取扱い、その応力集中の分散状態より層状体の性状を考察している。実際の地山においても成層状態は規則的であるが、各層の間の附着状態は各層岩石の組成、初期荷重、風化浸蝕の程度等により一様でない。もし地圧が小さく層相互間の摩擦にうちかつて層の附着面で滑りを生ずることのない間は、*Kafka* の示しているごとく、層状地山を全体的に見てそれと等値な性質を有する補正等質直交異方性体に置きかえることによつて、直交異方性弾性体の平面問題として取扱いうる。層間にある中間層が薄くかつ塑性化している場合とか、地圧が層相互間の摩擦にうちかつて層の附着面で滑りを生ずる場合には、当然層相互間における変形の自由度を考慮して取扱わねばならないが、このような一般的な場合に対して問題の解を理論的に求めることはきわめて困難である。

しかしこのような場合でも層間に摩擦が作用しないという仮定を用いることにより近似的に解かれるであろう。層相互間に摩擦がない場合に対する理論的な解は*G.Sonntag* が半無限体の表面に周期的な分布荷重が作用した場合について求めている。そしてそこでは層は梁として取扱われている。

さてここでは極端な２つの場合、すなわち層間の附着が充分である場合と層相互間に摩擦がなない場合について考え、前者の場合に対して層状体の性質より補正直交異方性体の性質を決定する方法について、後者の場合に対しては $G, Sonntag$ の示した解および応力集中の分散に対する層の影響について述べる。

(1) 層間が完全に附着している場合

いま図－1･3･1 のごとく２種の層Ｉ（弾性係数 E_{I} 、ポアソン比 ν_{I} 、層高 h_{I} ）および層Ⅱ（弾性係数 E_{II} 、ポアソン比 ν_{II} 、層高 h_{II} ）が規則的に積層され、各層間は完全に附着しているものとする。しかるときはこの層状体に対する直交異方性の補正体の合成主弾性係数 E_1 および E_2 は層に垂直および平行の方向にある。補正体を特性ずける弾性定数は E_1 、E_2 、G_{12}、ν_{12}、等で表わされるが、それらの間には

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$$

の関係がある。これらはいづれも各層の弾性性質および層高に関係があり、つぎのように与えられる。

$$E_1 = \frac{(h_{I} + h_{II}) \quad E_{I} E_{II}}{h_{I} E_{II} + h_{II} E_{I}} \qquad (1.3.2\ 1.)$$

$$F_2 = \frac{h_{I} E_{I} + h_{II} E_{II}}{h_{I} + h_{II}} \qquad (1.3.2\ 2.)$$

$$G_{12} = \frac{(h_{I} + h_{II}) \, G_{I} E_{II}}{h_{I} G_{II} + h_{II} G_{I}} \qquad (1.3.2\ 3.)$$

$$\nu_{12} = \frac{(h_{I} + h_{II}) \, E_{I} E_{II} \quad (\nu_{I} h_{I} + \nu_{II} h_{II})}{(h_{I} + h_{II} + h_{II} E_{I}) \, (h_{I} E_{I} + h_{II} E_{II})} \qquad (1.3.2\ 4.)$$

$$\nu_{21} = \frac{h_{I} \nu_{I} + h_{II} \nu_{II}}{h_{I} + h_{II}} \qquad (1.3.2\ 5.)$$

いまつぎのごとく層Ｉおよび層Ⅱの層高，弾性係数の比　$\alpha = h_{II} / h_{I}$ ，$\beta = E_{II} / E_{I}$ (1.3.2 6.)

をとれば、主弾性係数の比 E_2 / E_1 はつぎのように表わされる

$$E_2 / E_1 = \frac{(1+\alpha\beta) \quad (\alpha+\beta)}{(1+\alpha)^2 \beta} \qquad (1.3.2\ 7.)$$

この場合 E_1 は層に垂直であり、E_2 が層に平行にとられているからつねに $E_2 / E_1 \geqq 1$ が適用される。このように補正直交異方体の弾性定数が定められるとそれらの値を用いて 3.1 で示した直交異方性体の平面問題として取扱えばよい。

(2)層間に摩擦がない場合

図－1･6 に示すごとく高さ h の等しい等方性層よりなる半無限板を考え各層間に摩擦が作用

しないものとし、その表面上に原点を有するx，y座標をとり、層の直角な方向すなわちy軸方向の変位をvで表わす。また各層はそれらの境界上のいたるところで一様に接触しており荷重によつて割目を生じないものと仮定する。しかるときは荷重は半無限板の表面あるいは層の垂直にかゝることになる。

したがつてこのように考えると層を梁として取扱うことができる。いま図－1.3.2 のようにこの層状板の一つの層より長さdxの梁の要素を取出して考える。この場合にはこの要素に作用する力は図－1.3.3 に示すごとく、梁の高さhにわたつてせん断力Q、曲げモーメントMと梁に直角に作用する圧縮応力σ_yである。これらの力のy方向つり合に対して次式をうる。

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx\, h + \frac{\partial Q}{\partial x} dx = 0 \qquad (1.3.28)$$

またモーメントのつり合は

$$Q\, dx + \frac{\partial M}{\partial x} d_x = 0 \qquad (1.3.29)$$

のようになり、荷重された梁の変位vに対しては衆知のごとく梁理論による式がつぎのように示される。

$$\frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = Q \qquad (1.3.30)$$

さらに荷重によつて割目を生じないように仮定しているから、つぎのような変形に対する式が適用されうる。

$$-\frac{\partial v}{\partial y} E = \sigma_y \qquad (1.3.31)$$

式(1.3.28) をyで微分し、それに(1.3.29)式のQを用いて(1.3.31)式の関係を考慮すれば、この場合の応力に関する基本方程式として次式をうる。

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \sigma_y}{\partial x^4} = 0 \qquad (1.3.32)$$

上式の解はつぎのような形をとる。

$$\sigma_y = p_0 + p_1 e^{-\lambda y} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \qquad (1.3.33)$$

こゝに

$$\lambda = \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}} \frac{h}{(2a)^2} = 11.4 \frac{h}{(2a)^2} \qquad (1.3.34)$$

であり、p_0 および p_1 は積分常数で、aは解を与える関数の半波長を表わす。半無限板の縁

($y=0$)では(1・3・33)式はつぎのような周期的な荷重を示す。

$$\sigma_y\ (y=0)=p_0+p_1\ \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (1.3.35.)$$

比較のために層状でない等方等質の半無限板に対するGirkmann の解を示すとつぎのようである。

$$\sigma_y=p_0+p_1\ \left(1+\frac{\pi y}{a}\right)e^{-\frac{\pi y}{a}}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (1.3.26.)$$

上式において$y=0$とおけば、この場合も半無限板の縁においては(1・3・35)式で与えられるような荷重が作用することが判る。

さて(1・3・33)式と(1・3・36)式とを比較することにより、半無限板の縁における荷重による応力集中の分散状態の相違について考察することができる。両式の大きな差異は等方等質の場合の解にはyなる要素を附加的にもつ項を含んでいることである。さらに両式の指数を比較すれば、hが小さいほど、すなわち半無限板をなす層が薄いほど(この場合は縁における周期荷重の波長に関係するが)応力の減少はゆるやかである。具体的に比較するためにG.Sonntag が計算した結果を示すと図－1・3・4 のようである。図－1・3・4 はy軸に沿つて層の高さhと波長$2a$ との種々の関係に対する周期的な縁荷重の減少する状態を等方等質の場合と比較して示している。図－1・3・4 の曲線あるいは(1・3・33)式ではある層の高さhにわたつての圧縮応力 σ_y の実際の変化を与えることができないが、$y=0.5+i\,h(i=0,1,2\cdots\cdots)$ なる位置における中間値によく近似した値を与えている。

図－1.3.4.を見れば層の高さの減少による荷重伝幡の状態が明らかに判る。

曲げたモーメント σ_x を求めるために(1・3・33)式の σ_y の値を(1・3・30)式に代入し、さらにそれを(1・3・29)式に用いて積分すればつぎのように曲げモーメントの式をうる。

$$M\ =\ p_1\frac{h^2}{2\sqrt{3}}\ e^{-\lambda y}\cos\ \left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (1.3.37.)$$

上式において$y=0.5$ と匠最初の層の曲げモーメントが求められ、$x=0$, $2a$, $4a$ ……に対して最初の層の底面においてx方向に次式で与えられる最大引張応力 $\sigma_{x\,max}$ を生ずる。

$$\sigma_{x\,max}=P_1\sqrt{3}\ \ e^{-(2.38h/2a)^2} \qquad (1.3.38)$$

層が薄い場合($h/2a<0,2$)には(1,3・38)式より判るように、最初の層の曲げ応力は層の高さに無関係に近似的に

$$\sigma_{x\,max}\ \fallingdotseq\ 1.7\,p_1 \qquad (1.3.39.)$$

で与えられる。

以上で等しい弾性性質をもつ層の層間に摩擦が作用しない場合の層状半無限板の荷重伝幡状について考察したが、つぎに荷重の伝幡状態および最大曲げ応力に及ぼす中間層の影響について述べる。

弾性係数が E_{I} なる高さ h_{I} の層の間に弾性係数 E_{II} の高さ h_{II} なる中間層が存在する場合を考える。等方等質の場合すなわち $E_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{II}}$ のときはさきに示されたごとく応力の伝幡は弾性係数に無関係であつたが、$E_{\mathrm{I}} \fallingdotseq E_{\mathrm{II}}$ の場合には弾性係数が影響を及ぼす。この場合もさきも同様層相互間には摩擦が作用しないという極端な場合を仮定する。一対の層と中間層を単位として取扱い、その高さ h、せん断力 Q、および曲げモーメント M をつぎに示すように

$$h = h_{\mathrm{I}} + h_{\mathrm{II}} \quad , \quad Q = Q_{\mathrm{I}} + Q_{\mathrm{II}} \quad , \quad M = M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} \qquad (1.3.40.)$$

として層の部分(I)と中間層の部分(II)の和として考えるとき、(1・3・28)、(1・3・29)式はそのまゝ適用される。しかし(1・3・30)式はこゝではつぎのようになる。

$$\frac{E_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{I}}^3 + E_{\mathrm{II}} h_{\mathrm{II}}^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = Q \qquad (1.3.41.)$$

また(1・3・31)式の E の代りに層と中間層との全体的な弾性係数 E' を用いると E' は(1・3・21)式に示される E_1 の値と同一になる。したがつてこの場合の応力に関する基本方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{(E_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{I}}^3 + E_{\mathrm{II}} h_{\mathrm{II}}^3)\,(h_{\mathrm{I}} E_{\mathrm{II}} + h_{\mathrm{II}} E_{\mathrm{I}})}{12\,(h_{\mathrm{I}} + h_{\mathrm{II}})^2 \quad E_{\mathrm{I}} E_{\mathrm{II}}} \frac{\partial^4 \sigma_y}{d x^4} = 0 \qquad (1.3.42)$$

上式はさきの場合 ($E_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{II}}$) の(1・3・32)式と第2項の係数が異なるだけであるから、(1・3・42)式の解は(1・3・34)式で与えられる指数 λ の代りにつぎのような λ'

$$\lambda'^2 = \frac{\pi^4}{a^4} \frac{(E_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{I}}^3 + E_{\mathrm{II}} h_{\mathrm{II}}^3)\,(h_{\mathrm{I}} E_{\mathrm{II}} + h_{\mathrm{II}} E_{\mathrm{I}})}{12 E_{\mathrm{I}} E_{\mathrm{II}} (h_{\mathrm{I}} + h_{\mathrm{II}})^2} \qquad (1.3.43.)$$

を用いるとき、(1・3・33)式と同一になる。(1・3・26)式の関係を用いれば(1・3・43)式はつぎのような形になる。

$$\lambda' = \frac{2\pi^2 h_{\mathrm{I}}}{\sqrt{3}\,(2a)^2}\, c = 11.4 \frac{h_{\mathrm{I}}}{(2a)^2}\, c \qquad (1.3.44.)$$

こゝに

$$c = \sqrt{\frac{(1+\beta\alpha)\quad(\alpha+\beta)}{(1+\alpha)^2 \beta}} \qquad (1.3.45.)$$

$\alpha = 0$ のときは $c = 1$ となり $\lambda' \equiv \lambda$ で中間層のない場合となり、また $\alpha = 1$、$\beta = 1$ のときも中

間層が層自身と同一になるからさきの場合と同じようになる。（1.3.33）式より明らかなように指数λ'が大きいほど、したがって荷重状態に対する層の高さ（$h_I/2a$）が一定のときには c の値が大きいほど応力集中（あるいは荷重）の減少が速くなる。G.S onntag は（1.3.45）式を用い$\alpha \leqq 1$および$\beta = 0.01$～100なる値に対して c の値を求め、それを図示しているが、それによると$\beta = 1$（$E_I = E_{II}$）の場合には、薄い中間層がある方が、このような中間層のない場合よりも c は小さくなり応力集中の減少は一層ゆるやかになる。しかしその影響はきわめて小さく無視できるほどである。$\alpha = 1$（$h_I = h_{II}$）の場合には弾性係数の差異が大きいほど（$E_{II} > E_I$、$E_{II} < E_I$ の場合とも）応力集中の減少は一層急激になることが判る。また中間層が薄い場合（$\alpha << 1$）にはその弾性係数の影響はほとんどなくなる。

つぎに最初の層における曲げモーメントおよびそれによる最大引張応力を求めるとつぎのようになる。（1.3.33）式および（1.3.31）式を用いて変位 v を算出し、さらにそれを（1.3.29）式に代入して積分し、E および λ の代りに E' 及び λ' を用いることにより、最初の層 I および層 II の一組みを単位として考えた層に対する曲げモーメント M が得られる。この曲げモーメントを層 I および層 II における曲げモーメント M_I および M_{II} に分割するために近似的に $e^{-\lambda' y}$ の項を1とおけばつぎのようになる。

$$M_I = p_1 \frac{h_I^2 (h_I E_{II} + h_{II} E_I)}{2\sqrt{3}c' (h_I + h_{II}) E_{II}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (1.3.46)$$

$$M_{II} = p_1 \frac{h_{II}^3 (h_I E_{II} + h_{II} E_I)}{2\sqrt{3}c (h_I + h_{II}) h_I E_I} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

上式を抵抗モーメントで割り（1.3.26）式の関係を用いれば、最初の層および中間層における最大曲げ応力がつぎのごとく導かれる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xI\,max} &\doteqdot 1.7\,p_1 \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{(1 + \beta\alpha^3)\beta}} \\ \sigma_{xII\,max} &\doteqdot \sigma_{xI\,max}\,\alpha\beta \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.47)$$

上式より明らかなごとく最初の層における最大曲げ応力は中間層の高さおよび弾性係数に影響されるが、その影響の程度は G.S onntag が（1.3.47）式を用いて計算した図－1.3.5より明らかである。この図を見れば判るように中間層が層自身よりも軟かいときには、中間層の高さが大きいほど最大曲げ応力は増大するし、その傾向は弾性係数の差異が大きいほど増加する。しかし中間層が薄くて硬い場合（$\alpha << 1$、$\beta > 1$）には、層の応力にはなんら影響を与えない。また中間層が層と同じ程度の弾性係数をもつ場合（$\beta \doteqdot 1$）には中間層による影響は非常に小さい。

3．3　点等方性弾性地山

地山材料は各点において等方性であり、ポアソン比は全領域を通じて一定であるが、弾性係数はある与えられた深さにおいては一定であつて地表面からの深さの関数であると仮定する。このような地山材料に対する弾性理論的な取扱いは古くは*Fröhlich*[30]によつて考えられており、*Ohde*[31]や*Borowicka*[32]等の研究があり、最近では*Curtis*および*Richart*[33]の研究がある。これらはいづれも基礎地盤内の応力分布を研究する目的で地表面上に集中荷重をうける半無限体内の応力分布が基礎地盤弾性係数の変化するために及ぼされる影響について検討したものであり、*Fröhlich*は粉体の特性を考慮して応力集中係数なるものを導入することにより、弾性論に修正を加えた準弾性論的解法をとつており、*Ohde*はこゝで仮定したごとき状態の点等方性半無限体の場合に対して変位成分を無限級数で表わし、変位成分で与えられている釣合方程式を直接解くことにより、無限級数の係数を定め、任意のポアソン比に対する応力成分を求めている。*Borowicka*また*Curtis*および*Richart*は応力関数を用いて一般弾性式を種々の弾性係数の変化に対して導出している。

筆者はさきに仮定したごとき状態の地山中に坑道が開削された場合の応力状態の研究について後述するが、こゝではこのような地山状態に対する弾性基礎方程式を導くことにする。

さきに述べたごとき点等方性材料にたいする弾性定数の仮定は、通常の応力—ひずみ関係に影響を及ぼさないし、またひずみ—変位式も弾性定数の変化に影響されない。したがつていま平面ひずみの状態を考え、地表面に原点をもち鉛直下向きをy軸、地表面をx軸とすると直角座標系を用いれば、釣合方程式は完全弾性体の場合の　式と同様につぎのように書ける。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.48)$$

いま考えているような問題では物体力としては地山の重量だけであるが、この場合にも重畳の法則が妥当であり、完全弾性地山の場合と同様に重力場内における応力は、自重の作用しない場合の解に　地山重量による影響を別々に加えることによつてえられる。

弾性理論を用いた完全な解はこの釣合方程式、境界条件および応力—ひずみ関係のほかに、適合条件をも満足しなければならない。適合条件式は（1.2.4）式で与えられる。すなわち

$$\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}\qquad(1.3.49)$$

また応力—ひずみ関係は（1.2.8）式で与えられるように

$$\epsilon_x=\frac{1}{E}\left\{(1-\nu^2)\,\sigma_x-\nu\,(1+\nu)\,\sigma_y\right\}$$

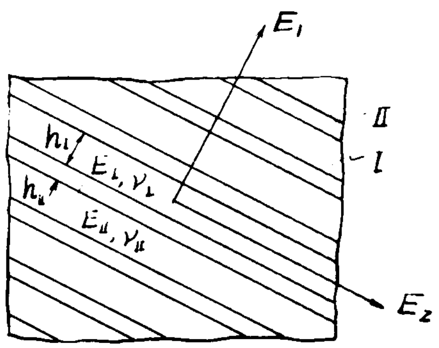


図-1·3·1

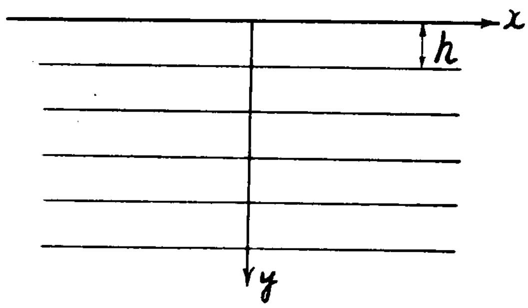


図-1·3·2

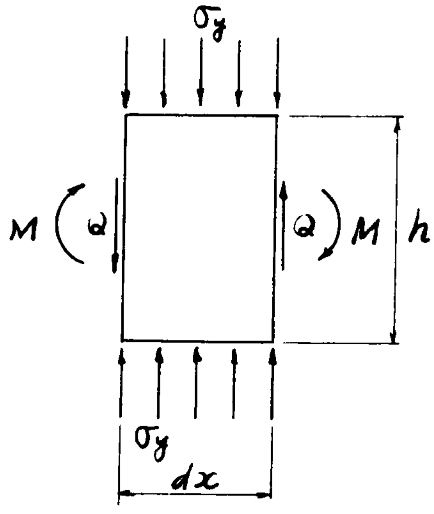
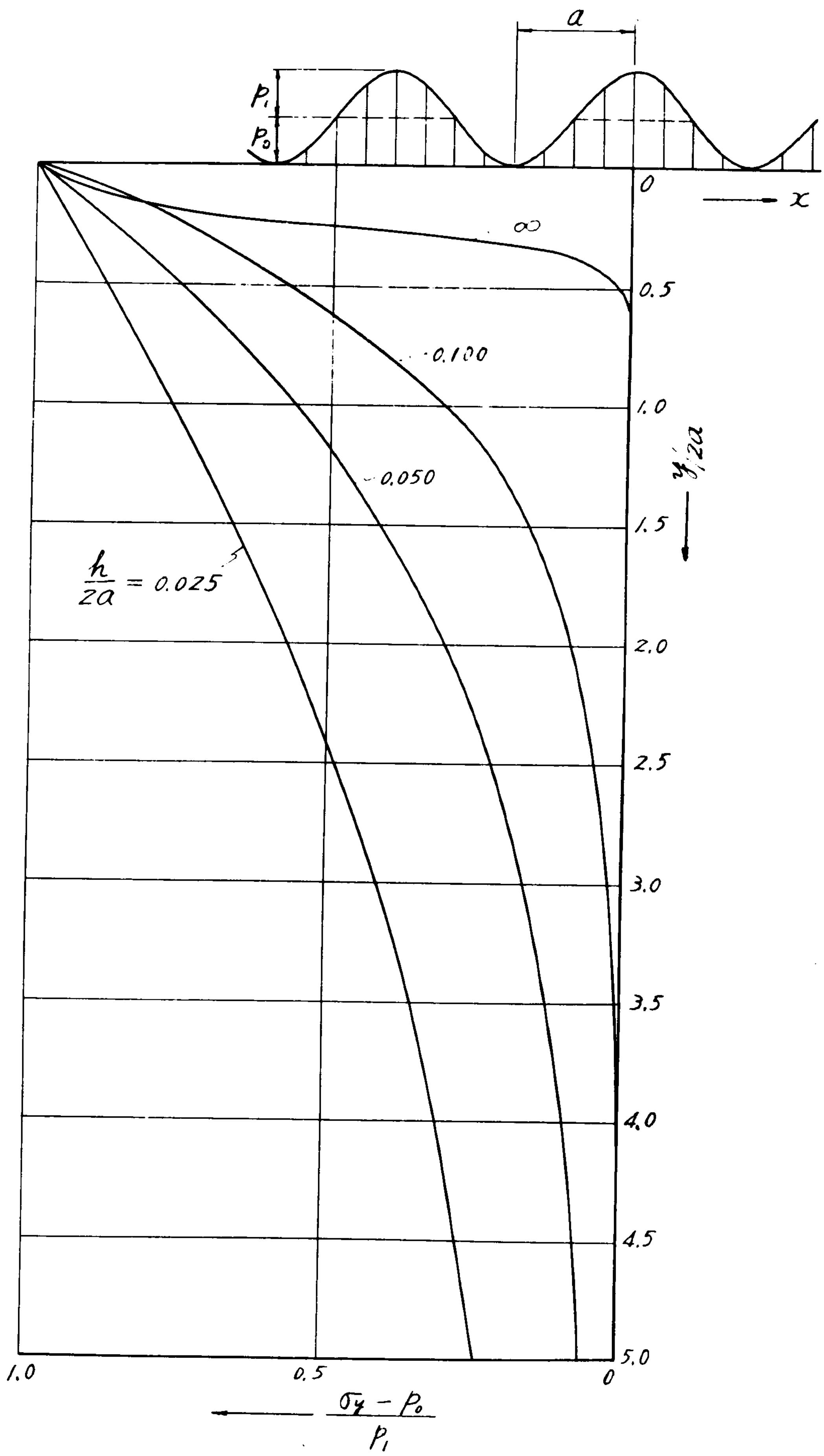


図-1·3·3



a
p_1
p_0
0
x
∞
0.100
0.050
$\frac{h}{2a} = 0.025$
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0
$y/2a$
1.0
0.5
0
$\frac{\sigma_y - p_0}{p_1}$

図-1·3·4

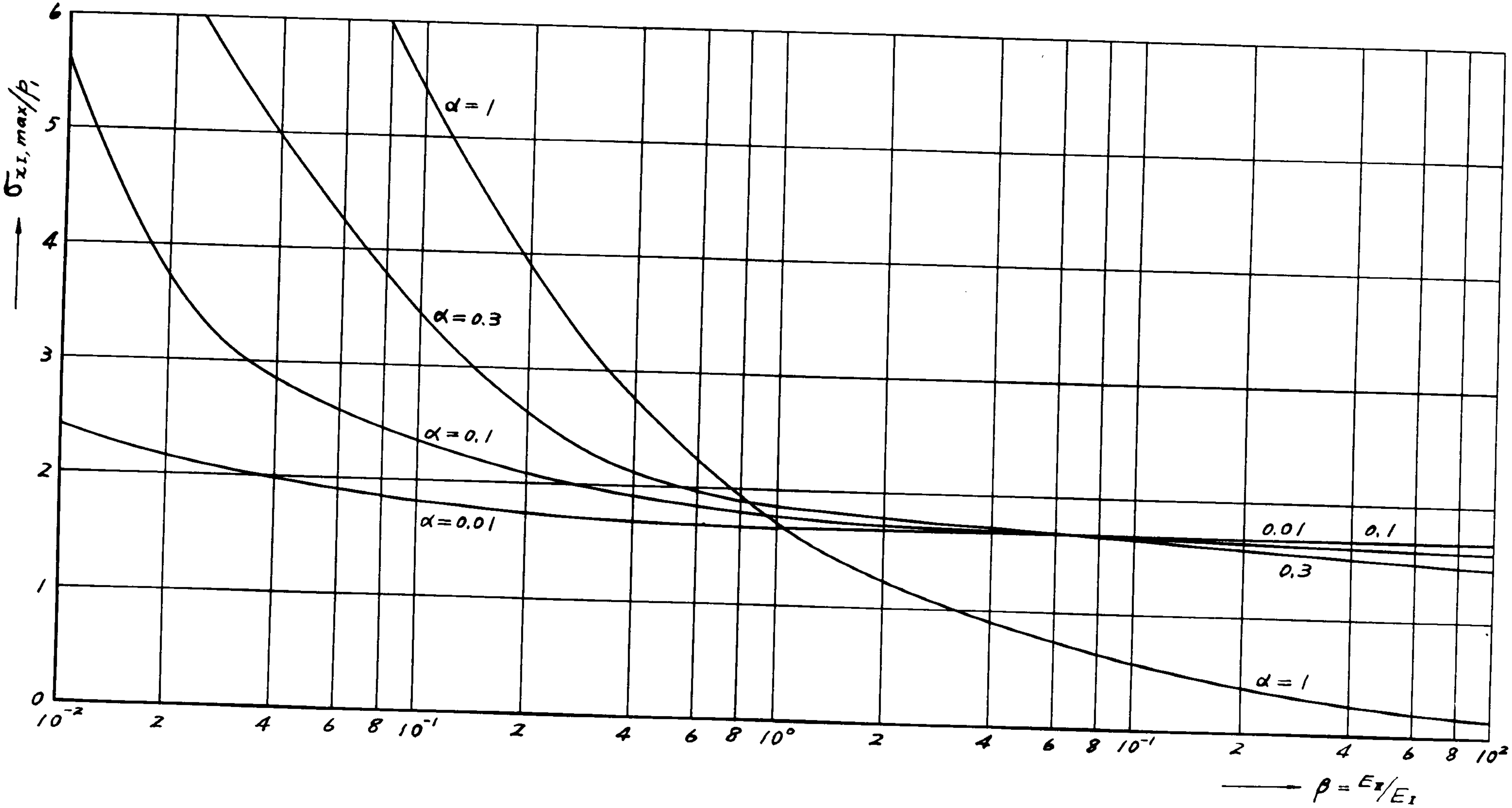

$\sigma_{zI,max}/p_1$
0
1
2
3
4
5
6
10^{-2}
2
4
6
8
10^{-1}
2
4
6
8
10^{0}
2
4
6
8
10^{-1}
2
4
6
8
10^{2}
$\beta = E_{II}/E_{I}$
$\alpha = 1$
$\alpha = 0.3$
$\alpha = 0.1$
$\alpha = 0.01$
0.01
0.1
0.3
$\alpha = 1$

図-1・3・5

$$e_y = \frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x\}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2}{E}(1+\nu)\tau_{xy} \qquad (1.3.50)$$

さきに仮定したように弾性係数Eはyのみの関数と考えるから、$E=f(y)$ とすれば、

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

となる。（1.3.5 0）式を（1.3.4 9）式に代入し、せん断応力を消去するために釣合方程式（1.3.4 8）式を用いれば、適合条件式はつぎのように表わされる。

$$\Delta\theta - 2\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial lnE}{\partial y} + \{\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\}\{(\frac{\partial lnE}{\partial y})^2 - \frac{\partial^2 lnE}{\partial y^2}\} = 0$$

(1.3.5 2)

こゝに$\Delta = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ であり、θは主応力の和すなわち$\theta = \sigma_x + \sigma_y$である。

この式より判るごとく地山が深さによって弾性係数を変化するような点等方性の場合には、応力分布に影響を及ぼすのはEの実際の値かあるいはその変化の割合よりも、むしろlnE（lnは自然対数を表わす）の変化率である。また弾性係数が一定な場合の通常の解と比較して、この場合にはポアソン比の影響が入ってくる。

また（1.3.5 2）式を$Airy$の応力関数Fを用いて表わせばつぎのようになる。

$$(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}) - 2(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y})\frac{\partial lnE}{\partial y}$$
$$+\{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\}\{(\frac{\partial ln E}{\partial y})^2 - \frac{\partial^2 ln E}{\partial y^2}\} = 0 \qquad (1.3.53)$$

したがって点等方性弾性地山内の応力状態は境界条件を満足し、かつ（1.3.5 3）式を満すごとき応力関数Fを求めれば$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \rho g y$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho g y$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$

で得られることになる。なお地山が等方等質の完全弾性体の場合には上式で$E = Const.$であるから、第一項のみが残り、（1.3.5 3）式は（1.2.1 3）と同じになる。

才4章　土質（塑性）地山および弾塑性地山

土質地山に設けられた構造物に対する力学的取扱いにおいては、土質材料が岩石に近いものや硬い粘土などでかなり弾性を示すものである場合には、近似的に弾性理論により応力、変位等を計算しているが、一般に砂質土や軟かい粘土などではわずかな応力によつて塑性を呈し、破壊を起しやすい。また岩石よりなる地山であつても節理、亀裂の発達により、また風化、深度そのほかの影響によつて塑性状態を呈している場合も多い。さらに坑道などの開削による地山の攪乱が起される以前には弾性域にあつた地山材料が、坑道開削による応力の増大に伴つて塑性的性質を示し、応力およびひずみは過渡的な経過をたどり、地山には弾性域と塑性域とが同時に存在するごとき状態を生ずる。このように初期の地山が地山材料の弾性限度以上あるいは破壊強度以上の状態にある場合、あるいは坑道の開削によつてそれらの状態を生ずるごとき場合に対しての理論的な取扱いについて述べる。

土質地山を塑性体として、その中に設けられた構造物にかゝる圧力に関しては従来より多くの研究[34]が行われてきているが、それらは初期においてはもつぱら土圧論に基ずいていた。この土圧論は従来の粉体力学におけるもつとも体系立つたものとして、土質地山あるいは粉体（あるいは粒体）と見なせる地山に対して現在でもよく用いられている。しかし西原、郡[35]らはこの土圧論は一般性ならびに発展性が少ないことなどから批判を加え、粉体の力学に対して理論的ならびに実験的研究を行い、粉体中での応力―ひずみ関係および基礎方程式を導いているが、粉体では応力とひずみは1対1で対応しないこと、最初は等方等質であつても微少な荷重によつて非等方性、非等質性になりやすいこと、変形が非常に大であること、応力の大きさおよび方向が荷重を加える途中で変動すること等のため、この理論式の適用はこゝで考えているごとき複雑な状態のもとでは困難である。

一般に自然状態の土塊や人工的な土質構造が外力の作用によつて破壊する場合は多くせん断破壊である。したがつて土の破壊に対する応力条件は材料力学における最大せん断応力説と同じようなものであるから、後に述べるような金属材料に関する塑性理論での *Tresca* や *von Mises* の降伏条件と同様な破壊条件が考えられる。しかし土の場合はその粘質が金属に比してはるかに複雑であるので、数理的な取扱いの基準となる破壊条件を規定することは容易でない。通常用いられているものに次式で示されるごとき *Coulomb* の実験公式

$$\tau = c + (\sigma_0 - u_w)\tan\phi = c + \sigma\tan\phi \qquad (1.4.1)$$

がある。こゝで τ は土のせん断強度であり、c および ϕ は粘着力、内部摩擦角で実験的な常数、σ_0 はせん断面の全応力、u_w は間隙水圧, σ は有効圧（または粒子間圧力）である。しかし（1.4.1）式が大体用いられるのは砂、シルトまでであり、粘土になると近似的にも満足しないことがある。

さていま土中に鉛直下向きに y 軸、水平方向に x 軸をとるとき、土の単位体積重量を γ として釣合方程式はつぎのように書かれる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}+\frac{\tau_{xy}}{\partial x}=\gamma \qquad (1.4.2)$$

土中の応力状態は1組の応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ で定まるから、（1.4.2）式のみではこれらの応力成分を決定するための条件が一つ足りない。これを補うのが弾性論ではフックの法則であり、土の塑性論では破壊の応力条件式（1.4.1）式である。この場合（1.4.1）式において c, ϕ が破壊時の応力状態にかゝわらず一定値をとるものとすると、このような σ, τ, は限界状態にある土中の一点で破壊のおこる面上の応力を表わす。いま*Mohr* の応力円を用い、図－1.4.1に示すごとく直線 QR を（1.4.1）式に対応するものとすると、破壊面上の応力は限界点での主応力 σ_1 σ_2 を直径の両端とする*Mohr*円に切する直線 QR の上になければならず、ほかの面上の応力はこの線を超えることはできない。これが限界状態にある土中の応力が満す条件で、QR は*Mohr* の限界 線と呼ばれるものである。上の図よりつぎの関係

$$\sigma_1=\sigma_2\ tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)+2c\ \ tan\ \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) \qquad (1.4.3)$$

がえられるから、釣合方程式とともに σ_x σ_y τ_{xy} に対する3ヶ の条件式が得られることになる。

攪乱されていない地山において、水平な地表面に原点を有し水平方向に x 軸、鉛直下向きに y 軸をとるとき、地表面から h の深さの地点における応力成分は次式で与えられる。

$$\sigma_y=\gamma h \qquad \sigma_x=\frac{\gamma h}{m-1} \qquad (m\,;\text{ポアソン数})\ (1.4.4)$$

上式を塑性体としての地山に適用するために*Mohr* の応力円によつて解くとすれば、最大主応力を σ_1、最小主応力を σ_2 として次式をうる

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=m-1$$

いま砂のような粉体の地質の地山を考えれば、その内部の任意点における応力状態は図—1.4.1において $c=0$ とおけるから、（1.4.3）式よりつぎのように定められる。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \qquad (1.4.5)$$

しかし弾性体とみなされ、せん断破壊を起さないような地山内では水平方向の主応力は（1.4.4）式によつて定められるが、せん断強度が有限な場合にはつぎの不等式が成立する。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gtreqless m-1 \qquad (1.4.6)$$

上式の不等号＜の時はせん断破壊をなし、σ_1/σ_2 の値が（$m-1$）より（$1+\sin\phi$）/（$1-\sin\phi$）になるまで地山は滑り面に沿って運動することになる。また等号のときは*Mohr* の限界線を表わし、限界状態にある土中の応力の満すべき条件を与えている。不等号＞の時はせん断破壊に至らず弾性体としての応力状態である。しかしこのような極限式を用いて解析を行うと、えられる解は主動土圧および受動土圧の両極限状態に対応しており、しかもこれらの極限時には土質構造物全体が一挙に崩壊してしまうということになり、現実の破壊状態と異なる結果を与える。この点について余剰強度なるものを考慮した場合の極限条件式を用いて理論的考察が行われている。[36]

さて上に述べたごとき関係を用いて塑性状態にある土中応力の基礎関係式がつぎのごとく求められる。[37] いま図−1.4.2のように未知の応力成分 σ_x σ_y τ_{xy} の代りに主応力 σ_1, σ_2 と主応力方向 α を用いると、

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha \\
\sigma_y &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha \\
\tau_{xy} &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha
\end{aligned}\right\} \quad (1.4.7)$$

σ_1 を大きい方の主応力とすると、土中に生ずる滑り面は σ_1 の方向と $\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}$ の角で交叉する。これらの滑り面方向の線素を ds_1、ds_2 とし、図のごとく第一滑り面（ds_1の方向）が x 軸となす角を θ とする。また $\sigma_m=(\sigma_1+\sigma_2)/2$ を用いると*Mohr* 円により、

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= (1+\sin\phi)\,\sigma_m + c\cos\phi \\
\sigma_2 &= (1-\sin\phi)\,\sigma_m - c\cos\phi
\end{aligned} \quad (1.4.8)$$

がえられるから、これらを（1.4 7）式に代入して $\alpha=\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}$ の関係より θ を用いると、応力成分は次式のように書ける。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_m\{1-\sin\phi\sin(2\theta-\phi)\} - c\cos\phi\sin(2\theta-\phi) \\
\sigma_y &= \sigma_m\{1+\sin\phi\sin(2\theta-\phi)\} + c\cos\phi\sin(2\theta-\phi) \\
\tau_{xy} &= (\sigma_m\sin\phi + c\cos\phi)\cos(2\theta-\phi)
\end{aligned}\right\} \quad (1.4.9)$$

（1.4.9）式を釣合方程式（1.4.2）に代入し、x, y 方向の微係数を滑り面方向の微係数で書換えると、結局限界状態の土中の滑り面にそって成立つ応力の平衡式は、滑り面上の有効圧に基くせん断抵抗合応力 p を用いて表わせば次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial s_1} - 2\left(p\tan\phi + \frac{c}{\cos\phi}\right)\frac{\partial\theta}{\partial s_1} &= \gamma\sin(\theta-\phi) \\
\frac{\partial p}{\partial s_2} + 2\left(p\tan\phi + \frac{c}{\cos\phi}\right)\frac{\partial\theta}{\partial s_2} &= \gamma\cos\theta
\end{aligned}\right\} \quad (1.4.10)$$

とくに土の摩擦だけが強度に効くとした場合には上式で $c=o$ とおけばよい。またもし $\phi=o$ であれば $p=\sigma_m$ を考慮して（1.4.1 0）式は、

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_m}{\partial s_1} - 2c\frac{\partial \theta}{\partial s_1} &= \gamma \sin\theta \\
\frac{\partial \sigma_m}{\partial s_2} + 2c\frac{\partial \theta}{\partial s_2} &= \gamma \cos\theta
\end{aligned}
\right\}
\qquad (1.4.1\,1)
$$

となる。さらにこの式で $\gamma=o$ の場合は完全塑性体の平面ひずみ問題の基本式に帰着する。すなわち（1.4.1 1）式の右辺を０とした *Henoky* の式となる。

以上のごとく塑性状態にある土中の応力状態は（1.4.1）式なる関係を（1.4.2）式に用いて境界条件を満足するごとく（1 1.4.2）式を解くか、あるいは土の塑性領域内の滑り線の模様が知られゝば、滑り線に沿つて成立つ関係式（1.4.1 0）および（1.4.1 1）式を積分することにより完全に知れることになる。

実際に土質の地山においては土の強度そのものが条件によつて変化するところの粘着力、内部摩擦に関係する ϕ、応力状態および含水状態に依存する有効圧等に関連をもつので、破壊の応力条件が金属の場合よりも複雑である。したがつて上に述べた基礎関係式等を用いて複雑な境界形状や境界条件を有する問題を解くことは実際にはなはだ困難である。それでつぎに塑性状態にある地山の材料が金属におけるごとき降伏条件を近似的に満足するものと仮定して、その場合における理論的な取扱いについて述べることにする。

まずこの場合に重要な基礎的条件を挙げると、塑性変形によつては体積が変らないこと静水圧のみでは材料の破損は起らないことである。さらにひずみ履歴の影響を考えないことにすると降伏条件は応力のみの関数と考えられる。たとえば材料の破損に関する種々の学説のうち、中間応力の影響を考慮に入れた最大せん断ひずみエネルギー説より導かれた *von Mises* の降伏条件は、つぎの式のごとく偏差応力の２次の不変量 J_2 がある値に対したときに降伏がおこることを意味している。すなわち

$$J_2 - k^2 = o \qquad (1.4.1\,2)$$

こゝで常数 k は単純せん断の時の降伏限度である。τ_2 はつぎのごとく偏差応力の成分を $s_x\ s_y\ s_z$、またその主成分を s_1, s_2, s_3 とするとつぎのように書ける。

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right)$$

この *von Mises* の降伏条件式は比較的簡単な数学形式をとるため、後述する弾塑性地山中の坑道周辺応力状態の解析に用いられるが、地山の土壌が飽和軟粘土のごとく内部摩擦角 ϕ が零と見

なせるようなものであり、しかも近似的に平面ひずみの状態と考えられる場合には、*von Mises* の条件式が用いられるだろう。また地山が岩石の場合においても岩盤が等方等質弾性状態から完全塑性状態に移行する理想的な過程を仮定することにより、*von Mises* の条件式を用いて弾塑性応力状態を求めることができる。

さらに A.Nadai[39] は八面体せん断応力の概念を使つて不変量 J_2 にもつとも有名な物理的解釈を与えている。すなわち応力の主軸に関して正八面体を考え、その面に働く垂直およびせん断応力を八面体垂直応力 σ_{oct} 八面体せん断応力 τ_{oct} と呼んでいる。しかるときは、

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{oct} &= \frac{1}{3}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)\\ \tau_{oct} &= \sqrt{\frac{1}{3}\left(s_1{}^2+s_2{}^2+s_3{}^2\right)}\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.14.)$$

で与えられ、不変量 J_2 は $\frac{3}{2}\tau_{oct}{}^2$ に等しくなる。降伏条件としては *von Mises* のものと結局は同じことであるが、*von Mises* が（1.4.12）式をさらに一般化した式、$\tau_1{}^2+\tau_2{}^2$ $\tau_3{}^2 = f(\nu)$、 $\nu = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$、 と同様に、$\tau_{oct}$ が σ_{oct} の既知関数となつたときに降伏することから条件式を立てゝいる。すなわち降伏条件式は、

$$\tau_{oct} = f\left(\sigma_{oct}\right) \qquad (1.4.15)$$

結局塑性域における応力状態は（1.4.12）式あるいは（1.4.15）式等の降伏条件式および（1.4.2）の 合方程式を用いることによりえられる。

また A.Nadai は *Lode* の実験結果を基礎にして、弾性破損の説として *Henoky − Mises* の説（最大せん断ひずみエネルギー説）を採用して、つぎのような塑性理論を立てている。この場合 I）主ひずみの方向はつねに主応力の方向と一致するとしている。このことは経験的事実である。 II）体積は変化しない。このことより ε_1、ε_2、ε_3 を主ひずみとすれば、

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0 \qquad (1.4.16)$$

III）降伏条件としては ε、γ 平面内の3つのモールの主ひずみ円の線図はつねに σ、τ 平面内の3つの主応力円の線図に相似であるとしている。これは *Lode* の実験結果を適用したもので、この条件は σ_1、σ_2、σ_3 を主応力として次式で表わされる。

$$\frac{\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)/2}{(\sigma_1-\sigma_3)/2} = \frac{\varepsilon_2-(\varepsilon_1+\varepsilon_3)/2}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2} \qquad (1.4.17)$$

上式はさらにつぎのように書き直せ。

$$\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\sigma_1-\sigma_2} = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\sigma_2-\sigma_3} = \frac{\varepsilon_3-\varepsilon_1}{\sigma_3-\sigma_1} \qquad (1.4.18)$$

この関係と（1.4.1 6）式とより*A．Nadai* はつぎのごとく応力と塑性ひずみの関係式を与えている。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= c\left\{\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right\} \\ \varepsilon_2 &= c\left\{\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_1)\right\} \\ \varepsilon_3 &= c\left\{\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.19)$$

なお（1.4.1 8）式の比の値が $\frac{2}{3}c$ に相当する。上式は弾性体のフックの法則

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{e1} &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_1 - \frac{1}{m}(\sigma_2+\sigma_3)\right\} \\ \varepsilon_{e2} &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_2 - \frac{1}{m}(\sigma_3+\sigma_1)\right\} \\ \varepsilon_{e3} &= \frac{1}{E}\left\{\sigma_3 - \frac{1}{m}(\sigma_1+\sigma_2)\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.20)$$

と比較すると $1/E$ が c に、ポアソン数 m が2に置きかえられた形になつている。したがつて（1.4.1 9）式を応力の釣合方程式とともに用いることにより未知数としての応力成分を求めることができる。なおこの c は一般的に塑性係数というべきもので、*Nadai* の理論ではこれを定数にしているが、中川有三 [40] は c を定数とせず、ひずみの程度に応じて変化するものと考えて塑性理論を立てている。

さきに述べたごとく土質地山に対しては破壊条件として普通クーロンの実験公式が用いられているが、星埜 [41] はその中の土の力学常数としての摩擦角や粘着力の本質が明らかでなく、また土体内部における応力とひずみの変化をこれまでのように弾性理論と降伏条件からだけでは説明することができないし、問題を完全に解くことは望めないと指摘して、弾性から塑性を経て降伏に至る一連の力学現象を説明し、土の力学における塑性の基本理論を立て、さらにその理論を土の三軸試験に適用している。それによると降伏の条件としては正八面体垂直応力 σ_{oct} とせん断応力 τ_{oct} を用いて次式のようになる。

$$9\tau_{oct}^2 = (3a_o\ \sigma_{oct} + b_o)^2 \qquad (1.4.21)$$

こゝで σ_{oct}、τ_{oct} は（1.4.1 4）式に与えられているものと同じであり、また a_o および b_o は土の性質によって定まる正の常数で、土の三軸圧縮試験の結果、上下圧を σ_v、側圧を σ_l で示せば

$$\sigma_v = m\ \sigma_l + k \qquad (1.4.22)$$

なる式から求められる常数 m、k よりつぎのように求められる。

$$a_o = \sqrt{2\ m}\ /\ (m+3)$$

$$b_o = 3\sqrt{2}\,k\,/\,(m+3) \qquad (1.4.23)$$

地山内の応力状態において式（1.4.21）の右辺が左辺よりも大なるときには地山材料は弾性状態にとゞまり、逆のときは塑性状態を呈することになる。

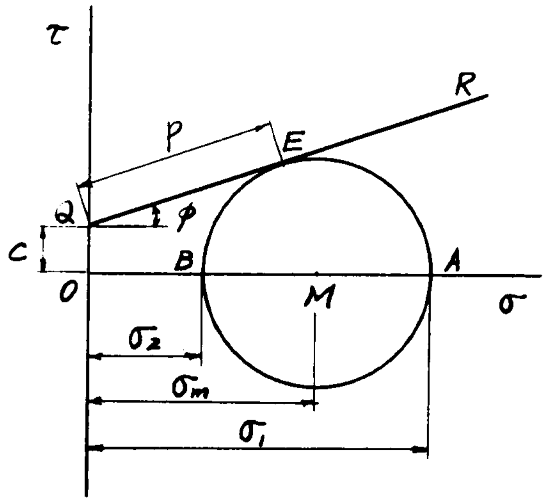

τ
R
p
E
Q
φ
C
B
A
O
M
σ
σ_2
σ_m
σ_1

図-1・4・1

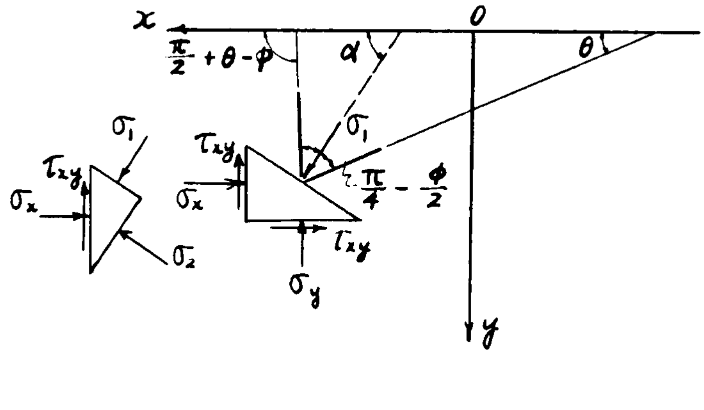

x
O
$\frac{\pi}{2}+\theta-\phi$
α
θ
σ_1
τ_{xy}
σ_x
σ_2
$\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}$
σ_y
y

図-1・4・2

才５章　粘弾性地山

岩石中に生ずる現象については以前よりそれらが時間に関係したものであることが指摘され、たとえばPhilips の研究[42]により岩石試験片における変形は荷重が作用した直後に生ずるものと、一定荷重下で除々におこるところの時間の関数としての変形との２段階におこることが明らかにされている。また実際現場で観測される地山の状態もつねに時間的要素を含むことが認められていた。たとえば粘土質の地山中に坑道を開さくした場合、坑道周辺が時間とともに土圧により坑道内部にはらみ出し、ある程度時間がたてば安定するが、この現象は塑性地山における坑道周辺の塑性流動とは異なり、坑道の開さくによつて惹起された坑道周辺の応力集中によつてひずみが掘削後たゞちに生ずるのではなく、時間とともに増大するものである。このような時間的要素を含む現象を認めながら、従来より坑道周辺応力および変形状態としては時間を考慮しない最終的な応力およびひずみ状態について研究がなされてきた。しかし近年rheologyの発展とともに坑道周辺地山中の応力およびひずみ現象に対してもrheologyの立場より新しい概念を導入することにより研究が進められてきている。

金属材料あるいは高分子材料などについてはひずみと時間との関係は、すでに深く研究されており、地山材料としての岩石に対しては古くはC、D、Griggsの研究[43]があり、石灰岩などについてひずみ一時間関係式をつぎのごとく与えている。

$$\varepsilon = a \log t \qquad (1.5.1)$$

こゝにεはひずみ、tは時間、aは材料による定数である。なお上式はD、W、philips が与えたものと同じ式であつて、ひずみ速度が次才に減少するところのいわゆる一次クリープに対するものを示している。また平松、西原[44]は二三の堆積岩（頁岩、砂質頁岩、砂岩等）についてクリープ試験を行い、図－1.5.1のようなひずみ一時間関係曲線を求め、これらの岩石に対して平均圧縮強度以下の応力下でのクリープは、最初ひずみ速度が次才に減少する１次クリープを起し、つづいてほゞ一定のひずみ速度を持つ２次クリープを生ずることを示している。またクリープによる岩石の破壊についても述べ、さらにこれらのクリープの特性を力学的模型としてBurgers模型をとることによりrheologyの立場から研究を行い、岩石のクリープ特性はBurgers模型をもつて大体説明できることを明らかにしている。これと同様な研究がK、H、Höfer[45]により行われている。彼はカリ鉱山において鉱柱の横方向への膨れを測定し、鉱柱の挙動がクリープやフロー現象に関係あることを示し、さらに実験室における研究やrheology的な研究によつてこのことを確めている。この研究によつても岩石のクリープは図－1.5.2に示すように過渡クリープ（１次クリープ）定常クリープ（２次クリープ）およびひずみ速度が漸次増加しついには破壊する破壊クリープ（３次クリープ）の３つの相を呈することが示され、それぞれの岩石に対して種々の応力状態に対するクリープ曲線および破壊状況、あるいはひずみ速度と応力との関係等につき実験結果を考察し、坑道や切羽の開削にあたつて盤圧を克服するだけで

なく、適当な処置を行つてクリープにより岩石の性質を変えられるということに留意すべきであることを指摘している。H. G. Denkhaus [46]は深い坑内での山はねの問題に対して岩石の特性について研究を行い、クリープや弾性余効が山はねの発生に及ぼす影響について言及している。またA. Saustowicz[47]は、開削された坑道周辺の岩盤の応力およびひずみ現象に対する従来の研究について、その取扱い方法から述べ、盤圧問題はrheologyの原理によつて裏ずけされねばならないことを指摘して、種々の状態の力学的模型を説明し、とくに岩石の力学的模型としてvisco－elastic（Kelvin body）あるいはvisco－plastic（Bingham body）mediumを仮定して盤圧問題について考察している。

つぎに軟弱な地山とくに粘土質の場合には明らかに地山は粘弾性体として取扱われ、rheologyの立場より変形挙動が説明されるだろう。粘土の特性に関する研究は近年かなり行われており、粘土の力学特性としてMaxwell型あるいはVoigt型の力学模型を用いて説明しているものや、篠田[48]のごとくバネとVoigt要素を直列に組合せた三要素模型を用いているものもある。また村山[49][50][51]らは粘土の粘弾性について深く研究を行い、粘土はある場合には単純なVoigt要素を有する粘弾性体のごとくふるまうが、一定せん断力によるクリープの実測において静的せん断力を与えて大きく変形させると純粋塑性的に流動を行うことを認めている。また粘弾性の個々の要素の性質を検討し、弾性は変位とともに減少してついに消滅するが、粘性および内部摩擦力は変位とともに増加して一定値に達することが認められている。さらにその後粘土の粘性に対して統計力学的に導いた構造粘性を導入することを試み、Eyringの粘性理論を拡張展開した構造粘性機構を仮定して、粘土のrheology的特性に対する新しい理論を誘導した。さらにこの理論を用いて変形機構、降伏機構、破壊機構および圧密現象などを解明し、力学模型の各要素の定数を荷重制御式三軸圧縮試験機によるクリープ試験より求めて、種々のrheology的特性を見出している。

通常用いられる粘弾性の型は弾性変形を表わすバネ部分と変形またはひずみ速度に比例した粘性抵抗を表わすダッシュポット（dashpot）部分との並列結合で与えられるとするVoigt型粘弾性、ひずみが弾性的部分とクリープ部分の和で与えられるところのバネとダッシュポットが直列結合したMaxwell型粘弾性が基本である。さらにこれらの基本型に外力がある降伏値に達すると滑りだすごときスライダー（slider）模型を組合せて粘塑性模型が作られたり、そのほかこれらの要素を3ケあるいは4ケ組合せて三要素模型あるいは四要素模型などの種々の粘性の型を作りうる。

Maxwell型およびVoigt型に対してはその流性式は[52]

$$\text{Maxwell 型} \quad ; \dot{e}_0 = \dot{p}_0/2G + p_0/2\eta \qquad (1.5.2)$$

$$\text{Voigt 型} \quad ; p_0 = 2Ge_0 + 2\eta\dot{e}_0 \qquad (1.5.3)$$

で表わされる。こゝにp_0は偏差応力、e_0は偏差ひずみ、Gはせん断弾性係数、ηは粘性係数であり、dotは時間tによる微分を表わす。このうちVoigt型の粘弾性体について考えてみる

と、（1.5.3）式においてp_0が一定の場合には$p_0 = const$とおいて（1.5.3）式を積分し、$t = o$に対して$e_0 = o$とおけばつぎのように偏差ひずみと時間との関係式をうる。

$$e_0 = \frac{p_0}{2G}\left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right) \tag{1.5.4}$$

この式は図－1.5.3に示すような曲線になり、一定応力のもとにひずみが時間とともに増大する現象、すなわちクリープを示している。なお（1.5.4）式で$t \to \infty$とすれば$e_0 \to p_0/_{2G}$となるが、これは弾性変形のみによるものであるしたがつてこの場合粘弾性体は本質的に弾性体と同様の方法で処理でき、たゞ途中で時間に関する operation を施すだけであるので、弾性解が知られてさえいれば、これを粘弾性の場合に適用することは容易である。小田は*Voigt*型粘弾性体の平面ひずみの問題[53]を取扱い、（1.5.3）式にひずみ－変位式；

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \tag{1.5.5}$$

を用い、その結果を応力の釣合方程式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = o \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = o \end{aligned}\right\} \tag{1.5.6}$$

に代入して、ある時間における変位成分による釣合式を算出し、それを弾性体の場合の式と比較することにより、変位－時間関係式としてつぎのような結果をえている。

$$u_r = (u_r)_{el}\left\{1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right\}, \quad u_\theta = (u_\theta)_{el}\left\{1 - e^{-\frac{G}{\eta}t}\right\} \tag{1.5.7}$$

たゞし$(u_r)_{el}$，$(u_\theta)_{el}$は弾性体に対して計算した値である。なおこの式はさきの（1.5.4）式と同じ形であり、上に述べたように弾性解が知られていれば粘弾性の場合の解も容易に求められるわけである。

つぎに村山らが示したところの前述の*Eyring*の粘性理論を拡張展開して統計力学的に求めた構造粘性機構を仮定する場合には、つぎのごとき結果が与えられてる。[54]この場合には力学模型は図－1.5.4に示すように1個のバネ（せん断弾性係数G_1）と、下限降伏点の偏差応力p_0に相当するスライダーを並列に加えた*Voigt*要素（せん断弾性係数G_2 粘性係数η）とを直列に組合せたものである。たゞし*Voigt*要素の粘性係数ηは単純な*dashpot*でなく、*Eyring*の粘性式で示される構造である。この場合の粘弾性体の変位－時間関係式はつぎのようになる。

$$u_r = (u_r)_{el}\ \psi(t) \qquad u_\theta = (u_\theta)_{el}\ \psi(t)$$

こゝに　$\psi(t) = a + b\log_{10} t$　(1.5.8)

であり、また

$$a = 1 + \frac{2.3}{B_2\ G_2\ (\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2})} \quad \log_{10} A_2\ B_2\ C_2 \qquad (1.5.9)$$

$$b = \frac{2.3}{B_2\ G_2\ (\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2})}$$

上式でA_2、B_2は *rheology* 的常数である。なお $\psi(t)$式のa, bおよびGの値は一定荷重下のクリープ試験によつて測定される。

さらにさきに述べたごとき *Burger* 型の力学模型をとるごとき岩石よりなる地山を考えれば、力学模型は図－1.5.5のように *Voigt*型と *Maxwell* 型とが直列結合した四要素模型で与えられる。それぞれバネのせん断弾性係数をG_1、G_3、*dashpot*粘性係数をη_2、η_4で表わすと、一定の応力σ_0の下におけるひずみと時間との関係はつぎのような式で与えられる。

$$\varepsilon = \sigma_0 \left\{\frac{1}{G_1} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{G_3}\left(1 - e^{-\frac{G_3}{\eta_4}t}\right)\right\} \qquad (1.5.10)$$

上式の第１項は時間に無関係の弾性ひずみであり、第２項は時間に比列する２次クリープを表わし、第３項は時間とともにひずみ速度が減少するところの１次クリープを表わして、これはさきの *Voigt* 模型を仮定した粘弾性体の場合に対する式（１－１４０）と全く同じものである。したがってこの場合には地山内の変形挙動は荷重とともにまず瞬間的に弾性的ひずみ σ_0/G_1 を生じ、それにつづいて *Voigt* 要素がクリープを起すが、同時に粘性要素η_2が働くために停止することがなく、長時間ののちには$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta_2}$なる線に漸近する。すなわちこの場合には永久流動がみられる。実際の物体のクリープ挙動はこの模型ではゞ完全に記述されるが、*Voigt* 型、*Maxwell* 型はその特別な場合と考えればよい。

以上述べたごとく粘弾性地山内に設けられた坑道等の変形挙動を考える場合には、地山材料の特性よりもつとも適した力学模型を仮定し、それらの各要素の定数の値を実験的に求めることにより、ひずみと時間の関係をうることができる。しかしてその後は弾性体に対する解を求めて、それに時間に関する *Operation* を施せばよいわけである。

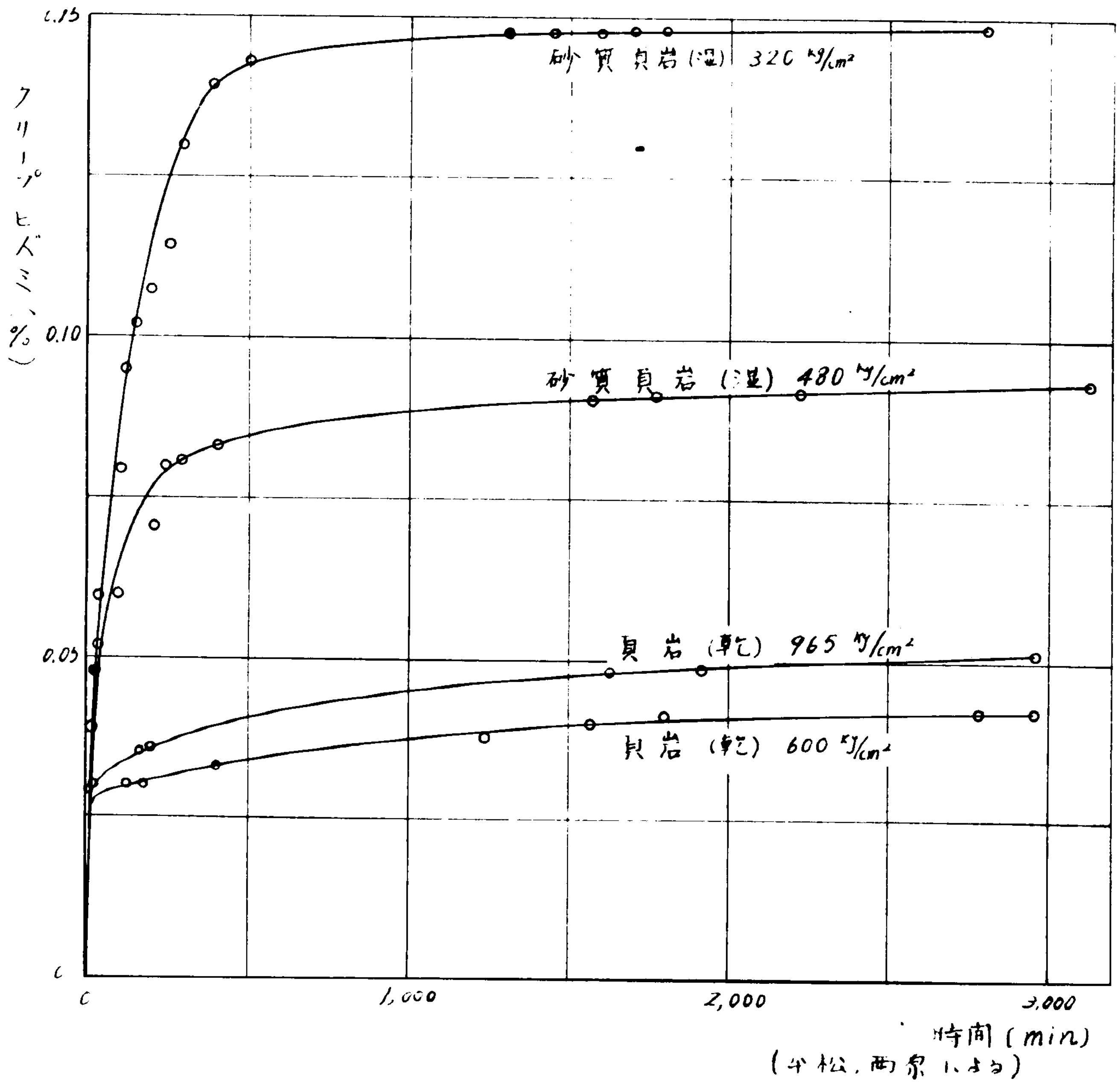

0.15
0.10
0.05
0
クリープヒズミ（%）
0
1,000
2,000
3,000
時間（min）
（小松、西泉による）
砂質頁岩（湿）320 kg/cm²
砂質頁岩（湿）480 kg/cm²
頁岩（乾）965 kg/cm²
頁岩（乾）600 kg/cm²

図-1・5・1

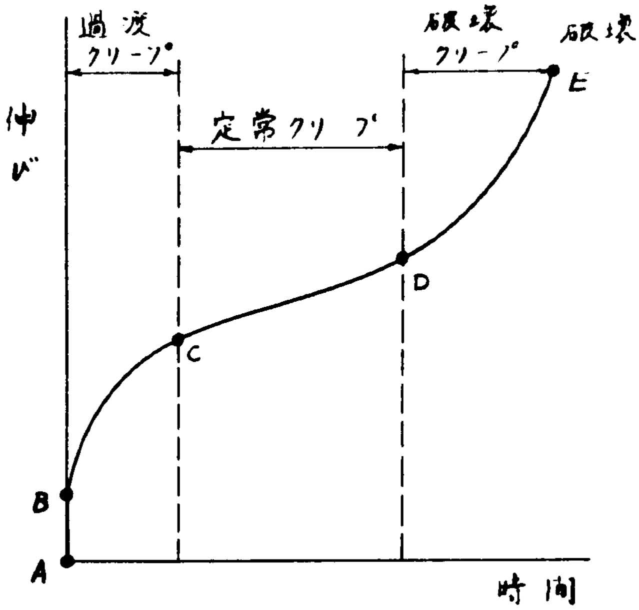


図-1・5・2

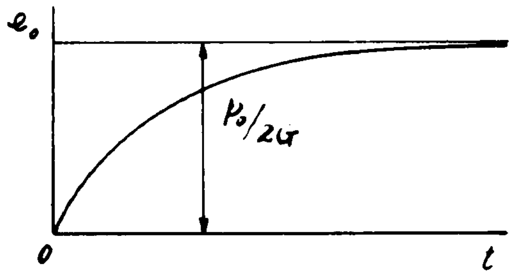
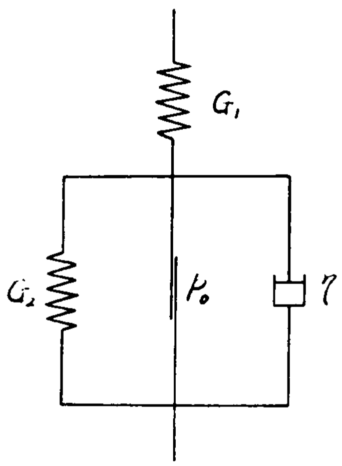


図-1・5・3



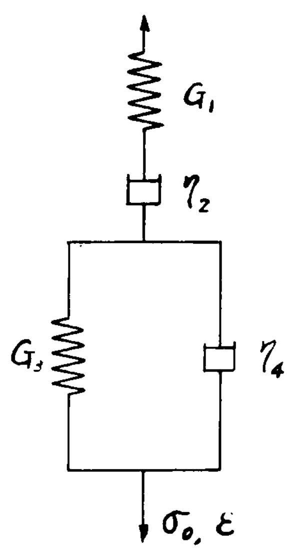


図-1・5・4　　図-1・5・5

第 2 篇　坑道周辺応力および変形に関する理論的考察

才 / 章　概　　説

ある地山中に開削された坑道の周辺応力および変形状態は、当然それが開削される地山の状態によつて異るだけでなく、地形上からも変つてくる。ここでは才1篇で示した種々の状態の地山中に水平坑道あるいは立坑が堀削された場合を考える。したがつて坑道の開さくされる地山状態に応じた基礎方程式を用い、与えられた境界条件を満足するように解を求めればよいわけであるが、地山の状態あるいは境界の形状等によつては厳密な解をうることが困難な場合が多い。また坑道応力や変形の工学的な意義からして近似解で充分な場合がしばしばある。

厳密には地表面および坑道周辺における境界条件を満足するごとく、重力場内における基礎方程式の解を求めるべきであろう。しかし水平坑道の場合には地表面が水平であり、かつ坑道が地表面からある程度深いところに開削される場合には、後述するごとく地表面の影響および開削された土塊の影響は無視されるだろう。また坑門附近では平面応力状態から平面ひずみ状態に移行する過渡的な領域を生ずるが、これもある程度地山の奥に入れば平面ひずみの状態として取扱うことができる。したがつて以下においては、坑道が地表面に近くある場合には地表面の条件を考慮した重力場内での平面ひずみ問題として取扱われ、坑道の地表面からの距離がその半径に比して大きいときには、坑道は地山の初期応力の作用する場内にあるものと考えて、いわゆる有孔無限板の問題として取扱われる。

坑道の断面形状としては種々のものがあるがこゝでは数学的取扱いが簡単なことおよび坑道応力や変形状態におよぼす種々の地山特性の影響を考察することが容易であることなどにより、主として円形および楕円形の坑道を取扱つた。そのほか特種な形状断面の場合についても少しふれたが、実際に円形や楕円形あるいはそれに近い断面形がかなり使用されており、そのほか特殊な断面形に対しては楕円形（円形を含む）に類似の断面を考えることにより、その応力や変形状態を推定することが可能であろう。この断面形状については篇をあらためて実験的な考察について述べることにする。

才 2 章　完全弾性地山における水平坑道周辺応力および変形状態

2．1　地表面の影響を考慮した場合の円形および楕円形坑道に対する解法

一般に坑道半径に比しその深さ（土被り）が小なる場合には坑道応力、変位は当然地表面の影響をうけるだろう。また坑道がかなり深いときでも山腹を通過する場合とか、あるいは坑道の入口などにおいては、さきにも述べたごとく地形上の影響を考慮した3次元的な取扱が必要になるだろう。この点に関してはH.Schmid[1)]がある係数を導入することにより、問題を簡単に平面問題として取扱つている。すなわち図2.2.1（a）（b）に示すように、坑道の軸方向を z 軸にとり、それに直角な平面で坑道中心に原点を有するx、y軸をとるものとする。図2.2.1（a）に示すように坑道の入口からある程度地山内に入つた点での地山の状態は、z 軸方向のひずみ ε_z が抑制されていると考えられるから、平面ひずみの状態にあるだろう。しかし表面（坑門）近くでは変形の自由度は増大し、表面においては応力 σ_z が零になり、平面応力状態にある。したがつてその中間では両者の過渡的な状態にあるわけであつて、この状態を表わすのに s なる一つの係数を導入することによつて、z方向のひずみの変化を考慮する。また同様に図2.2.1（b）のごとき場合にも s なる数を用いて、ひずみの変化を $s\varepsilon_x$ で表わすことにする。なおこれらの係数は地表面において1になることは明らかである。

このような係数を導入することにより問題を2次元的に処理する場合においても（1.2.1）式〜（1.2.4）式および（1.2.13）の弾性式はそのまま用いられる。したがつてこの場合の地山内の初期応力状態はつぎのように与えられる。応力－ひずみ関係式を用いれば、$\varepsilon_x = 0$ として、$s \neq 0$，1に対して

$$\sigma_x = \frac{\sigma_y}{s+m-1} \quad (\mathrm{m}：ポアッソン数) \tag{2.2.1}$$

である。　が特別な値をとる極端な場合には

$$\left.\begin{aligned} s = 0 \quad あるいは\ \varepsilon_z = 0 ： \quad \sigma_x = \frac{\sigma_y}{m-1} \\ s = 1 \quad あるいは\ \sigma_z = 0 ： \quad \sigma_y = \frac{\sigma_y}{m} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}$$

上式で σ_y は自重のみに関係した値であるから、z 方向のひずみの自由度は分母を変化させるだけである。同様にx方向のひずみの自由度を考慮すれば、結局深さhなる点における初期応力状態は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y^{\circ} &= -\gamma h \\ \sigma_x^{\circ} &= -\gamma h \frac{1-s^*}{s+m-1} \\ \sigma_z^{\circ} &= -\gamma h \frac{1-s}{m}\left(1+\frac{1-s^*}{s+m-1}\right)\end{aligned}\right\} \quad (2.2.3)$$

さらに坑道中心を原点とする極座標を用い、τ_zが小さいものとして省略すれば任意点(r, θ)の初期応力はつぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^{\circ} &= -\sigma_1 h+\left(\sigma_1+\frac{\sigma_2}{2}\right) r \sin\theta+\sigma_2 h \cos 2\theta-\frac{\sigma_2}{2} r \sin 3\theta \\ \sigma_\theta^{\circ} &= -\sigma_1 h+\left(\sigma_1-\frac{\sigma_1}{2}\right) r \sin\theta-\sigma_2 h \cos 2\theta+\frac{\sigma_2}{2} r \sin 3\theta \\ \sigma_{r\theta}^{\circ} &= \frac{\sigma_2}{2} r \cos\theta-\sigma_2 h \sin 2\theta-\frac{\sigma_2}{2} r \cos 3\theta\end{aligned}\right\} \quad (2.2.4)$$

ただし

$$\sigma_1=\frac{\gamma}{2}\left(1+\frac{1-s^*}{s+m-1}\right), \quad \sigma_2=\frac{\gamma}{2}\left(1-\frac{1-S^*}{S+m-1}\right) \quad (2.2.5)$$

(2.2.3)式あるいは(2.2.4)式で与えられる初期応力状態に対して、坑道を開削した場合の坑道応力および変位については、H．Schmidによつて有孔無限板の理論を用いて近似的に計算されているが、それについては2.2の近似解法で述べることにする。

いま図2.1.1において坑門よりかなり地山に入つた点における坑道断面を考え、その上の地表面が水平な場合を仮定する。このような場合には問題は平面ひずみ状態となるから、坑道掘削前の地山の初期応力状態は　$\sigma_y=-\gamma h$，$\sigma_y=-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma h$，$\tau_{xy}=0$　となり、坑道開削後の応力は、坑道周縁および地表面における境界条件を満足するごとく、適合条件式(1.2.13)(1.2．16)あるいは(1.2.23)等を解いて応力関数を求めることにより得られる。

坑道断面形状が円形の場合については円孔および地表面の境界は双極座標を用いて容易に表わしうるから、従来よりこの双極座標を適用した解法が多くの人々によつて求められており、たとえば水平地表面下の円形坑道に対する安蔵[2]，*Mindlin*[3]らの研究、傾斜面下にうがたれた円形断面ずい道に対する伊藤[4]の解等がある。

Mindlin　は初期応力状態として、平面ひずみ状態でポアッソン比が$\nu=0.5$，ν，0の場合を考慮して、$\sigma_y=-\gamma y$に対し$\sigma_x=-\gamma y$，$-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma y$，0の3種の状態について考え、安蔵氏の解法と同様なやり方で水平地表面下の円形坑道に対する応力関数を導いている。図1.2.3に示すような双極座標をとれば、$\sigma=0$で地表面が、$\sigma=\sigma_1$で坑道周辺が表わされ、坑道は地表面からの深さ$h=a \coth \alpha_1$の点(o、h)に中心を有する半径$r_1=a\ \mathrm{cosech}\ \alpha_1$なる円になる。ここでaは座標変換式(1.2.20a)式に含まれる定数である。このような座標系において*Mindlin*はまずさきに述べたごとき3種の地山の初期応力状態に対応する応力函数$F_{1,2,3}$を

算出し、つぎに自重によつて坑道周縁（$\alpha=\alpha_1$ において）に生ずる応力の合力を打消すのに必要な応力関係F_4 を求め，さらに才１補助関数として以上の応力関数によつて地表面すなわち自由境界$\alpha=0$ において生ずる応力を打消すための応力関数F_5 と、才２補助関数として$F_{1,2,3}$ F_4、F_5と質量ポテンシャル$\Omega=-\gamma y$により坑道周辺（$\alpha=\alpha_1$）に惹起される応力を打消すための応力関数F_6 を（1.2.2 3）式を満足するように見出し，（実際には（1.2.2 3）式の一般解（1.2.2 4）式を用いているためであるが），結局$F_{1,2,3}$,F_4,F_5,F_6 の和としてこの場合の完全な応力関係Fを求めている。このようにして求めた応力関係Fより算出される円形坑道周辺の応力式を書くとつぎのようになる。

$$
\left.
\begin{aligned}
(\sigma_\beta)_{\alpha=\alpha_1} = & \frac{\gamma a(\cosh\alpha_1-\cos\beta)}{2\sinh^2\alpha_1}\left\{\frac{2(1-\cosh\alpha_1\cos\beta)\sinh\alpha}{(\cosh\alpha_1-\cos\beta)^2}-4\cosh\alpha_1\right. \\
& \left.-\left(\frac{5-6\nu}{1-\nu}+2e^{-2\alpha_1}\right)\cos\beta-4\sinh\alpha_1\sum_{n=2}^{\infty}N_n\cos n\beta\right\} \\
& +\gamma G a(\cosh\alpha_1-\cos\beta)\{6\coth\alpha_1\operatorname{cosech}\alpha_1+6\operatorname{cosech}^2\alpha_1\cos\beta \\
& +4\sinh\alpha_1\sum_{n=2}^{\infty}S_n\cos n\beta\}
\end{aligned}
\right\}\quad(2.2.6)
$$

上式において

$$
\left.
\begin{aligned}
N_n &= \frac{ne^{-n\alpha_1}(\sinh n\alpha_1\cosh n\alpha_1-n\sinh\alpha_1\cosh\alpha_1)}{\sinh^2 n\alpha_1-n^2\sinh^2\alpha_1} \\
S_n &= \frac{n(n^2-1)\sinh n\alpha_1}{\sinh^2 n\alpha_1-n^2\sinh^2\alpha_1}
\end{aligned}
\right\}\quad(2.2.7)
$$

またGは地山の初期応力状態によつてつぎのような値をとる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_x=-\gamma y,\quad \sigma_y=-\gamma y\ (\nu=0.5): && ;G=0 \\
&\sigma_x=-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma y,\ \sigma_y=-\gamma y\ (\nu=\nu) && :G=\frac{1-2\nu}{6(1-\nu)} \\
&\sigma_x=0,\quad \sigma_y=-\gamma y\ (\nu=0) && :G=\frac{1}{6}
\end{aligned}
\right\}\quad(2.2.8)
$$

上に示したように *Mindlin* の与えている坑道応力式はかなり計算が面倒である。*Mindlin* が上式を用いて $\nu=0$，0.2 5，0.5の場合に対してh/r_1（h地表面よりの坑道中心深さ、：r_1：坑道半径）の種々の大きさ（h/r_1＝0〜4）の坑道に対して計算した坑道上盤応力の結果（図 1.2.2）より、坑道応力に及ぼす深度および地山のポアッソン比の影響についてつぎのような考察がなされる。

（i） 坑道に及ぼす地表面の応力攪乱の影響は$h/r_1>1.5$の深さのところではほとんど感じられない。

（ii） したがつて$h/r_1>1.5$の深さの位置にある坑道に対しては，その応力は深さとと

もに直線的に増加する。

(iii)　$h/r_1 < 1.2$に対しては坑道が地表面に近ずくに従つて坑道上盤の応力は急激に増大する。

(iv)　地山のポアツソン比の変化は坑道が地表面に非常に接近している場合を除いて坑道応力にあまり大きい影響を与えない。

安蔵の求めた応力式はかなり計算が面倒であるが，$\lambda = 1/(m-1) = 1/4$なる地山において$h/r_1 = 2, 4, 10$の場合に対して安蔵が行つた坑道周辺応力の計算結果を図示すれば図2，2，3(a)(b)(c)のようである。図においてσ'_βは坑道を開削したために生じた応力の変化であり，σ°_βは地山の初期荷重状態による応力であつて，開削後の坑道周辺応力σ_βは両者の和$\sigma_\beta = \sigma^\circ_\beta + \sigma'_\beta$で与えられる。さらに比較のために地表面の影響を無視したところの極座標を用いた従来の近似解法による$\sigma'_{\beta\,0}$値を点線で示している。σ'_βを安蔵の解によるものと極座標による近似解によるものとを比較すれば，h/r_1の小さいときすなわち坑道が浅いときには地表面の影響が入つてくるため，坑道上盤における値がかなり異なるが，側壁から下盤にかけてはあまり大きくは異ならない。そしてh/r_1が大きくなるほど，上盤における応力もかなりよく一致し，$h/r_1 > 10$になると地表面の条件を無視した近似解法でも十分正確な結果のえられることが判る。いま$h/r_1 = 10$のときの安蔵の解による側壁(A)と上盤(B)の応力σ_Aとσ_Bを，無限速で等分布荷重をうける円孔を有する無限板に対する解法による近似値と比較するとつぎのようになる。近似解法に用いる等分布荷重は，$h/r_1 = 10$であるから，鉛直方向に

$$p = -\gamma h = -10\gamma r_1$$

となり，水平方向には，

$$q = -\lambda\gamma h = -10\lambda\gamma r_1$$

である。したがつてp，qが同時に作用するときは，側壁(A)と上盤(B)における応力は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_A &= -3p + q = 10\gamma r_1(\lambda - 3) = -27.5\gamma r_1\\ \sigma_B &= p - 3q = 10\gamma r_1(1 - 3\lambda) = 2.5\gamma_1\end{aligned}\right\}$$

一方安蔵の結果は$\sigma_A = -27.8\gamma r_1$，$\sigma_B = 2.48\gamma r_1$を与えているから，この両者を比較すると，近似計算結果はかなりよく一致することが判る。

一定の傾斜をした地表面下に開削された坑道の応力に対しては，さきの水平地表面の場合の安蔵の解法と同様にして伊藤が応力式を導いている。そこでは重力による地山内の一点の初期応力は，地表面からその点にいたる垂直距離に比例し，かつ傾斜面に平行な方向の変位が自由であると仮定して求められている。その数値計算の結果，地表面が傾斜している場合には坑道の頂部および底部における引張応力はいちぢるしく増大すること、坑道の山側の側壁における圧縮応力が増大し，谷側下方の側壁の圧縮応力は減少すること，およびそれらの程度は土被りの小さいほどいちぢるしいことなどが明らかにされている。

以上は坑道の断面形状が円形の場合について述べたが，実際の坑道断面として楕円形に近いものや，また近似的に楕円形とみなして応力計算を行えるものも多い。地表面の影響を考慮に入れる場合，円形坑道に対してはさきにも述べた如く双極座標を導入することによつて比較的数学的取扱いが容易になるが，楕円形坑道の場合にはそれ以上に解法上の困難が大きい。したがつていままで地表面の影響を無視した、つまり坑道がかなり深いところにある場合の近似解が２，３示されているが，地表面の影響を考慮した解法は石田の研究[5]を見るに過ぎない。石田氏は図2.2.4に示すような楕円坑道に対して，オ１篇2.3で述べたごときMuschelishviliの複素関係を用い，まず初期応力に対応する２つの解析関数を求め，これらの関数は地表の境界条件を満足するが坑道境界の条件を満さないことより，坑道境界上の鉛直応力およびせん断応力を打消すような応力関数を附加し，さらに地表面においても条件を満足するように未定係数を決定した。解析関数中に含まれる未定係数が $\lambda=a/h$（a：坑道の水平半径，h：坑道深さ）のべキ級数に展開できると仮定して、摂動法により解いているので、坑道周辺の応力式はつぎのように λ の級数解で与えられる。

$$\frac{\sigma_\beta}{\gamma h}=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n+\mu B_n)\lambda^n \tag{2.2.9}$$

上式で A_n，B_n は $\varepsilon=(a-b)/a$ と θ の関係であり，$\mu=\nu/(1-\nu)$（ν は地山のポアッソン比）である。坑道が非常に深いところにある場合には λ の値は小さくなるが，極端に $\lambda=0$ の場合には上式は

$$\frac{\sigma_\beta}{\gamma h}=A_0+\mu B_0 \tag{2.2.10}$$

となり応力は ε と θ のみの関数となり，地表面の影響は入つてこない。石田は応力式を他の人の解と比較検討するとともに，$\nu=0.2$ で断面形状が $a/b=0.8$，1.0，1.4，2.0の４つの場合について $\lambda=0$，0.3，0.5に対し坑道応力分布を求め，つぎのような結果をえている。坑道が円形であるような特別な場合に対して，$\lambda\leqq0.5$ においては応力値は*Mindlin*が双極座標を用いて解いた結果と完全に一致する。（2.2.10）式に相当するような杉原の近似解[6]と比較すれば，λ がかなり小さい場合，すなわち坑道がかなり深い所に開削された場合は，両者はかなりよく一致するが，λ が大きいところ，すなわち浅い坑道では上下盤の引張応力値にかなり差異があり，石田の解で引張応力を生ずる場合においても，杉原の近似解では圧縮応力を与えることがある。しかし側壁に生ずる圧縮応力については，かなりよく一致し，比較的浅く堀削された坑道の場合にも近似解を用いてさしつかえない。また坑道断面形が応力分布に及ぼす影響についてつぎのごとく考察している。坑道が縦に細長くなるにつれて応力分布は平均化し，坑道の高さを一定とすれば，その巾が狭いほど応力値は減少する。したがつて円形断面より $a>b$ なる楕円形断面の方が強度的に有利である。最大圧縮応力を生ずる坑道周辺上の点は断面が縦に細長くなるか，または $\lambda=a/h$ が大きくなる（坑道が地表面に近ずく）に従つて下壁部の方に移行することが認められる。

2．2　地表面の影響を無視した円形および楕円形水平坑道に対する近似計算法

(1)　素堀円形坑道の場合

地表面の影響を無視した坑道応力の近似計算法としては，2．1に述べたものにおいて，坑道の深さが坑道半径に対して大きい場合の特別な場合として，安蔵，Mindlin や石田の応力式から求められるが，Mindlin は $h/r_1>15$ のところでは地表面の影響による応力攪乱はほとんどないことを指摘し，また安蔵は $h/r_1>10$ までは地表面の条件を無視した近似解法でも十分正確な結果を与えることを示している。したがつてある程度深いところに開削される坑道に対しては，つぎのごとく近似的な取扱が許される。坑道応力に対する近似解法としては2つの方法が考えられる。その一つは2．1の安蔵やMindlin と同様な手法であつて，ただこの場合は地表面における境界条件を無視しているために近似的であるというわけである。解はつぎのようにして求められる。まず地山の初期応力状態に対する応力関数を求め，それに坑道開削によつて除かれる土塊の力に対する応力関数（これは無視されることがある）および坑道周辺において垂直応力，せん断応力を打消し，無限遠において応力を与えないような応力関数を求めて加え合せ，完全な応力関数をうるものである。このような方法による解としては円形断面に対して山口[7]の研究があり，楕円形断面に対しては杉原の解[6]がある。

もう一つの方法はいわゆる有孔無限板の理論を用いるもので，坑道開削位置における地山の初期応力が坑道を有する無限地山（平面ひずみ状態）の無限遠点に作用するものとして，坑道周辺の応力を算出するか，坑道周辺からある程度はなれた坑道をとりまく位置において初期応力状態を与え，かつ坑道周辺上での条件を満足するごとき応力関数を求めるものである。円孔を有する無限板に対する応力式はたとえば，S.Timoshenko[8]によつても与えられており，また平面応力状態と平面ひずみ状態の中間的な状態に対する（2.2.3）式で与えられるような初期応力状態に対しては H.Schmidが応力式を求めている。

まず前者の方法による解法の1例を示せばつぎのようである。図2.2.5に示すごとく坑道の中心が深さhのところにあり，座標原点をその中心にとると、地山の任意の点Mにおける初期応力状態は極座標でつぎのように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\gamma(h-x)\left(\cos^2\theta+\frac{\nu}{1-\nu}\sin^2\theta\right)\\ \sigma_\theta &= -\gamma(h-x)\left(\frac{\nu}{1-\nu}\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\\ \tau_{r\theta} &= \gamma(h-x)\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\sin\theta\cos\theta\end{aligned}\right\}\qquad(2.2.10)$$

つぎに極座標による適合条件式は，この場合のごとく重力場内での問題を考えている場合においても，重力の作用しない場合と同様に（1.2.16）式が成立つから，（1.2.16）式の一般解としての応力関数（1.2.17）式より，無限遠点において応力を生じないような応力関係を選べばつぎのようである。

$$
\left.\begin{aligned}
F=&a_0\log r+a'_0\theta+\frac{a_1}{2}r\theta\sin\theta+b'_1 r\log r\cos\theta-\frac{c_1}{2}r\theta\cos\theta\\
&+d'_1 r\log r\sin\theta+a'_1 r^{-1}\cos\theta+c'_1 r^{-1}\sin\theta\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\{(a'_n r^{-n}+b'_n r^{-n+2})\cos n\theta+(c'_n r^{-n}+d_n r^{-n}+d'_n r^{-n+2})\sin n\theta\}
\end{aligned}\right\}\quad(2.2.11)
$$

（2.2.11）より多価の変位を与えるものを消すことを考慮して，応力成分を算出すれば，

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r=&a_0\frac{a^2}{r^2}+\frac{1}{2}\left(3+\frac{\nu}{1-\nu}\right)\frac{a}{r}(a_1\cos\theta+c_1\sin\theta)-\frac{2a^3}{r^3}(a'_1\cos\theta+c'_1\sin\theta)\\
&-\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n+1)a^{n+2}r^{-n-2}(a'_n\cos n\theta+c'_n\sin n\theta)\\
&\qquad+(n+2)(n-1)a^n r^{-n}(b'_n\cos n\theta+c'_n\sin n\theta)\}\\
\sigma_\theta=&-a_0\frac{a^2}{r^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\frac{a}{r}(a_1-\cos\theta+c_1\sin\theta)+\frac{2a^3}{r^3}(a'_1\cos\theta+c'_1\sin\theta)\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n+1)a^{n+2}r^{-n-2}(a'_n\cos\theta+c'_n\sin n\theta)\\
&\qquad+(n-2)(n-1)a^n r^{-n}(b'_n\cos n\theta+d'_n\sin n\theta)\\
\tau_{r\theta}=&-a'_0\frac{a^2}{r^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\frac{a}{r}(a_1\sin\theta-c_1\cos\theta)-\frac{2a^3}{r^3}(a'_1\sin\theta-c'_1\cos\theta)\\
&+\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n+1)a^{n+2}r^{-n-2}(-a'_n\sin n\theta+c'_n\cos n\theta)\\
&\qquad+n(n-1)a^n r^{-n}(-b'_n\sin n\theta+d'_n\cos n\theta
\end{aligned}\right\}\quad(2.2.12)
$$

（2.2.12）式の未定係数を坑道の周辺において初期応力による（2.2.10）式の応力成分 σ_r および $\tau_{r\theta}$ を打消すように定め，（2.2.10）式と（2.2.12）式を重ね合せれば，円形坑道の周辺地山内の応力成分はつぎのように求められる。

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r=&-\frac{W}{2}\left(1+\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right\}+\frac{V}{4}\left(3+\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{\nu}{a}-\frac{a}{r}\right)\cos\theta\\
&-\frac{W}{2}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{1-4\left(\frac{a}{r}\right)^2+3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right\}\cos2\theta+\frac{V}{4}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{\frac{r}{a}-5\left(\frac{a}{r}\right)^3\right.\\
&\left.+4\left(\frac{a}{r}\right)^5\right\}\cos3\theta\\
\sigma_\theta=&-\frac{W}{2}\left(1+\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right\}+\frac{V}{4}\left\{\left(1+3\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{r}{a}\right)-\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{a}{r}\right)\right\}\cos\theta\\
&+\frac{W}{2}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{1+3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right\}\cos2\theta-\frac{V}{4}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{\frac{r}{a}-\left(\frac{a}{r}\right)^3+4\left(\frac{a}{r}\right)^3\right\}\cos3\theta\\
\tau_{r\theta}=&-\frac{V}{4}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{\frac{r}{a}-\frac{a}{r}\right\}\sin\theta+\frac{W}{2}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{1+2\left(\frac{a}{r}\right)^2-3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right\}\sin2\theta\\
&-\frac{V}{4}\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)\left\{\frac{r}{a}+3\left(\frac{a}{r}\right)^3-4\left(\frac{a}{r}\right)^5\right\}\sin3\theta
\end{aligned}\right\}\quad(2.2.13)
$$

ただし
$$
\left.\begin{aligned}
W&=\gamma h\\
V&=\gamma a
\end{aligned}\right\}\quad(2.2.14)
$$

とくに坑道周辺における応力 (σ_θ) $r=a$ は

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = -W\{(1-2\cos 2\theta) - \frac{\nu}{1-\nu}(1+2\cos 2\theta)\} + V\{-\cos 3\theta + \frac{\nu}{1-\nu}(\cos\theta + \cos 3\theta)\} \qquad (2.2.15)$$

(2.2.12) 式および (2.2.15) 式において，坑道の位置が かなり深くなるとWに対してはVは省略することができる。しかるときは坑道応力は上下対称的になり，後述する近似解と同一の結果を与える。

近似解法の才2の方法を示すとつぎのようである。いまH.Schmidが示したような初期応力状態 (2.2.4) 式を仮定し，この応力成分がそれぞれ無限遠に作用しているような円形孔を有する無限板（図2.2.6）を考える。坑道中心を原点とする極座標系を考えれば，適合条件式 (1.2.16) の一般解として (1.2.17) が用いられる。(1.2.17) 式より無限遠点において図2.2.6のような初期応力状態に対応する項を取り出せばつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} F = {} & a_0 \log r + b_0 r^2 - \frac{c_1}{2} r\theta \cos\theta + (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \log r)\sin\theta \\ & + (a_2 r^2 + a_2' r^{-2} + b_2')\cos 2\theta + (c_3 r^3 + c_3' r^{-3} + d_3' r^{-1})\sin 3\theta \end{aligned}\right\} \quad (2.2.16)$$

無限遠点における境界条件，$r=\infty$: $\sigma_r = \sigma_r^0$ ， $\sigma_\theta = \sigma_\theta^0$ ， $\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0$ より (2.2.16) から導き出される応力成分 σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ と (2.2.4) 式で表わされる応力成分 σ_r^0 , σ_θ^0 ， $\tau_{r\theta}^0$, とを等置することにより，未定係数 b_0, a_2, c_3, d_1 はつぎのように定まり，

$$b_0 = -\frac{\sigma_1 h}{2}, \quad a_2 = -\frac{\sigma_2 h}{2}, \quad c_3 = \frac{\sigma_2}{12}, \quad d_1 = \frac{1}{6}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - 4\gamma\right) \qquad (2.2.18)$$

残りの未定係数は坑道周辺における境界条件

$$r=a: \quad \sigma_r = 0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = 0 \qquad (2.2.19)$$

より定められる。その結果求める応力成分は次式で与えられることになる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r = {} & -\sigma_1 h(1-\rho) + (1-\rho)\{\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2} - (k\gamma + \frac{\sigma_2}{2})\rho\} r \sin\theta \\ & + \sigma_2 h(1-\rho)(1-3\rho)\cos 2\theta - \frac{\sigma_2}{2}(1-\rho)(1+\rho-4\rho^2) r \sin 3\theta \\ \sigma_\theta = {} & -\sigma_1 h(1+\rho) + \{\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - k\gamma\rho - (k\gamma + \frac{\sigma_2}{2})\rho^2\} r \sin\theta \\ & - \sigma_2 h(1+3\rho^2)\cos 2\theta + \frac{\sigma_2}{2}(1-\rho^2+4\rho^3) r \sin 3\theta \\ \tau_{r\theta} = {} & (1-\rho)\{\frac{\sigma_2}{2} + (k\gamma + \frac{\sigma_2}{2})\rho\} r\cos\theta - \sigma_2 h(1-\rho)(1+3\rho)\sin 2\theta \\ & - \frac{\sigma_2}{2}(1-\rho)(1+\rho+4\rho^2) r \cos 3\theta \end{aligned}\right\}$$

たゞし

$$\rho = (a/r)^2$$

$$k=-\frac{(m+1)(m-2)+2s}{4\{(m+1)(m-1)+s\}} \quad , \quad (m：ポアッソン数) \qquad (2.2.21)$$

またσ_1およびσ_2は（2.2.5）式で与えられるものである。とくに坑道周辺の上下盤においては，

$$(\sigma_\theta)_{\substack{r=a\\ \theta=\pm\frac{\pi}{2}}}=\gamma h\{1\mp\frac{3(1-s^*)}{s+m-1}\}\pm\gamma a\{-1+\frac{2(1-s^*)}{s+m-1}+\frac{(m+1)(m-2)+2s}{2(m+1)(m-1)+2s}\} \quad (2.2.22)$$

上式において複号の＋は上盤応力を，－は下盤応力を与える。つぎに坑道側壁における応力は次式で与えられる。

$$(\sigma_\theta)_{\substack{r=a\\ \theta=o,\pi}}=-\gamma h(3-\frac{1-s^*}{s+m-1}) \qquad (2.2.23)$$

（2.2.22）式および（2.2.23）式より判るように，側壁においては坑道半径aに無関係であるが，下上盤では坑道半径aに相当するだけの自重γaに関係してくる。しかし$h \gg a$の場合には（2.2.22）式の右辺の才2項は省略されるから，上下盤とも等しい応力値を与えることになる。

いま図2.1.1において坑道中心線がかなり地山の深いところにある場合，坑門の近くにおける坑道応力の変化を2.2.22式および2.2.23式より求めてみる。その場合$s^*=0$になり，sは0～1に変化する。$s=0$，0.25，0.5，0.75，1.0 $m=2$，4，8，∞の場合について上下盤応力および側壁応力を計算し，図示すれば図2.2.7のようになる。ただし上下盤応力に対しては，（2.2.22）式の才2項は省略する。図より明らかなように，上下盤の応力は$m=2$のとき，すなわち地山内の初期応力状態が静水圧的な場合には，sの値によつてかなり変化する。地山の深いところにおけるよりも坑門近くで圧縮応力を減少する。しかし$m \geqq 4$になるとsの変化（坑門からの深さ）にほとんど無関係となり，また圧縮応力は引張応力に変つて，mの値が大きくなるほど引張応力を増す。そして$m=\infty$のとき，すなわち鉛直荷重γhのみで，水平荷重が作用しないような場合に対して引張応力は最大値1.0をとる。つぎに側壁部に生ずる圧縮応力は，上下盤における応力変化に比して，そのsの値に対する変化はきわめて小さく，またmの値に対しても大きい変化は示さないことが判る。

なおS.Timoshenko[8] が図2.2.6のような荷重状態に対して円孔を有する無限板について示している応力式は次式のようなものがある。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r&=\frac{\sigma_x^0+\sigma_y^0}{2}(1-\frac{a^2}{r^2})+\frac{\sigma_x^0-\sigma_y^0}{2}(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2})\cos 2\theta\\
\sigma_\theta&=\frac{\sigma_x^0+\sigma_y^0}{2}(1+\frac{a^2}{r^2})-\frac{\sigma_x^0-\sigma_y^0}{2}(1+\frac{3a^4}{r^4})\cos 2\theta\\
\tau_{r\theta}&=\frac{\sigma_x^0-\sigma_y^0}{2}(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{4a^2}{r^2})\sin 2\theta
\end{aligned}\right\} \quad (2.2.24)$$

上式において$\sigma_y^0 = -\gamma h$，$\sigma_x^0 = -\dfrac{\nu}{1-\nu}\gamma h$ とおけば，（2.2.2 0）式で $s^* = 0$，$s = 0$とおき、γa の項を省略した式と一致する。

(2) 素掘楕円形坑道の場合

平面ヒズミの状態で，重力の作用する完全弾性体内に水平な楕円孔をうがつたとき，その周囲に起るべき応力分布の問題は荒井[9]や杉原[6]によつて解かれている。ここでは（1）で述べたオ2の近似的な取扱い方をし，さらに初期応力状態として

$$\sigma_y^0 = -\gamma h = p,\ \sigma_x^0 = -\frac{\nu}{1-\nu}\gamma h = q,\quad \tau_{xy}^0 = 0 \qquad (2.2.2\,5)$$

をとつてMuschelishviliの複素変数の方法によつて坑道周辺応力を求めることにする。（2.2.2 5）式のような2軸的な荷重に対してpおよびqがそれぞれ単独に作用するものとして，それらの結果を重畳することにより（2.2.2 5）式に対する応力状態をうることができる。したがつていま図2.2.8に示すように楕円形の主軸がx，y軸と一致するようにとり，x軸よりαをなして無限遠で等分布荷重pが作用するものとする。しかるときは次式

$$Z = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta\right) \qquad (2.2.2\,6)$$

によつて，楕円孔の外部が単位円γの内部に写像される。（2.2.2 6）式において

$$R = \frac{a+b}{2},\ m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-k}{1+k},\quad k = \frac{b}{a} \qquad (2.2.2\,7)$$

である。そしてこの場合の応力関数（1.2.3 8）式中の2つの解析関数はつぎのように与えられる。[10]

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{pR}{4}\left[\frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - m)\zeta\right] \\ \psi(\zeta) &= -\frac{pR}{2}\left[\frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta} + \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}{m\zeta^2 - 1}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.2\,8)$$

楕円孔の周辺は自由境界であるから，孔の周辺における応力σ_θは，$\rho = 1$において$\sigma_\rho = 0$と置いて，（1.2.4 4）式の最初の式よりつぎのように与えられる。

$$\sigma_\theta = 4Re\left[\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right] \qquad (2.2.2\,9)$$

ここで$\sigma = e^{i\theta}$である。（2.2.2 6）式および（2.2.2 8）式を（2.2.2 9）式に用いれば，周辺応力はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= p \cdot Re\left[\frac{(2e^{2i\alpha} - m)\sigma^2 - 1}{m\sigma^2 - 1}\right] \\ &= p\frac{1 - m^2 + 2m\cos 2\alpha - 2\cos 2(\theta+\alpha)}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2} \end{aligned} \qquad (2.2.3\,0)$$

さらに（2.2.30）式中のmに（2.2.27）式の値を用いれば，

$$\sigma_\theta = p\frac{(1+k)^2\sin^2(\theta+\alpha) - \sin^2\alpha - k^2\cos^2\alpha}{\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta} \qquad (2.2.31)$$

楕円孔の形は半径aおよびbで決まるから，（2.2.31）式のkの値を変えることにより種々の形の楕円形孔に対する応力式をうる。

つぎに荷重pに直角な方向にqのみが作用する場合には，pの場合のαがα＋90°に変化するから，（2.2.31）式より応力はつぎのように与えられる。

$$\sigma_\theta = q\frac{(1+k)^2\cos^2(\theta+\alpha) - \cos^2\alpha - k^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta} \qquad (2.2.32)$$

したがつて初期応力状態（2.2.25）式に対しては，応力式はつぎのようになる。

$$\sigma_\theta = \frac{-\gamma h}{\sin^2\theta + k^2\cos^2\theta}\left[(1+k)^2\{\sin(\theta+\alpha) + \lambda\cos^2(\theta+\alpha)\}\right.$$

$$\left. - (\sin^2\alpha + \lambda\cos^2\alpha) - k^2(\cos^2\alpha + \lambda\sin^2\alpha)\right] \qquad (2.2.23)$$

ここで　$\lambda = \dfrac{\nu}{1-\nu}$

なお（2.2.31）式において荷重pが楕円の主軸（y軸）方向に作用する場合はα＝90°となり，その場合の最大応力はθ＝0°の位置（孔の側壁）にあつて，

$$\sigma_\theta = p\left(1 + 2\frac{b}{a}\right) \qquad (2.2.34)$$

であり，また最小応力はθ＝±90°（孔の頂，底部）にあつて

$$\sigma_\theta = -p \qquad (2.2.35)$$

である。（2.2.34）式および（2.2.35）式は弾性学の書籍[11]等に通常出ているものである

（2.2.33）式を用いてα＝0°，45°，90°に対して，地山のポアッソン比をν＝0.2としk＝2/3，1.0，3/2，なる楕円断面の坑道応力を計算すると表－2.2.1に示す結果をうる。

表－ 2.2.1

	k \ θ		0°	30°	60°	90°	120°	150°	190°
$\sigma_B/\gamma h$	$\alpha=0$	1/2	−0.25	−1.107	−1.634	−1.750	−1.634	−1.107	−0.250
		2/3	0	−0.892	−1.814	−0.083	−1.814	−0.892	0
		1/1	0.250	−0.500	−2.000	−2.750	−2.000	−0.500	0.250
		3/2	0.417	−0.121	−1.964	−3.750	−1.964	−0.121	−0.417
		2/1	0.500	0.096	−1.750	−4.750	−1.750	0.096	0.500
	$\alpha=45°$	1/2	−2.500	−3.048	−1.640	−0.625	0.130	0.241	−2.50
		2/3	−1.874	−2.925	−1.985	−0.833	0.080	0.118	−1.874
		1/1	−1.250	−2.509	−2.509	−1.250	0.049	0.049	−1.250
		3/2	−0.833	−1.985	−2.926	−1.874	0.118	0.080	−0.833
		2/1	−0.625	−1.640	−1.648	−2.500	0.241	0.130	−0.625
	$\alpha=90°$	1/2	−4.750	−1.750	0.096	0.500	0.096	−1.750	−4.750
		2/3	−3.750	−1.963	−0.121	0.417	−0.121	−1.963	−3.750
		1/1	−2.750	−2.000	−0.500	0.250	0.500	−2.000	−2.084
		3/2	−2.084	−1.816	−0.893	0	−0.893	−1.816	−2.084
		2/1	−1.750	−1.634	−1.107	−0.250	−1.107	−1.634	−1.750

（３）　巻立円形坑道の場合

重力の作用する完全弾性体内に水平な坑道がうがたれ，それに一定厚さの巻立が施された場合については谷本[12]の研究があり，また円環のはめられた無限板が一方向に一様な引張りをうける場合の応力問題は多くの人によつて取扱われている。そのうちG．N．Sawin は，無限板中の円孔が異つた弾性係数をもつ多重円環で補強されたような一般的な場合に対する孔周辺応力式を導いており，またその一つの例として一重の弾性円環をもつ板が一軸方向に荷重をうける場合に対しても計算を行つている。[13] 彼は円環が板との境界において完全に附着しているものとし，したがつて境界線上で円環の半径方向の応力，ヒズミおよび切線方向の応力，ヒズミが板のそれらにそれぞれ等しいという条件のもとで，複素変数を用いて解いている。

巻立てを施した円形坑道の応力状態は，覆工と地山（完全弾性体として）との接触面における状態によつて異なつてくる。ここではつぎのような３種の状態に対して，極座標を用いた解法を適用することにより応力式を算出する。いま地山の初期応力状態のうち一つの主応力のみが作用する場合を考える。図－２.２.９に示すように円形坑道の半径をａ，覆工の内側半径をｂとし，無限遠においてｘ軸方向にｐなる等分布荷重が作用するものとする。この場合地山および覆工の弾性係数，ポアッソン比をそれぞれＥ，νおよびＥ′，ν′とする。

まず地山領域（ｒ＝ａ）に対するAiryの応力関係数Ｆは，

$$F=a_0\log r+b_0r^2+(a_2r^2+a_2'r^{-2}+b_2')\cos 2\theta \qquad (2.2.36)$$

であつて，各成分応力は（１.２.１５）式を用いてつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=a_0r^{-2}+2b_0-(2a_2+6a_2'r^{-4}+4b_2'r^{-2})\cos 2\theta\\ \sigma_\theta&=-a_0r^{-2}+2b_0+(2a_2+6a_2'r^{-4})\cos 2\theta\\ \tau_{r\theta}&=-(-2a_2+6a_2'r^{-4}+2b_2'r^{-2})\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.37)$$

また各成分変位は，（２.２.３７）式を（１.２.１９）式に代入し，その値をさらに（１.２.１８）式に用いて積分すれば，つぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}u_r&=-(1+\nu)a_0\nu^{-1}+2(1-\nu)b_0r+\{-2(1+\nu)a_2r+2(1+\nu)a_2'\nu^{-3}\\&\quad+4b_2'r^{-1}\}\cos 2\theta/E\\ u_\theta&=\{2(1+\nu)a_2r+2(1+\nu)a_2'r^{-3}-2(1-\nu)b_2'r^{-1}\}\sin 2\theta/E\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.38)$$

また覆工の部分（ｂ≦ｒ≦ａ）に対する応力関数，成分応力，成分変位は同様にしてそれぞれつぎのように求まる。

$$\bar{F}=\bar{a}_0\log r+\bar{b}_0r^2+(\bar{a}_2r^2+\bar{b}_2r^4+\bar{a}_2'r^{-2}+\bar{b}_2')\cos 2\theta \qquad (2.2.39)$$

$$\bar{\sigma}_r=\bar{a}_0r^{-2}+2\bar{b}_0-(2\bar{a}_2+6\bar{a}_2'r^{-4}+4\bar{b}_2'r^{-2})\cos 2\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta &= -\bar{a}_0 r^{-2} + 2\bar{b}_0 + (2\bar{a}_2 + 12\bar{b}_2 + 6\bar{a}'_2 r^{-4}) \cos 2\theta \\ \bar{\tau}_{r\theta} &= (2\bar{a}_2 + 6\bar{b}_2 r^2 - 6\bar{a}'_2 r^{-4} - 2\bar{b}'_2 r^{-2}) \sin 2\theta\end{aligned}\right\} \quad (2.2.40)$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_r &= -(1+\bar{\nu})\bar{a}_0 r^{-1} + 2(1-\bar{\nu})\bar{b}_0 r \\ &\quad -\{2(1+\bar{\nu})\bar{a}_2 r + 4\bar{\nu}\bar{b}_2 r^3 - 2(1+\bar{\nu})\bar{a}'_1 r^{-3} - 4\bar{b}'_2 r^{-1}\}\cos\theta / \bar{E} \\ \bar{u}_\theta &= \{2(1+\bar{\nu})\bar{a}_2 r + 2(3+\bar{\nu})\bar{b}_2 r^3 + 2(1+\bar{\nu})\bar{a}'_2 r^{-3} - 2(1-\bar{\nu})\bar{b}'_2 r^{-1}\}\sin 2\theta / \bar{E}\end{aligned}\right\} \quad (2.2.41)$$

無限遠において x 軸方向に作用する等分布荷重は，つぎのように極座標で表わされる。

$$(\sigma_r)_{r=\infty} = p(1+\cos 2\theta)/2, \quad (\sigma_\theta)_{r=\infty} = p(1-\cos 2\theta)/2, \quad (\tau_{r\theta})_{r=\infty} = -p \sin 2\theta/2 \quad (2.2.42)$$

（2.2.36）式および（2.2.39）式中に含まれる未定係数は無限遠および巻立内側における境界条件と，覆工と地山との境界線における条件とから決定されるが，つぎのように地山と覆工との間の条件として，3つの場合について考察する。

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\quad r=\infty \text{ において } \sigma_r = p(1+\cos 2\theta)/2,\ \sigma_\theta = p(1-\cos 2\theta)/2 \\ &\qquad\qquad \tau_{r\theta} = -p\sin 2\theta/2 \\ &\quad r=a \text{ において，} \sigma_r = \bar{\sigma}_r,\ \tau_{r\theta} = \bar{\tau}_{r\theta},\ u_r = \bar{u}_r,\ u_\theta = \bar{u}_\theta \\ &\quad r=b \text{ において，} \bar{\sigma}_r = 0,\ \bar{\tau}_{r\theta} = 0\end{aligned}\right\} \quad (2.2.43)$$

この条件は覆工の裏込めが完全に行われていて，覆工が地山に完全に附着している場合に相当する。実際の坑道では地山の岩盤がよく，施工も充分に行われている場合にはこのような状態にあると考えてよい。

これらの境界条件より常数 a_0, b_0……, $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$……を決定すれば

$$\left.\begin{aligned}&a_0 = a^2\{(a^{-2} - b^{-2})\bar{a}_0 - p/2\}, \quad b_0 = p/4 \\ &a_2 = -p/4, \quad a'_2 = -a^4\{3p/2 + 2(a^{-4}b^4 - 4a^2b^{-2} + 3)\bar{a}_2 + 4(a^{-4}b^2 - a^2b^{-4})\bar{b}'_2\}/6 \\ &b'_2 = a^2\{p + 4(1 - a^2b^{-2})\bar{a}_2 + 2(a^{-2} - a^2b^{-4})\bar{b}'_2\}/2 \\ &\bar{b}_0 = -b^{-2}\bar{a}_0/2 \\ &\bar{a}_2 = (\beta'\gamma - \beta\gamma')/(\alpha\beta' - \alpha'\beta), \quad \bar{b}_2 = -b^{-2}(2\bar{a}_2 + b^{-2}\bar{b}'_2)/3 \\ &\bar{a}'_2 = -b^4(\bar{a}_2 + 2b^{-2}\bar{b}'_2)/3, \quad \bar{b}'_2 = (\alpha'\gamma - \alpha\gamma')/(\alpha'\beta - \alpha\beta')\end{aligned}\right\}$$

ただし

$\alpha=4\ (1-a^2 b^{-2})\ \{(3-\nu)/E+(1+\bar{\nu})/\bar{E}\}$

$\beta=2a^{-2}\{(3-\nu)\ (1-a^4 b^{-4})/E-(1+\bar{\nu})a^4 b^{-4}/\bar{E}-(3-\bar{\nu})/\bar{E}\}$

$\gamma=-4p/E$

$\alpha'=-2(1+\nu)\ (3-\nu)\ (a^{-4}b^4-4a^2 b^{-2}+3)/E+\{8(3+\nu\bar{\nu})a^2 b^{-2}$

$+2(1+\bar{\nu})\ (3-\nu)\ (a^{-4}b^4-6(1+\nu)\ (1+\bar{\nu})\}/\bar{E}$ (2.2.4 5)

$\beta'=-4(1+\nu)\ (3-\nu)\ (a^{-4}b^2-a^2 b^{-4})/E+\{4(3+\nu\bar{\nu})a^2 b^{-4}+4(1+\bar{\nu})\ (3-\nu)a^{-4}b^2$

$+12(\nu-\bar{\nu})a^{-2}\}/\bar{E}$

$\gamma'=6\ (1+\nu)\ p/E$

(ii) $r=\infty$において，

$\sigma_r=p(1+\cos 2\theta)/2$， $\sigma_\theta=p(1-\cos 2\theta)/2$， $\tau_{r\theta}=-p\sin 2\theta/2$

$r=a$において

$\sigma_r=\bar{\sigma}_r$ ， $\tau_{r\theta}=\bar{\tau}_{r\theta}=0$， $u_r=\bar{u}_r$

$r=b$において

$\bar{\sigma}_r=0$， $\bar{\tau}_{r\theta}=0$

この条件は覆工の裏込めが充分でなかつたり，そのほかの条件で覆工と地山との附着が充分でない場合に考えられるものである。実際には境界線上で少しでも摩擦が働くから$\tau_{r\theta}=\bar{\tau}_{r\theta}=0$ということはありえないが，数学的な取扱いの上から上のごとき極端な場合を考えることにする。これらの境界条件より前と同様に常数を算出すれば，つぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&a_0=a^2\{(a^{-2}-b^{-2})\bar{a}_0-p/2\},\quad b_0=p/4\\
&a_2=-p/4\ ,\quad a_2'=-a^4\{3p/2+2(1-a^{-4}b^4)\bar{a}_2+4(a^{-2}-a^{-4}b^2)\bar{b}_2'\}/6\\
&b_2'=a^2\{p+2(1-a^{-4}b^4)\bar{a}_2+4(a^{-2}-a^{-4}b^2)\bar{b}_2'\}/2\\
&\bar{a}_0=-ap/E/\{\frac{(1-\bar{\nu})}{\bar{E}}ab^{-2}+\frac{(1+\bar{\nu})}{\bar{E}}a^{-1}-\frac{(1+\nu)}{E}(a^{-1}-ab^{-2})\}\\
&\bar{b}_0=-b^{-2}\bar{a}_0/2\\
&\bar{a}_2=\beta'\gamma/(\alpha\beta'-\alpha'\beta),\quad \bar{b}_2=-b^{-2}(2\bar{a}_2+b^{-2}\bar{b}_2')/3\\
&\bar{a}_2'=-{}^4(\bar{a}_2+2b^{-2}\bar{b}_2')/3,\quad \bar{b}_2'=\alpha'\gamma/(\alpha'\beta-\alpha\beta')
\end{aligned}\right\}\quad (2.2.4\ 7)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha=-(5-\nu)(a^{-4}b^{4}-1)/E+(1+\bar{\nu})(a^{-4}b^{4}+3)/\bar{E}-4\bar{\nu}a^{2}b^{-2}/\bar{E}\\
&\beta=2a^{-2}\{-(5-\nu)(a^{-2}b^{2}-1)/E-(\bar{\nu}a^{4}b^{-4}+3)/\bar{E}+(1+\bar{\nu})a^{-2}b^{2}/\bar{E}\\
&\gamma=-3p/E\\
&\alpha'=(a^{-4}b^{4}-2a^{2}b^{-2}+1),\quad \beta'=-(a^{2}b^{-4}+a^{-2}-2a^{-4}b^{2})
\end{aligned}\right\}\qquad(2.2.48)$$

(iii) 地山と覆工の弾性性質が等しく，かつ両者が完全に附着している場合で，無限弾性体中に半径 b なる円孔が存在するとみなすことができる場合には(i)なる境界条件の場合において $E=\bar{E}$， $\nu=\bar{\nu}$ とおけば応力式がえられるが，結局 2.2(1)のところで述べたように応力式が導かれ，応力関係および各成分応力はつぎのようになる。

$$F=pr^{2}(1-\cos 2\theta)/4-b^{2}{}_{\frac{1}{2}}\log r/2-(b^{4}p/4r^{2}-b^{2}p/2)\cos 2\theta \qquad (2.2.49)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r=p\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)/2+p\left(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta/2\\
&\sigma_\theta=p\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)/2-p\left(1+\frac{3b^4}{r^4}\right)\cos 2\theta/2\\
&\tau_{r\theta}=-p\left(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta/2
\end{aligned}\right\}\qquad(2.2.50)$$

上式は覆工の部分および地山の両方に適用され，両者の境界線上の応力は r = a とおいて上式より与えられる。

上で仮定した条件においては覆工と岩盤との附着強度やせん断応力が問題となるのであつて，実際現場における覆工と岩盤との間の変位の自由度を考慮した理論式を求めることは困難であるが，その場合の応力は条件(i)と条件(ii)の極端な2つの場合の応力値の中間の値をとることは明らかである。地山と覆工の弾性性質の相違による応力状態の変化をみるために，覆工コンクリートの弾性係数 $\bar{E}=2.0\times10^{5}$ Kg/cm²，ポアッソン比 $\bar{\nu}=1/4$ とし，地山のそれらを $E=4\times10^{4}$，1.0×10^{5}，2.0×10^{5}，4.0×10^{5} 1.0×10^{6} Kg/cm²，$\nu=1/4$ として，円形坑道の半径 a = 4.0 m，覆工内壁の半径 b = 3.0 m について地山と覆工との境界面における応力分布を計算すればつぎのような結果をうる。

まず条件(i)の場合の地山の円孔壁に沿う応力分布を図示すれば，図2.2.10のようになる。図には覆工の内外半径比 a/b = 4/3，4/3.6 の場合に対して，種々の弾性係数比 $E/\bar{E}$ のときの各成分応力の分布が示されている。この図より地山と覆工との弾性係数の相違による応力分布の変化が明かにされる。地山が覆工に及ぼす地圧に相当するところの σ_r は覆工厚さが大きいほど外壁に沿つて均一化してくるが，一般に初期荷重の方向におけるよりも，垂直方向の位置において大きい値を示す。しかし地山の弾性係数が大きくなると σ_r はかなり小さくなる。なお覆工厚さが薄くなると荷重方向の位置（$\theta=0°\sim15°$）で引張応力となり，覆工と地山との間に間隙を生ずる傾向がある。σ_θ の分布は a/b = 4/3 の場合には $E/\bar{E}>1.0$ で坑道頂部で引張応

力となり，また$a/b=4/3.6$では$E/\bar{E}>0.2$で引張応力となつて，覆工厚が小いほど頂部のσ_θ の引張応力値が大きく，さらに$E/\bar{E}$が大きくなるほどその引張応力を生ずる範囲が拡がる。逆に$\theta=90°$ 附近に生ずる圧縮応力σ_θ は，覆工厚さが小さいほど，また地山の弾性係数が大きいほど増大する。つぎに$\tau_{r\theta}$はいずれの場合も$\theta=45°$ の位置に最大値をとり，その位置に対して対称に分布する。その値は$E/\bar{E}$が小さいほど，また覆工厚さが薄いほど大きくなる。全体的にみて地山の弾性係数が小さい場合ほど覆工外壁に作用する地圧とせん断応力が増大することが判る。

さらに地山の円孔壁に沿う各位置における各成分応力が，覆工厚の大きさによつていかに変るかを知るために，$E/\bar{E}=0.5$および$E/\bar{E}=5.0$の場合に対して図示すれば図2.2.11のようである。ここで計算を行つた範囲内での覆工厚の変化に対しては，$\theta=60°\sim90°$ におけるσ_θの値，および$\theta=0°\sim15°$ 附近のσ_r の値，$\theta=45°$ 附近の$\tau_{r\theta}$ の値以外はほとんど変化しないことが判る。

つぎに条件(ii)の場合の円孔壁に沿う応力分布を示すと，図2.2.12，図2.2.13のようである。図2.2.12には円孔壁に沿う各成分応力の分布を$a/b=4/3$および$a/b=3.6$の場合に対して，$E/\bar{E}$をパラメーターとして書かれている。図2.2.13は円孔壁の各位置における応力値と覆工厚（$\frac{a-b}{a}$）との関係を示している。図2.2.12より判るように，覆工と地山とが附着していない場合には覆工外壁に作用する地圧σ_r は荷重方向（$\theta=0°$）でいくぶん大きいが，$E/\bar{E}>0.5$になると覆工外壁全体にわたつてほゞ一様になり，またその値もかなり小さくなる。この傾向は条件(i)の場合（図2.2.10参照）と異ることが判る。またσ_θ の分布は地山の弾性係数が覆工のそれよりも大きい場合には，Eの変化にはほとんど影響されないが，$E/\bar{E}$が小さくなるほど頂部の引張応力を増大し，側壁部の圧縮応力を減少する。このことは条件(i)の場合と大いに異なるところであり，覆工が地山に充分に附着していない場合には頂部の引張応力がかなり大きくなつて危険である。

なお覆工内の各位置における断面に沿う応力分布および覆工内壁に生ずる応力分布については，才4篇で述べることにする。

(4) 巻立楕円形坑道の場合

平面ヒズミ状態に対するMuschelishviliの複素数による方法を重力体の応力問題に適用したところの巻立楕円坑道の周辺応力の解としてYi-Yuan Yu[14)]および小田[15)]の研究がある。いずれも重力の作用する弾性地山を考え，その地表面が水平であるとし，かつ坑道がかなり深いところにあつて，地表面の影響を無視しうるものと仮定している。そしてYi-Yuan Yuは地山と覆工とはその境界において完全に結合しており，さらに覆工を固定環（弾性係数が∞）と仮定して，その変位を0として解いている。したがつてこのような場合は実際問題として不合理であり，また覆工厚さを決定することはできないが，地山に比して覆工の弾性係数がかなり大きい場合には，覆工にかかる地圧を推定するための近似計算として用いられるであろう。小田氏は覆工内壁においてそれに直角方向の直応力とせん断応力が0になり，地山と覆工との境界にお

いて両者のせん断応力およびその境界周と直角方向の直応力が等しく，かつ変位が等しいと言う境界条件を用いて問題を解いている。

坑道がかなり深いところに開削される場合にはこの章の最初でも述べたように，地山の初期応力が無限遠において一様に作用する場合の有孔板として非重力場において問題を近似的に取扱うことができる。弾性曲線環を有する無限板が一軸方向に等分布圧縮荷重をうける場合については，*Musschelishvili*の方法を用いてM.P.*Scheremetjew*によつて解かれている。一般に弾性環で補強された曲線孔（das krummlineger Loch）の周辺における応力状態をうるにはかなり面倒な計算を行わねばならないが，さきにも述べたごとく，2つの極端な場合，すなわち(i)完全に可撓性の弾性環（孔は環によつてなんら補強されていない場合に相当する。）(ii) 固定環（環は変位を生じない）の場合の応力状態が知れれば，弾性環の場合はそれらの中間の応力状態を有することは明らかである。(i)の場合に対しては前項で応力式が与えられている。(ii)の場合に対して，G.N.Sawin は環と板との周辺が次式によつて与えられるものを考えて，

$$Z=\omega(\zeta)=R\left(\frac{1}{\zeta}+m\zeta^{n}\right) \qquad (2.2.5\,1)$$

一般に等分布荷重がx軸より角δだけ傾いて作用する場合に対して計算している[16)]。(2.2.5 1)式でn＝1とおけば（2.2.2 6）式と同じく楕円形の外部を単位円γの内部に写像する関数となり，固定楕円環に対する2つの解析関数，$\varphi(\zeta)$および$\psi(\zeta)$はN.Muschelishviliによつてつぎのように与えられている。[17)]

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(\zeta) &= \frac{pR}{4}\cdot\frac{1}{\zeta}+\frac{pR}{4\kappa}(m-2e^{2i\delta})\zeta+i\frac{2\varepsilon\mu Rm}{\kappa}\zeta \\
\psi(\zeta) &= -\frac{pRe^{-2i\delta}}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}+\left[2\mu\varepsilon Ri+\frac{pR\kappa}{4}-\frac{pR}{4}\cdot\frac{1+m^2}{1-m\zeta^2}\right]\zeta \\
&\quad -\left[2\mu\varepsilon Rmi+\frac{pRm}{4}-\frac{pRe^{2i\delta}}{2}\right]\frac{(\zeta^2+m)\zeta}{\kappa(m\zeta^2-1)}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.5\,2.)$$

上式で$\mu=E/2(1+\nu)$，$\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$で板の弾性性質を表わす常数であり，R，mは楕円孔の形を定める（2.2.5 1）式中の係数で，（2.2.2 7）式の関係をもつている。またεは固定環の回転角であつて次式より与えられる。

$$\varepsilon=\frac{pm(1+\kappa)\sin 2\delta}{4\mu(m^2+\kappa)} \qquad (2.2.5\,3)$$

上式より判るように$\delta=0$，あるいは$\pi/2$の場合，すなわち荷重が楕円の主半径方向（x，y軸方向）から作用するときは$\varepsilon=0$となる。

（2.2.5 2）式を（1.2.4 4）式に代入すれば各成分応力が求められる。G.N.Sawin は上式およびM.P.*Scheremetjew*の解を用いて，楕円環と板との接合周辺に沿う応力分布σ_ρ/p，σ_θ/p，$\tau_{r\theta}/p$を3つの場合について計算している。3つの場合とは，(i) 完全に可撓性の環の場合，(ii)弾性環の場合，(iii)固定環の場合である。計算に用いられた弾性環の形および大きさは，図2.2.1 4に示すようなもので，環内縁の半径比は3：1であつて，（2.2.5 1）式において

$n=1$，$R=0.97119$，$m=0.23560$，で与えられる。また楕円環は鋼でその弾性性質は $\mu=8.1\times10^5$ Kg/cm²，$\kappa=2.08$ であり，板は銅で $\mu=4.42\times10^5$ Kg/cm²，$\kappa=2.08$ である。計算結果を図示すれば，図2.2.15および図2.2.16のようであり，前者はx軸方向に，後者はy軸方向にそれぞれ荷重された場合のものである。図より判るように境界周方向の応力 σ_θ は環の弾性性質によつてかなり変化し，とくに $\mu' \doteqdot 0$ のときには荷重方向の位置に引張応力を生じ，また圧縮応力も固定環のときよりもきわめていちぢるしく増大する。また境界周に沿う応力 σ_θ の分布は μ' が大きくなければ平均化してくることが判る。極端に $\mu'=\infty$（固定環）の場合は，荷重方向に直角な位置附近における σ_θ はほとんど零に等しくなる。つぎに境界周に直角方向の応力 σ_ρ は，$\mu'=0$ の場合は当然 $\sigma_\rho=0$ であつて，環の弾性係数が大きくなる程荷重方向の位置における σ_ρ（環の反力と考えられる）が大きく，また荷重方向に直角な位置においてはは σ_ρ が小さくなる。せん断応力 $\tau_{\rho\theta}$ は $\mu'=0$ の場合は $\tau_{\rho\theta}=0$ であるが，これも μ' が大きくなるにしたがつて，境界周に沿つて一様に応力値を増大する。

上に示した数値計算例は銅板中に鋼製の楕円環がはまつている場合であり，また環自身もかなり厚みが大きくて，直接弾性地山内の巻立楕円形坑道と比較はできないが，覆工の地山に対する硬さの程度が，その接触部の応力分布にいかなる影響を及ぼすかについての定性的な傾向は明らかにされたと思う。実際の巻立楕円坑道に対しても上述の近似計算は適用されうる。

2．3　多角形断面坑道に対する近似計算法

円形ないしは楕円形断面以外の断面形を有する坑道周辺応力を算出することは，適当な座標形を採用すれば有孔板の応力解析法を近似的に適用することができる。岡本は直交直線座標 $z=x+iy$ と曲線座標 $\zeta=\alpha+i\beta$ との間に，

$$z=a\left(e^{\zeta}+be^{-\zeta}+ce^{-n\zeta}\right) \tag{2.2.54}$$

ただし，a，b，c：常係数，n：正整数なる関係を用いて，$\alpha=0$ なぬ曲線で孔の周囲を表わしている。[18] その場合孔の周囲はつぎのような座標で支えられる。

$$\left.\begin{aligned} x&=a\{(1+b)\cos\beta+c\cos n\beta\} \\ y&=a\{(1-b)\sin\beta+c\sin n\beta\} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.55}$$

これは一般に（n＋1）多角形に類似した閉曲線を示す。岡本は上に与えた曲線座標に対する応力関数を用い，重力場内で坑道周縁の境界条件を満足するごとく，関数中の係数を定めて，結局坑道の周縁上の応力をつぎのように表わしている。

$$(\sigma_\beta)_{\alpha=0}=\gamma h\{A+kB+a/h(A'+kB')\} \tag{2.2.56}$$

上式でkは地山の水平方向初期応力を表わす側圧係数であつて，$k=\nu/(1-\nu)$ で与えられ，A，B，A，B′，B′の定数は種々の断面形状，荷重状態および坑道周辺上の位置に対して

計算している。なお坑道の深さが孔径に比して充分深い場合には（2.2.5 6）式で近似的に才2項を無視することができる。

岡本と同じ方法を用いた解析を行つているものにD.M.Wrinch の研究がある。彼は孔の形として正多角形孔を対象にし，孔形を表わす曲線座標として，つぎのようなHypotrochoidal Coordinate [19] を用いている。

$$Z=C\,(me^{\zeta}+re^{-m\zeta}),\ Z=x+iy,\ \zeta=\alpha+i\beta \qquad (2.2.5\,7)$$

ここでCは任意常数，rは隅角の丸味を支配する常数で $0\leqq r\leqq 1$ にとられ，mは正の整数である。上式は（2.2.5 4）式の特別な場合であつて，曲線 $\alpha=$ 常数は原点に対して同じ角を張る正(m+1.)角形となる。またm＝1のときは楕円形，r＝0のときは円形を表わす。（2.2.5 7）式で表わされる孔が，無限遠においてx軸方向あるいはy軸方向に等分布荷重pをうける場合の孔の周辺応力 σ_β はつぎのように与えられる。

$$\sigma_\beta=p\left[(1-r^2)\mp\frac{2m}{K}\{r^2(2-m)+m\}\cos 2\beta\pm\frac{4}{K}rm\cos(m-1)\beta\right]\Big/$$

$$\{1+r^2-2r\cos(m+1)\beta\}$$

ただし，$K=r^2(2-m)+m^2$

上の一般式はm＝1.2の場合を除いて成立し，複号の上符号はx軸，下符号はy軸方向に荷重pが作用する場合である。

つぎに*Muschelishvili*...の複素変数を用いる解法について考えてみる。いま図2.2.1 7のように無限板（平面ひずみ状態）に一つの孔があり，その内部に座標原点をとるとき，成分応力が孔（L）の外部の全領域Sにわたつて有限値をとることを考慮すれば，（1.2.4 2）式中の2つの解析関数 $\varphi_1(z)$，$\psi_1(z)$ はつぎのような形をとる。

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)&=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\ln z+(B+iC)\,z+\varphi_1^\circ(z)\\ \psi_1(z)&=\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\ln z+(B_1+iC_1)\,z+\psi_1^\circ(z)\end{aligned}\right\}\quad(2.2.5\,9)$$

ここにXおよびYは孔の周辺に作用する外荷重のベクトル成分であり，B，C，B_1，C_1 は無限遠における応力状態より定められる常数で，$\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ である。また $\varphi_1^\circ(z)$ および $\psi_1^\circ(z)$ は次式によつて表わされる関数を示す。

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1^\circ(z)&=a_0'+\frac{a_1'}{z}+\frac{a_2'}{z}\quad+\cdots\cdots\cdots\\ \psi_1^\circ(z)&=b_0'+\frac{b_1'}{z}\quad\frac{b_1'}{z^2}+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(2.2.6\,0)$$

孔の周辺に荷重が作用していない場合はX＝Y＝0でありまた無限遠点における応力成分を

$\sigma_x^{(\infty)} = \sigma_{xo}$, $\sigma_y^{(\infty)} = \sigma_{yo}$, および $\tau_{xy}^{(\infty)} = \tau_{xyo}$ で表わす場合，B，B_1，C_1 等はつぎのように与えられる。

$$B = \frac{\sigma_{xo} + \sigma_{yo}}{4}, \quad B_1 = -\frac{\sigma_{xo} - \sigma_{yo}}{2} \cos 2\delta, \quad C_1 = \frac{\sigma_{xo} - \sigma_{yo}}{2} \sin 2\delta \quad (2.2.6\,1)$$

ただし δ は無限遠における主応力の方向が x 軸となす角である。なお C は応力分布に影響を及ぼさないので通常 C＝0 とおかれる。

いま一般に図－2.2.1 7の孔（L）の外部の領域 S が，$z=\omega(\zeta)$ なる写像関数で単位円 γ の内部に写像されるものとすると，L における境界条件は（1.2.4 3）式で支えられる。孔が開削された後の板の新しい応力状態 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ はつぎのように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{\circ} + \sigma_x^{*} \\ \sigma_y &= \sigma_y^{\circ} + \sigma_y^{*} \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{\circ} + \tau_{xy}^{*} \end{aligned}\right\} \quad (2.2.6\,2)$$

上式で $\sigma_x^{*}, \sigma_y^{*}, \tau_{xy}^{*}$ は孔をあけたことによつて生ずる附加的な応力成分であり，$\sigma_x^{o}, \sigma_y^{o}, \tau_{xy}^{o}$ は初期応力である。（1.2.3 8）式に相当した2つの複素変数 z の関数 $\varphi^{o}(z)$，$\psi^{o}(z)$，および $\varphi^{*}(z)$，$\psi^{*}(z)$ は N.I.Muschelishvili[20] によつて求められている。したがつて（2.2.6 2）式の応力状態に対しては，関数 $\varphi_1(z)$ および $\psi_1(z)$ はつぎの形をとる。

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \varphi^{o}(z) + \varphi^{*}(z) \\ \psi_1(z) &= \psi^{o}(z) + \psi^{*}(z) \end{aligned}\right\} \quad (2.2.6\,3)$$

それで問題は上式の関係 $\varphi^{*}(z)$，$\psi^{*}(z)$ を決定することに帰着する。

（2.2.6 3）式を $z=\omega(\zeta)$ なる関数で変換すればつぎのような形になる。

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi^{1}(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \psi^{1}(\zeta) + \psi_0(\zeta) \end{aligned}\right\} \quad (2.2.6\,4)$$

ここに $\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^n$，$\psi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \zeta^n$ (2.2.6 5)

（2.2.6 4）式の各関係は，それぞれ $\varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta)$，$\psi_1[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta)$，$\varphi^{\circ}[\omega(\zeta)] = \varphi^{1}(\zeta)$，$\psi^{\circ}[\omega(\zeta)] = \psi^{1}(\zeta)$，$\varphi^{*}[\omega(\zeta)] = \varphi_0(\zeta)$，$\psi^{*}[\omega(\zeta)] = \psi_0(\zeta)$ と書き変えられたものである。

関係 $\varphi_0(\zeta)$，$\psi_0(\zeta)$ を求めるために，（2.2.6 4）式を境界条件（1.2.4 3）式に代入する。さらにその式およびそれに共軛な式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$（$\zeta$ は単位円 γ の内部の点を表わす）をかけて，γ について積分すれば，つぎのように $\varphi_0(\zeta)$，$\psi_0(\zeta)$ を求めるための2つ

の式がえられる。

$$\left.\begin{aligned}\varphi_o(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi_o'(\sigma)}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}+\beta_o&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1^o+if_2^o}{\sigma-\zeta}\,d\sigma\\ \psi_o(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\varphi_o'(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1^o-if_2^o}{\sigma-\zeta}\,d\sigma\end{aligned}\right\}\quad(2.2.66)$$

上式で $f_1^o+if_2^o$ は $\varphi_o(\zeta)$ および $\psi_o(\zeta)$ に対する境界条件に相当するもので，つぎのように書かれる。

$$f_1^o+if_2^o=f_1+if_2-\left[\varphi^1(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi^{1'}(\sigma)}+\overline{\psi^1(\sigma)}\right]\qquad(2.2.67)$$

また $f_1^o-if_2^o$ は（2.2.67）に共軛な式である。（2.2.66）式より関係 $\varphi_o(\zeta)$ および $\psi_o(\zeta)$ が求められれば，それらを（2.2.64）式に代入すれば応力関数 $\varphi(\zeta)$ および $\psi(\zeta)$ がえられ，さらに（1.2.44）式を用いれば直交曲線座標における応力成分 σ_ρ, σ_θ および $\tau_{\rho\theta}$ が求められる。孔の周辺が自由境界の場合にはそこで $\sigma_\rho=\tau_{\rho\theta}=0$ であるから，周辺応力 σ_θ はつぎのようになる。

$$\sigma_\theta=4\,\mathrm{Re}\left[\frac{\varphi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\right]\qquad(2.2.68)$$

ここで $\sigma=e^{i\theta}$ であって，変数 $\zeta=\rho e^{i\theta}$ の周辺上での値である。

いま図2.2.17のような荷重に対する初期応力状態は，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xo}&=-p\cos^2\delta\\ \sigma_{yo}&=-p\sin^2\delta\\ \tau_{xyo}&=-p\sin\delta\cos\delta\end{aligned}\right.\qquad(2.2.69)$$

であるから，これに対する2つの解析関数はつぎのように与えられる。

$$\varphi^o(z)=\frac{-1}{4}pz\ ,\quad \psi^o(z)=\frac{pe^{-2i\delta}}{2}z\qquad(2.2.70)$$

したがって孔の周辺に荷重が作用しないときの関数 $\varphi(\zeta)$，および $\psi(\zeta)$ は（2.2.64）式よりつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=\frac{-p}{4}\omega(\zeta)+\varphi_o(\zeta)\\ \psi(\zeta)&=\frac{p}{2}e^{-2i\alpha}\omega(\zeta)+\psi_o(\zeta)\end{aligned}\right\}\quad(2.2.71)$$

（2.2.71）式を（2.2.67）式およびそれに共軛な式に代入すると，境界条件式（2.2.66）右辺の積分中の分子がつぎのようにえられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
f_1^o + i f_2^o &= \frac{p}{2}\left[\omega(\sigma) - e^{2i\delta}\,\overline{\omega(\sigma)}\right] \\
f_1^o - i f_2^o &= \frac{p}{2}\left[\overline{\omega(\sigma)} - e^{-2i\delta}\,\omega(\sigma)\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (2.2.72)
$$

結局与えられた孔の形に対して，その周辺を単位円に写像するような関数 $=\omega(\zeta)$ が定められると，（2.2.72）式より境界条件に必要な項が計算され，さらにその値を（2.2.66）式に代入して，φ_0（ζ）および ψ_0（ζ）が決定される。したがって φ_0（ζ）および ψ_0（ζ）を（2.2.71）式に代入して φ（ζ），ψ（ζ）を求め，その値を（2.2.68）式に用いれば，孔の周辺応力をうることができる。

いま1例として正方形の孔の周辺応力を求めるために，G.N.Sawin の解を示すとつぎのようである。21) まず正方形の孔周（L）を単位円 γ に移し，孔の外部の領域を単位円の内部に写像するような関数はつぎのようになる。

$$
\omega(\zeta) = C\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6}\zeta^3 + \frac{1}{56}\zeta^7 - \frac{1}{176}\zeta^{11} + \frac{1}{384}\zeta^{15} - \frac{7}{4864}\zeta^{19} + \cdots\cdots\right) \quad (2.2.73)
$$

上式は無限級数であるから項数のとり方によつて正方形の形がわずかに変つてくる。なお上式中の C は正方形の辺長 a によつて与えられ，この場合は $C = 3a/5$ である。項数が極端に少ない場合には辺の直線性がくずれ，また隅の円味の曲率半径が増大する。いま比較のために項数を2項，3項，4項にとると，それぞれの場合の隅角の丸味の半径は $r_{\theta=45^\circ} = 0.06a$，$0.0245a$，$0.014a$ となり，それぞれに対する解析関数はつぎのように求められる。

オ2項までに対して

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi(\zeta) &= pR\left[\frac{1}{4\zeta} + \left(\frac{3}{7}\cos 2\delta + i\frac{3}{5}\sin 2\delta\right)\zeta + \frac{1}{24}\zeta^3\right] \\
\psi(\zeta) &= -pR\left[\frac{e^{-2i\alpha}}{2\zeta} + \frac{13\zeta - 26\left(\frac{3}{7}\cos 2\delta + i\frac{3}{5}\sin 2\delta\right)\zeta^3}{12(2+\zeta^4)}\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (2.2.74)
$$

オ3項までに対して

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi(\zeta) &= pR\Big[\frac{0.25}{\zeta} + (0.426\cos 2\delta + i\,0.608\sin 2\delta)\zeta \\
&\qquad + 0.046\zeta^3 + (0.008\cos 2\delta - i\,0.011\sin 2\delta)\zeta^5 - 0.004\zeta^7\Big] \\
\psi(\zeta) &= -pR\Big[\frac{0.5e^{-2i\delta}}{\zeta} + \frac{0.548\zeta - (0.457\cos 2\delta + i\,0.672\sin 2\delta)\zeta^3}{1+0.5\zeta^4-0.125\zeta^8} \\
&\qquad - \frac{0.026\zeta^5 + (0.029\cos 2\delta - i\,0.068\sin 2\delta)\zeta^7}{1+0.5\zeta^4-0.125\zeta^8}\Big]
\end{aligned}
\right\} \quad (2.2.75)
$$

オ4項までに対して

$$\varphi(\zeta)=pR\left[\frac{0.25}{\zeta}-0.4254\zeta+0.0476\zeta^{3}-0.0086\zeta^{5}-0.0060\zeta^{7}+0.0024\zeta^{9}+0.0014\zeta^{11}\right]$$

$$\psi(\zeta)=pR\left[\frac{0.5}{\zeta}-\frac{0.4795-0.457\zeta^{3}+0.269\zeta^{5}+0.0037\zeta^{7}}{1+0.5\zeta^{4}-0.125\zeta^{8}+0.063\zeta^{12}}\right.$$

$$\left.-\frac{0.073\zeta^{9}-0.017\zeta^{11}-0.031\zeta^{13}}{1+0.5\zeta^{4}-0.125\zeta^{8}+0.063\zeta^{12}}\right] \qquad (2.2.76)$$

(2.2.74)，(2.2.75)，(2.2.76)式等を(2.2.68)式に用いて正方形孔の周辺応力をG.N.Sawin が計算しているが，その結果を示せば表－2.2.2のようである。

上に述べた種々の解法のほか，丸味のある隅をもつた矩形孔の周辺応力についてのS.R.Heller,J.S.Brock およびR.Bart[22]の研究があり，そこでは矩形孔の外部の領域を単位円の外部に写像する関数

表－2.2.2　正方形孔の周辺応力 σ_θ/p

荷重状態	δ = 0°		δ = 45°		δ = 90°
項数	2	3	2	3	4
R／a	0.06	0.0245	0.06	0.0245	0.014
0°	0.808	0.936	−0.333	−0.412	−1.616
15	−	−	−	−	−1.802
30	−	−	−	−	−1.932
35	0.268	0.544	−3.880	−6.564	−
40	−0.980	−0.605	−6.223	−9.672	−4.230
45	−3.000	−4.368	−7.800	−11.516	−5.763
50	−3.860	−4.460	−6.223	−9.672	−0.265
55	−3.366	−2.888	−3.880	−6.564	−
60	−	−	−	−	0.702
75	−	−	−	−	0.901
90	−1.472	−1.760	−0.333	−0.412	0.871

$$z=\omega(\zeta)=A\zeta+\frac{B}{\zeta}+\frac{C}{\zeta^{3}}+\frac{D}{\zeta^{5}}+\frac{E}{\zeta^{7}}+\frac{F}{\zeta^{9}}+\cdots\cdots \qquad (2.2.77)$$

を用いている。上式のA，B………，Fは矩形の両辺の比および隅の曲率によつて定まる常数である。またYi-Yuan Yu[23]は水平地表面下のかなり深いところにある，一般的なOvaloid 形の水平トンネルを対象にして応力式を算出している。彼は重力場において問題を取扱つているので，上に述べた複素変数の解法における応力式としては，重力に対するポテンシャル関数 $2V_1(z)=\gamma y=\frac{1}{2}i\gamma(z-\bar{z})$ が附加されたものを用い，またこの場合境界条件にも重力のポテンシャル関数の項が入つてきて，(1.2.40)式はつぎのようになる。

$$\psi_1(z)+\overline{z\varphi'(z)}+\overline{\psi_1(z)}=i\int_0^s(X_n+iY_n)ds-\int V_1 dz=f_1+if_2 \qquad (2.2.78)$$

上より判るように，この場合には境界条件における荷重項の内容が変るだけであり，そのほかの式はそのまま使用することができるから，非重力場内における問題と同様にして解を求めることができる。Yi-Yuan Yu は写像関数として（2.2.7 7）式の才3項までとつたつぎのような形

$$z=\omega(\zeta)=K(\zeta+\frac{m}{\zeta}+\frac{n}{\zeta^3}) \qquad (2.2.79)$$

を用いて，zー平面における一般的な ovaloid 形を ζ ー平面の単位円 γ に写像している。その結果孔周辺応力として次式を導いている。

$$\begin{aligned}\sigma_\theta=&2\gamma K\{(1-m)\sin\theta-n\sin 3\theta\}\\&+\frac{2\gamma}{1+m^2+9n^2+2(3mn-n)\cos 2\theta-6n\cos 4\theta}\Big[\frac{4mn}{1-n}d\cos 2\theta\\&-(1-9n^2-m^2\frac{1+n}{1-n})h-\{m^2-5mn+15n^2-m^3+6m^2n-21mn^2\\&+\frac{1}{\kappa+1}(1+m+2mn-6n^2)(1-m^2-3n^2)\}K\sin\theta\\&+\{m-2n-m^2+4m^2n+9n^3-\frac{n}{\kappa+1}(1-m^2-3n^2)\}K\sin 3\theta\\&+(3n-4mn+3mn^2)K\sin 5\theta-(3n^2)K\sin 7\theta\Big]\end{aligned} \qquad (2.2.80)$$

2．4　任意断面形状の坑道に対する解法

2.2.，2．3においては円形楕円形および規則的な多角形あるいは ovaloid 形等の孔について考えたが，ここでは上部に円弧をもつ矩形断面をなすような，一般的な坑道形状に対する複素変数による Muschelishvili の解法の適用について述べる。正方形孔の外部を単位円の内部に写像する関数（2.2.7 3）式において，関数は無限級数で与えられている。したがつてそれらから何項まで取つて計算するかは，写像関数の収斂性によつて制限されるだろう。それゆえ任意の形の孔をもつ無限平面上に単位円の内部あるいは外部を写像するために，収斂のよい冪級数が用いられれば，Muschelishvili の解法を応用することが可能である。

任意の孔の境界（zー平面）の外部領域を単位円（ζー平面）の内部に写像する関数として，つぎのような冪級数を用いる。

$$z=\omega(\zeta)=R(1/\zeta+d_1\zeta+d_2\zeta^2+\cdots\cdots+d_n\zeta^n) \qquad (2.2.81)$$

いま坑道断面形状として図ー2.2.1 8のようなものを選ぶと，その孔を単位円に写像する関数はつぎのようになる。[24]

$$z=\omega(\zeta)=R[\frac{1}{\zeta}+0.0893\zeta+0.0477\zeta^2-0.1137\zeta^3+0.0371\zeta^4+0.0116\zeta^5$$

$$-0.033\zeta^6+0.0055\zeta^7-0.0086\zeta^8-0.0019\zeta^9+0.0041\zeta^{10}-0.0002\zeta^{11}]$$

$$=R\left[\frac{1}{\zeta}+\sum_{n=1}^{\nu} d_n\zeta^n\right] \qquad (2.2.82)$$

また図に示すような初期荷重状態の場合には，それに対する２つの解析関数は　（２．２．６１）式よりつぎのようにえられる。

$$\left.\begin{aligned}\varphi^1(\zeta)&=-\frac{p}{4}(1+\lambda)\cdot\omega(\zeta)\\ \psi^1(\zeta)&=\frac{p}{2}(1-\lambda)\cdot\omega(\zeta)\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.83)$$

したがつて求める応力関数$\varphi(\zeta)$，$\psi(\zeta)$は（２．２．６４）式より

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=-\frac{p}{4}(1+\lambda)\cdot\omega(\zeta)+\varphi_0(\zeta)\\ \psi(\zeta)&=\frac{p}{2}(1-\lambda)\,\omega(\zeta)+\psi_0(\zeta)\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.84)$$

ここに$\varphi_0=\sum_{n=1}^{\nu} a_n\zeta^n$，　$\psi_0(\zeta)=\sum_{n=1}^{\nu} b_n\zeta^n$ 　(2.2.85)

（２．２．８３）式を（２．２．６７）式およびそれと共範な式に代入して$f_1^0+if_2^0$，$f_1^0-if_2^0$を求め，それらを（２．２．６６）式右辺に代入して積分を行えば，Chaucy積分の理論によつてつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1^0+if_2^0}{\sigma-\zeta}d\sigma&=\frac{p}{2}\left\{(1+\lambda)\sum_{n=1}^{\nu} d_n\zeta^n+(\lambda-1)\zeta\right\}=\sum_{n=1}^{\nu}A_n\zeta^n\\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1^0-if_2^0}{\sigma-\zeta}d\sigma&=\frac{p}{2}\left\{(1+\lambda)\zeta+(\lambda-1)\sum_{n=1}^{\nu} d_n\zeta^n\right\}=\sum_{n=1}^{\nu}B_n\zeta^n\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.86)$$

つぎに（２．２．６６）式左辺の才２項の積分は，$\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\alpha)}$を$\sigma$の冪級数に展開して用い，$\varphi_0'(\zeta)$は（２．２．８５）式から求まるから，結局つぎのようにζの冪級数として求められる。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi_0'(\sigma)}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}=K_0+K_1\zeta+\cdots\cdots+K_n\zeta^n+\cdots\cdots+K_{\nu-2}\zeta^{\nu-2} \qquad (2.2.87)$$

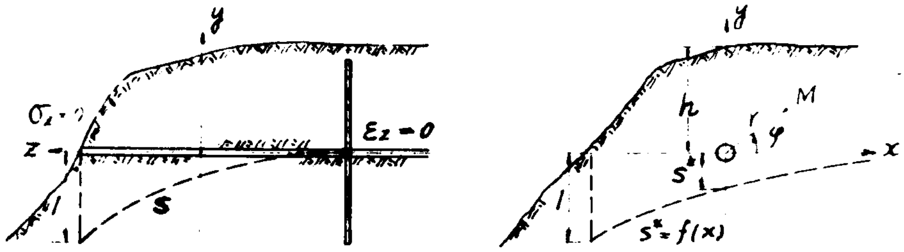
（２．２．６６）式に（２．２．８５），（２．２．８６）および（２．２．８７）式を代入して，その両辺のζ^nの係数を比較することにより，求める関数$\varphi_0(\zeta)$の各　の係数a_nがえられる。このようにしてえられたφ_0（ζ）（２．２．８５）式とω（ζ）（２．２．８２）式を（２．２．６８）式に用いれば，孔の周辺応力が求められるが，いまつぎのように簡単に表わせば，

$$\left.\begin{aligned}p\cdot\alpha&=Re[\varphi'(\sigma)],\qquad \gamma=Re[\omega'(\sigma)]\\ p\cdot\beta&=Im[\varphi'(\sigma)],\qquad \delta=Im[\omega'(\sigma)]\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.88)$$

周辺応力σ_θ はつぎのように与えられる。

$$\sigma_\theta = \frac{4(\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta)}{\gamma^2 + \delta^2} p \qquad (2.2.89)$$

図－2.2.18に示す断面形状に対して初期応力状態が(i) $\sigma_{xo}=-p$，$\sigma_{yo}=0$，$\tau_{xyo}=0$，(ii) $\sigma_{xo}=0$，$\sigma_{yo}=-p$，$\tau_{xyo}=0$の 2つの場合について，G.Erasが計算を行つた周辺応力分布を示すと図－2.2.19のようである。図中，坑道周縁に沿つて書かれている角度の数は単位円上（$\sigma=e^{i\theta}$）の角度θの値を示し，その角度に対応した坑道周辺上に書かれている。



(a)　　　　(b)

図-2・2・1

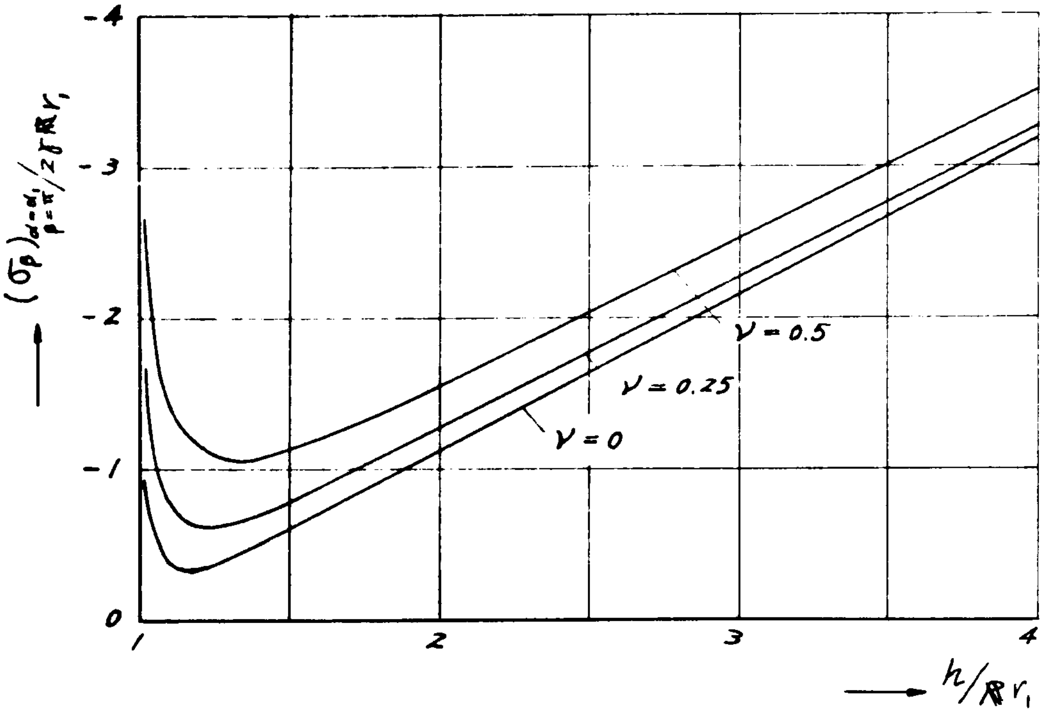
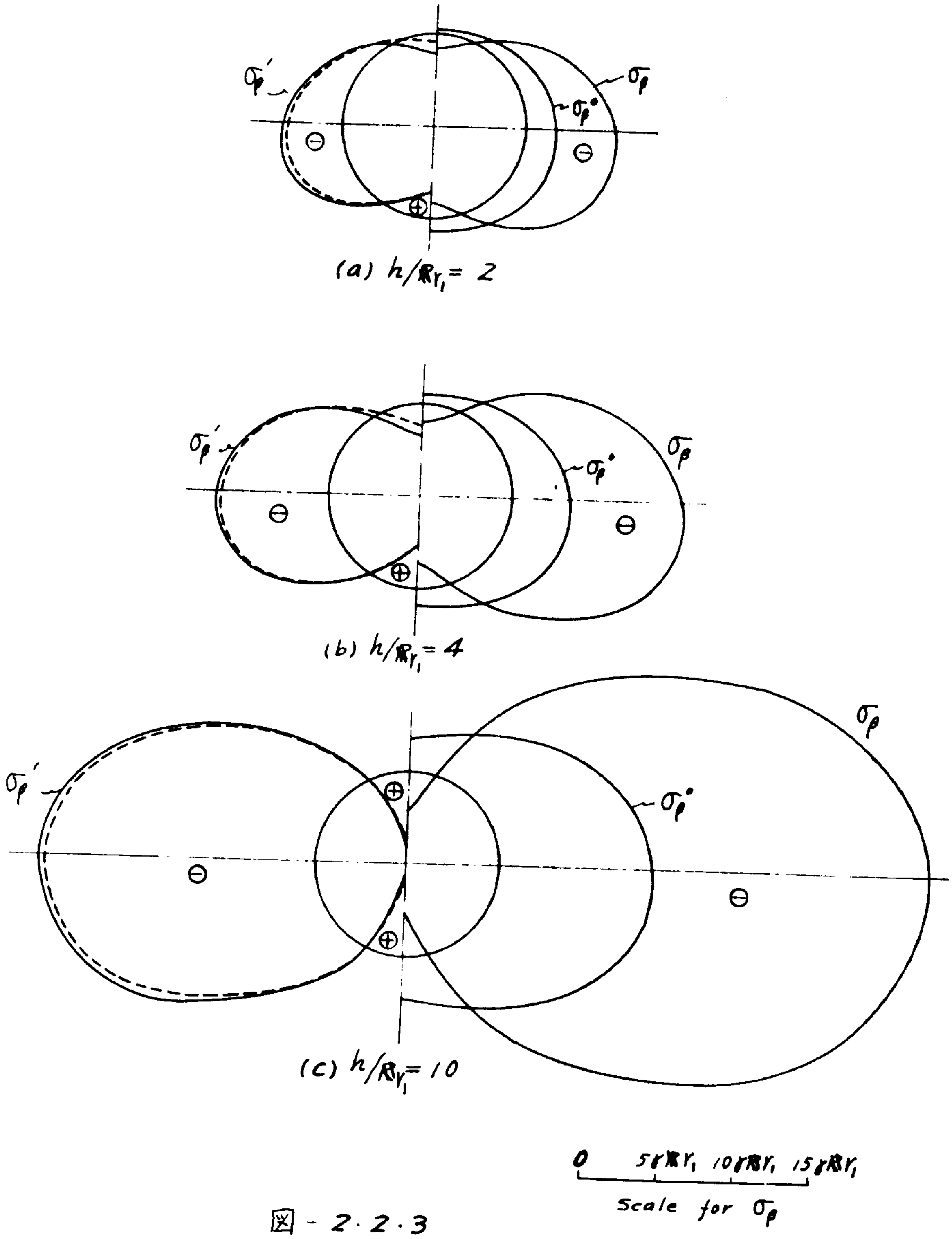


図-2・2・2　坑道上盤における応力と h/Rr_1 の関係



σ_ρ'
σ_ρ°
σ_ρ
⊖
⊕
(a) $h/r_1 = 2$
(b) $h/r_1 = 4$
(c) $h/r_1 = 10$
0 $5\gamma r_1$ $10\gamma r_1$ $15\gamma r_1$
Scale for σ_ρ

図 - 2.2.3

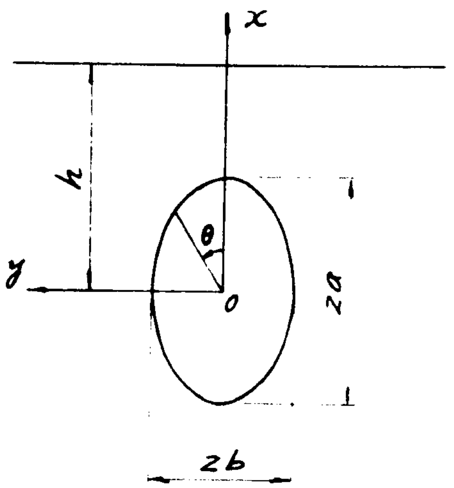


図-2·2·4

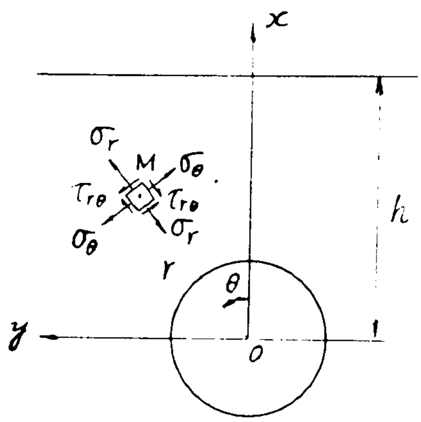


図-2·2·5

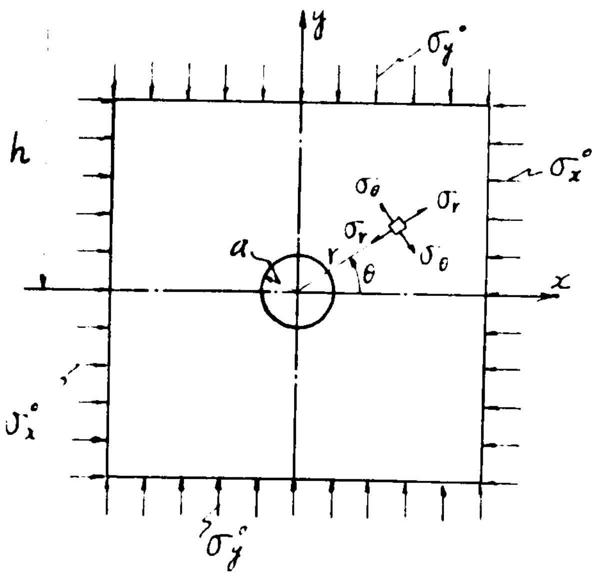


図-2·2·6

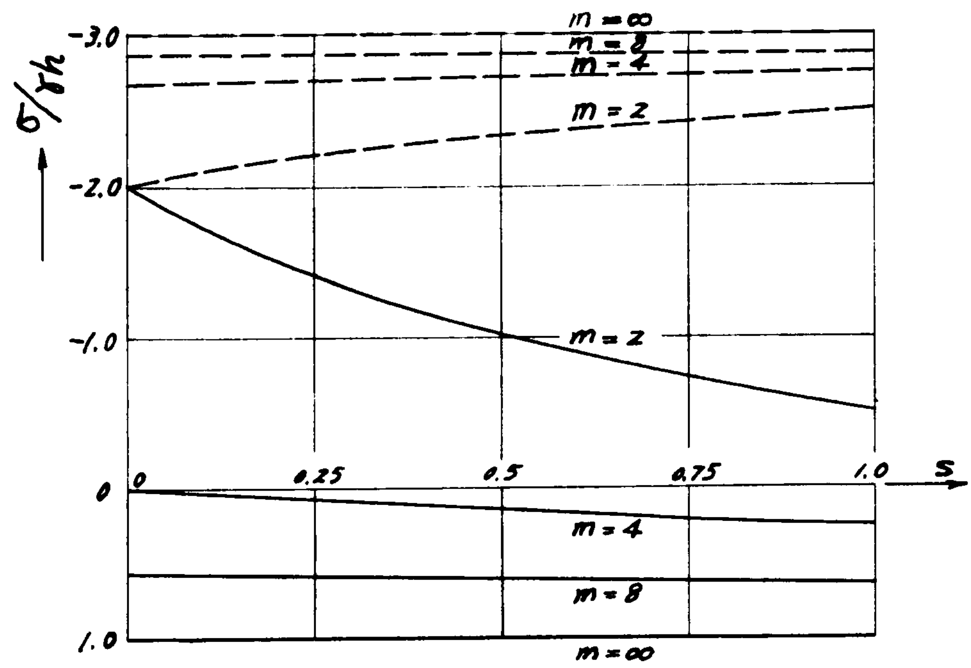


図-2·2·7

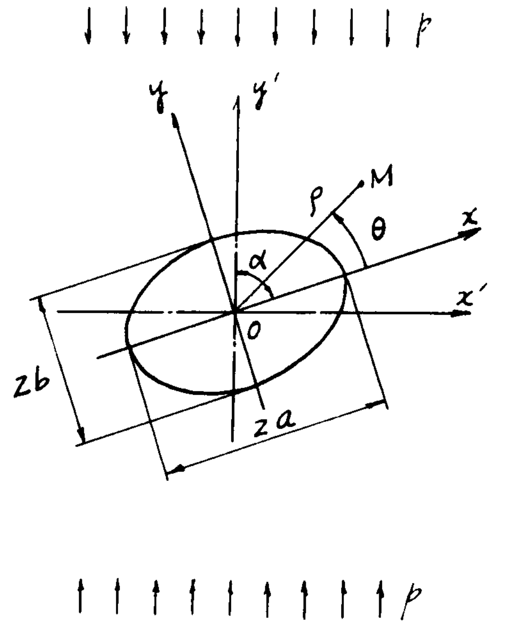


图-2·2·8

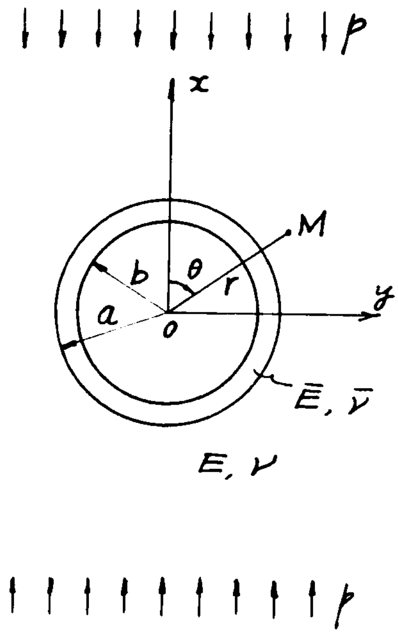


图-2·2·9

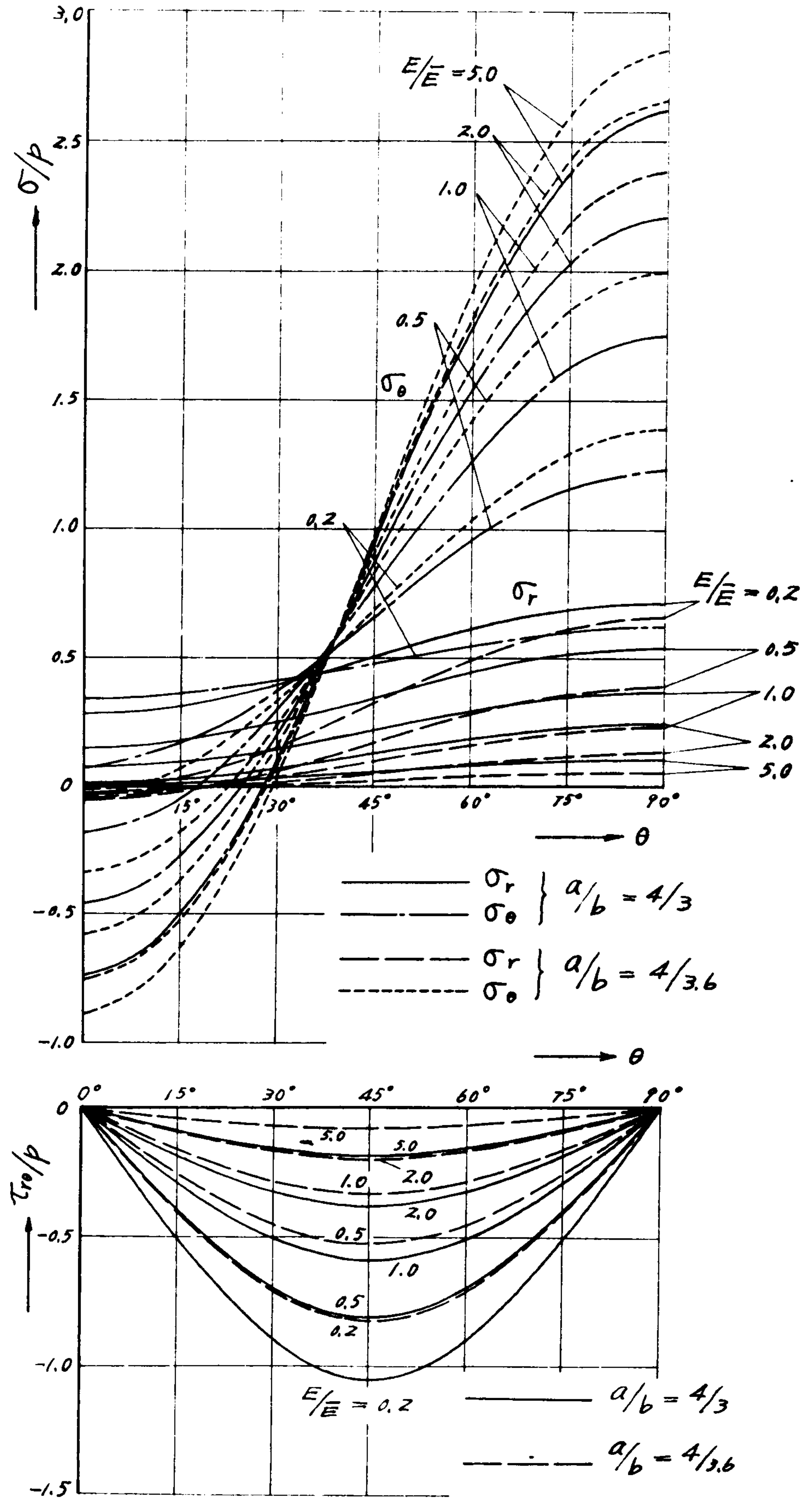
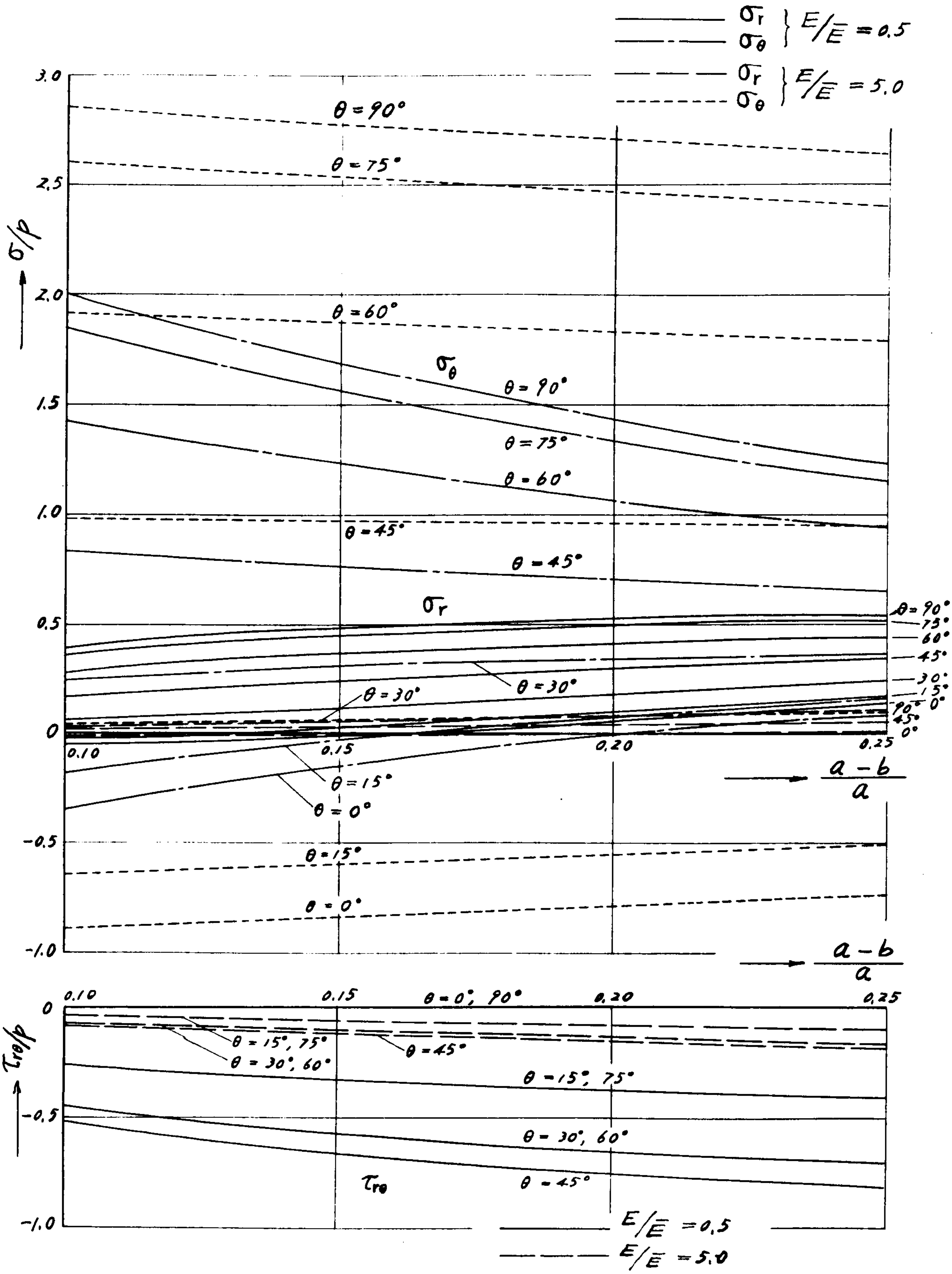


図-2・2・10　巻立外壁に沿う地山の応力分布
条件(i)の場合



σr
σθ
E/E = 0.5
σr
σθ
E/E = 5.0
σ/p
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
-0.5
-1.0
θ = 90°
θ = 75°
θ = 60°
σθ
θ = 90°
θ = 75°
θ = 60°
θ = 45°
θ = 45°
σr
θ = 30°
θ = 30°
θ = 15°
θ = 0°
θ = 15°
θ = 0°
0.10
0.15
0.20
0.25
a − b / a
τrθ/p
θ = 0°, 90°
θ = 15°, 75°
θ = 30°, 60°
θ = 45°
θ = 15°, 75°
θ = 30°, 60°
θ = 45°
τrθ
E/E = 0.5
E/E = 5.0

図-2.2.11

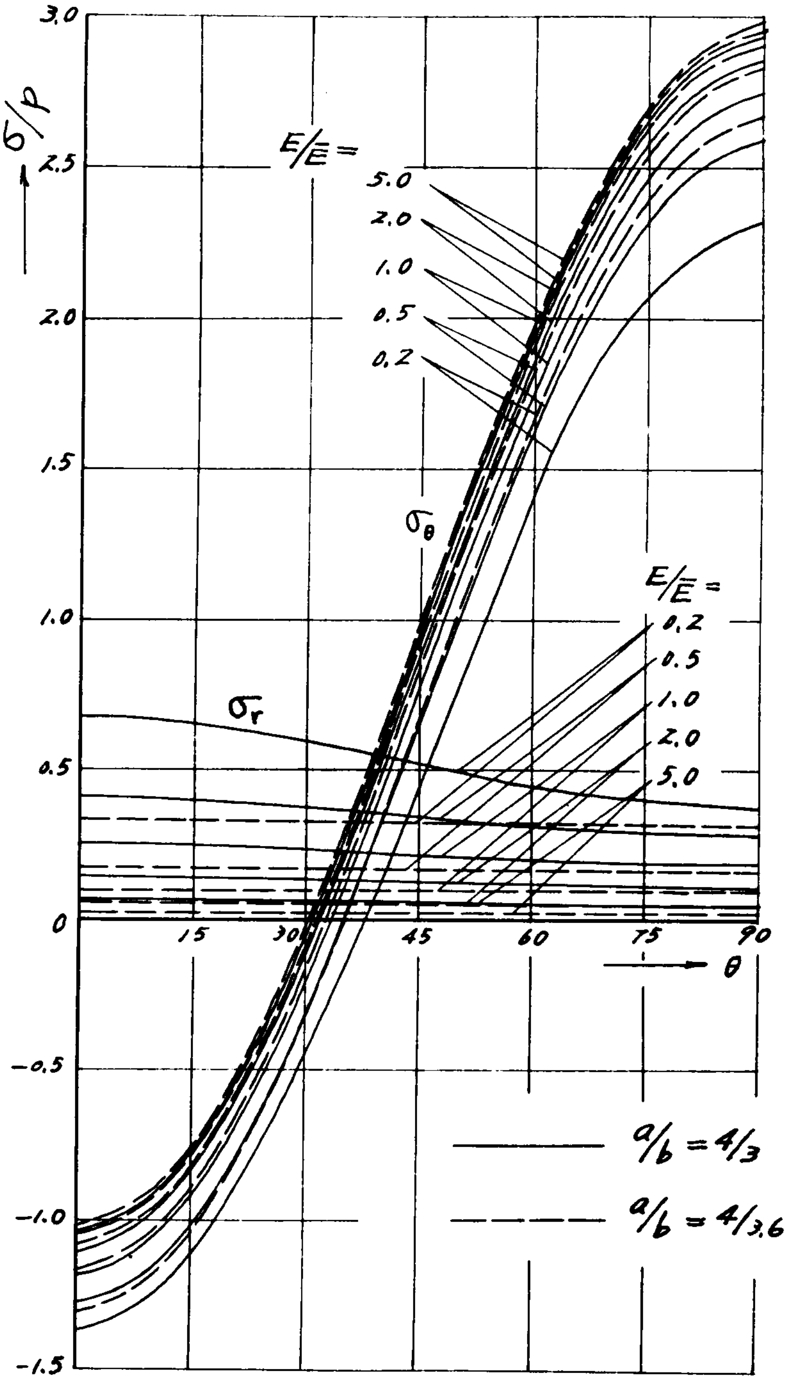
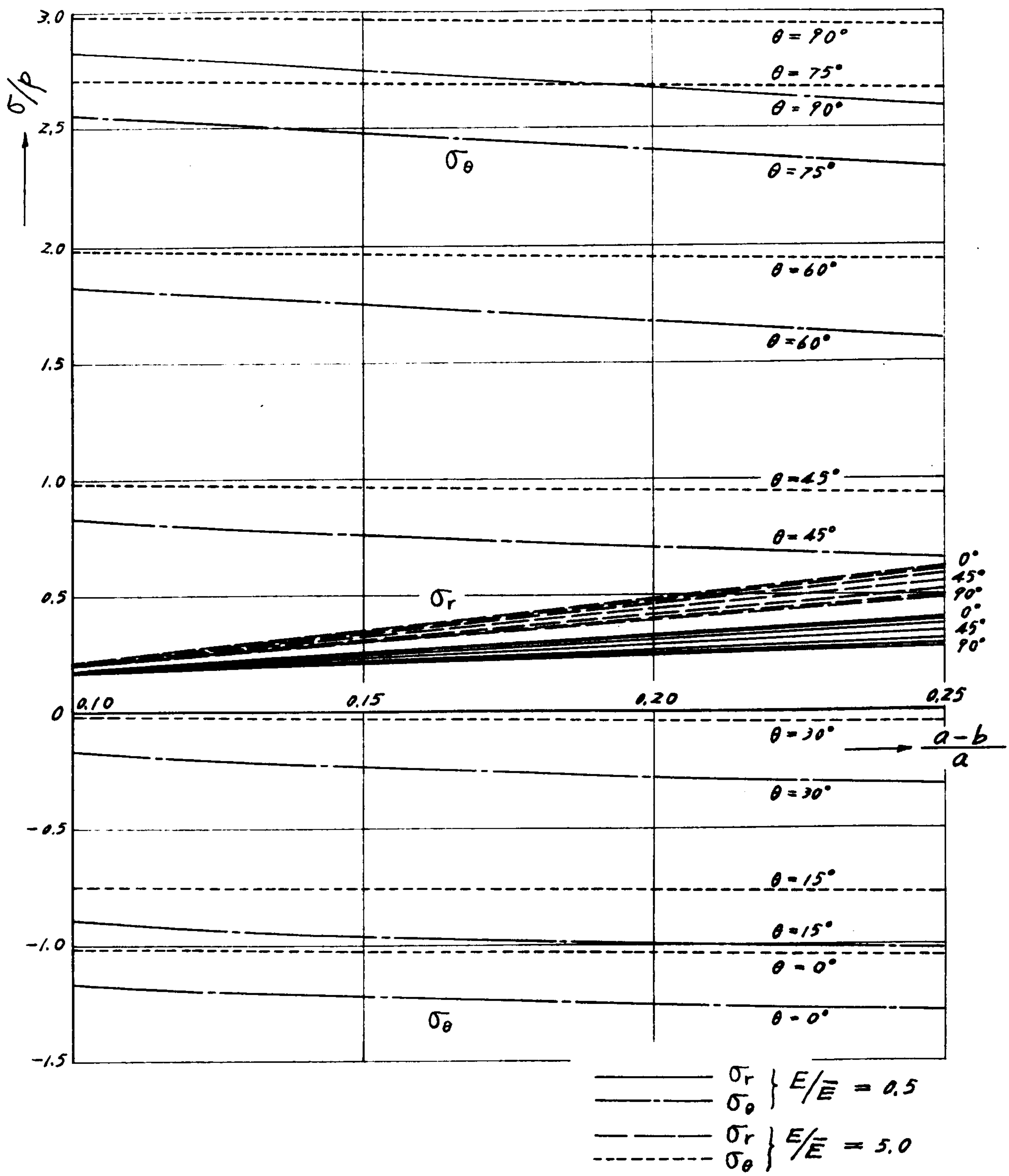


図-2.2.12 巻立外壁に沿う地山の応力分布
条件(ii)の場合



3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
−0.5
−1.0
−1.5
σ/p
θ = 90°
θ = 75°
θ = 90°
θ = 75°
θ = 60°
θ = 60°
θ = 45°
θ = 45°
σ_θ
σ_r
0°
45°
90°
0°
45°
90°
0.10
0.15
0.20
0.25
θ = 30°
θ = 30°
θ = 15°
θ = 15°
θ = 0°
θ = 0°
$\frac{a-b}{a}$
σ_θ
σ_r } $E/\bar{E} = 0.5$
σ_θ
σ_r } $E/\bar{E} = 5.0$
σ_θ

図 - 2・2・13

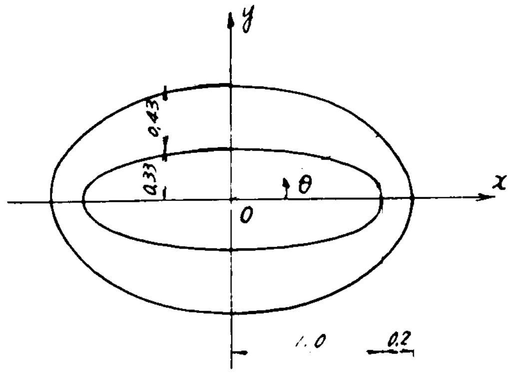
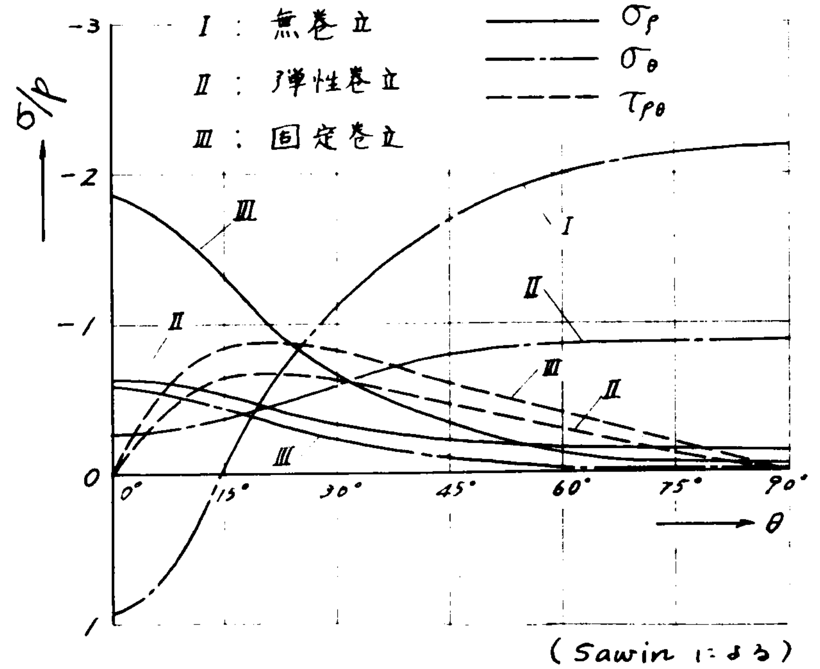
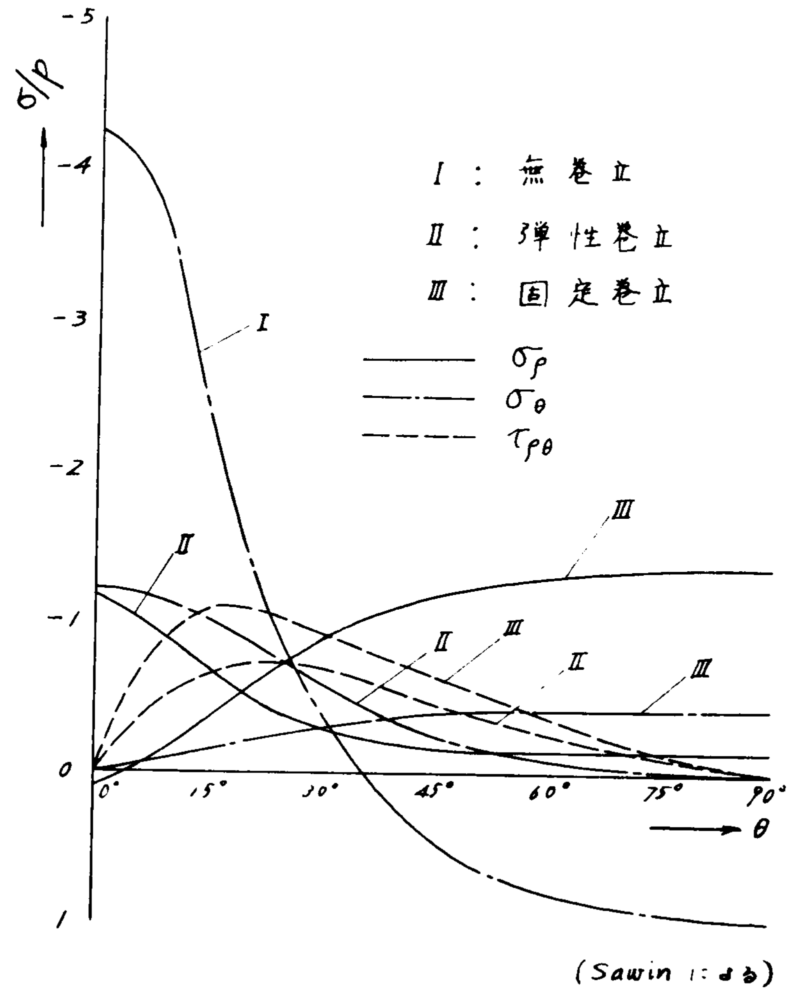


図 - 2・2・14



荷重方向 : x軸方向

図 - 2・2・15



荷重方向：y軸方向

図-2·2·16

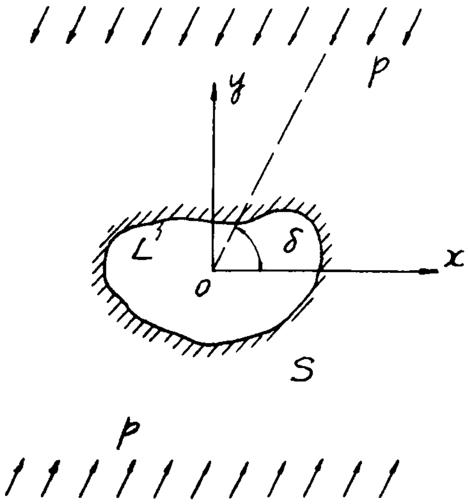


图-2·2·17

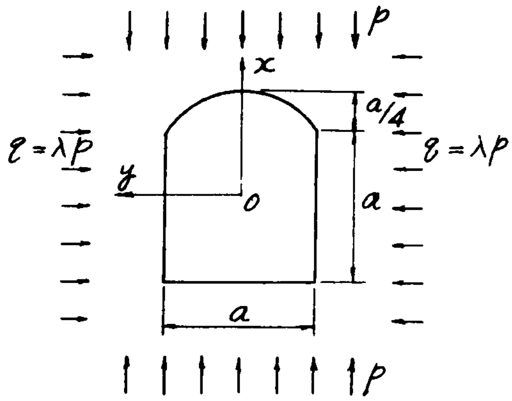


图-2·2·18

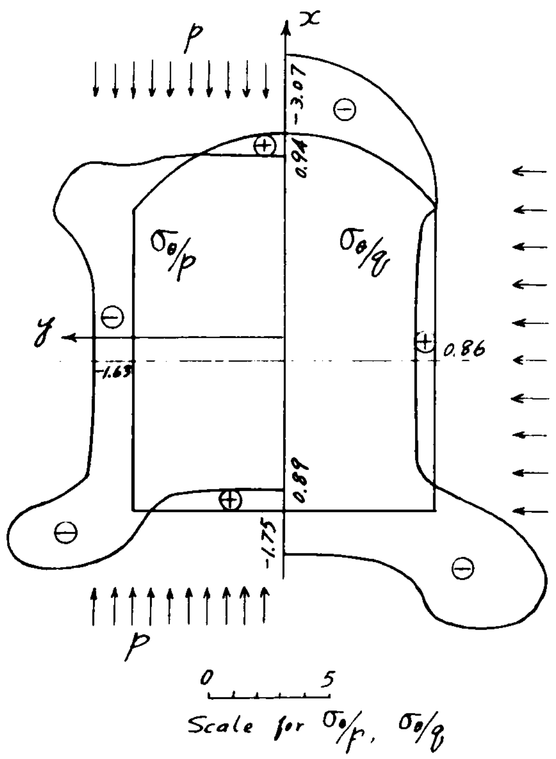

x
p
-3.07
0.94
q
σ_θ/p
σ_θ/q
y
0.86
-1.65
0.89
-1.75
p
0
5
Scale for σ_θ/p, σ_θ/q

図-2·2·19

第 3 章　直交異方性弾性地山における水平坑道周辺応力および変形状態

3．1　素堀円形坑道の周辺応力

(1) 坑道周辺応力式[25)]

直交異方性弾性体の平面問題に対する弾性基礎方程式については，すでに第1篇において述べたが，ここではそれらの基礎方程式を用いて，異方性弾性地山内に水平に開さくされた素堀円形坑道の種々の初期応力状態に対する周応辺力を求めることにする。

一般に円孔を有する平面 $z = x + iy$ と同時に，つぎのような *affine* 変換，

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x + s_1 y = x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x + s_2 y = x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1)$$

を用いて，z_1 平面および z_2 平面を考える。上式で，$s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$，$s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ は（1.3.7）式の特性方程式の根である。z－平面における円孔の外部の領域（S）を，つぎのような写像関数

$$z = \omega(\zeta) = a\frac{1}{\zeta} \qquad (2.3.2)$$

を用いて単位円の内部に写像すれば，z_1 －平面および z_2 －平面における対応円孔の外部領域 $S^{(1)}$ および $S^{(2)}$ は，それぞれつぎのような関数によつて単位円の内部に写像される。

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= w_1(\zeta) = \frac{a(1+is_1)}{2}\zeta + \frac{a(1-is_1)}{2}\cdot\frac{1}{\zeta} \\ z_2 &= \omega_2(\zeta) = (\zeta) = \frac{a(1+is_2)}{2}\zeta + \frac{a(1-is_2)}{2}\cdot\frac{1}{\zeta} \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.3)$$

円孔の周縁が自由境界であり，無限遠において均一な応力状態が与えられている場合には，応力関数（1.3.15）式はつぎのような形をとる。[26)]

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z_1) &= Bz_1 + \varphi_0(z_2) \\ \psi(z_2) &= (B' + iC')z_2 + \psi_0(z_2) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.4)$$

いま x 軸および y 軸を弾性主軸の方向と一致させると，s_1 および s_2 は（1.3.11）式の根であり，いづれも純虚根 $s_1 = i\beta_1$，$s_2 = i\beta_2$（β_1 β_2 は実の常数で $\beta_1 > 0$，$\beta_2 > 0$）となる。この場合（2.3.4）式中の各係数はつぎのように与えられる。

$$B = \frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_2^2 \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \qquad (2.3.5)$$

$$B' = -\frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_1^2 \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)}, \quad C' = \frac{\tau_{xy}^{(\infty)}}{2\beta_2}$$

（2.3.4）式を境界条件式（1.3.1 9）に代入すれば，この場合は $f_1 = f_2 = 0$ であるから $\varphi_0(z_1)$ および $\psi_0(z_2)$ に対する誘導境界条件式がつぎつぎのようにえられる。

$$\left.\begin{aligned} &2\,Re[\varphi_0(z_1) + \psi_0(z_2)] = f_1^0 \\ &2\,Re[s_1 \varphi_0(z_1) + s_2 \psi_0(z_2)] = f_2^0 \end{aligned}\right\} \quad (2.3.6)$$

ここに

$$\begin{aligned} &f_1^0 = -2\,Re[Bz_1 + (B' + iC')z_2] \\ &f_2^0 = -2\,Re[Bs_1 z_1 + s_2(B' + iC')z_2] \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

（2.3.6）式より $\varphi_0(z_1)$ および $\psi_0(z_2)$ が求められるが，いま $\Phi_0(\zeta) = \varphi_0[\omega_1(\zeta)]$ および $\Psi_0(\zeta) = \psi_0[\omega_2(\zeta)]$ を用い，（2.3.6）式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma}$ をかけて単位円 γ に沿つて積分し，その結果を $\Phi_0(\zeta)$，$\Psi_0(\zeta)$ で解けばつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_\gamma [s_2 f_1^0 - f_2^0] \frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_1 \\ \Psi_0(\zeta) &= -\frac{1}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_\gamma [s_1 f_1^0 - f_2^0] \frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_2 \end{aligned}\right\} \quad (2.3.8)$$

上式より $\Phi_0(\zeta)$，$\Psi_0(\zeta)$ が求まれば，つぎに示すような変数変換によつて変数 ζ を変数 z_1 および z_2 に変換すれば，$\varphi_0(z_1)$ および $\psi_0(z_2)$ がえられる。変数変換式は，関数 $\Phi_0(\zeta)$ に対しては，

$$\zeta = \frac{a(1 - is_1)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2(1 + s_1^2)}} \quad (2.3.9)$$

関数 $\Psi_0(\zeta)$ に対しては

$$\zeta = \frac{a(1 - is_2)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2(1 + s_2^2)}} \quad (2.3.10)$$

である。

いま図－2.3.1のように地山の初期応力状態として無限遠において鉛直方向に地圧 p のみが等分布に作用する場合を考え，地山の主弾性係数を E_1，F_2 として，主弾性係数 E_1 の方向が鉛直方向（地圧 p の方向）と角 δ をなすものとする。一般に初期応力状態が $p = -\gamma h$；$q = -\lambda\gamma h$，で与えられる場合には，完全弾性地山における取扱い方と同様に，以下述べる一軸方向荷重に対する結果を重畳することができる。

この場合には，無限遠における応力状態は次式のようになる。

$$\sigma_x^{(\infty)} = -p\cos^2\delta,\quad \sigma_y^{(\infty)} = -p\,\mathrm{son}^2\delta \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = -p\sin\delta\cos\delta$$

したがつて上の値を（2.3.5）式に代入すれば，

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\cos^2\delta+\beta_2^2\sin\delta}{2(\beta_2^2-\beta_1^2)}p \\ B' &= \frac{\cos^2\delta+\beta_1^2\sin^2\delta}{2(\beta_2^2-\beta_1^2)}p\ ,\quad C' = \frac{-\sin\delta\cos\delta}{2\beta_2}\ p \end{aligned}\right\}\qquad (2.3.11)$$

つぎに（2.3.7）式に（2.3.8）式および（2.3.11）式を代入してf_1^0およびf_2^0を求め、その値を（2.3.8）式を用いて積分すれば，次式がえられる。

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= \frac{pa\zeta'}{4(s_1-s_2)}\left[i(s_2\sin 2\delta+2\mathrm{Con}^2\delta)-(2s_2\sin^2+\sin2\delta)\right]+\lambda_1 \\ \Psi_0(\zeta) &= -\frac{pa\zeta}{4(s_1-s_2)}\left[i(s_1\sin2\delta+2\cos^2\delta)-(2s_1\sin\delta+\sin2\delta)\right]+\lambda_2 \end{aligned}\right\}(2.3.12)$$

（2.3.13.）式を（2.3.4）式に代入してえられる応力関数$\varphi(z_1)$および$\psi(z_2)$を（1.3.16.）式に用いれば、この場合の各成分応力はつぎのように求められる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p\cos^2\delta-2\mathrm{Re}[\beta_1^2\varphi_0'(z_1)+\beta_2^2\psi_0'(z_2)] \\ \sigma_y &= -p\sin^2\delta+2\mathrm{Re}[\varphi_0'(z_1)+\psi_0'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -p\sin\delta\cos\delta-2\mathrm{Re}[i\beta_1\varphi_0'(z_1)+i\beta_2\psi_0'(z_2)] \end{aligned}\right\}\quad (2.3.14.)$$

また上式を極座標系による応力成分に変換すると、

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -p(\cos\delta\cos\theta+\sin\delta\sin\theta)^2 \\ &\quad + R_e[(\sin\theta-i\beta_1\cos\theta)^2\varphi_0'(z_1)+(\sin\theta-i\beta_2\cos\theta)^2\psi'(z_2)] \\ \sigma_\theta &= -p(\cos\delta\sin\theta-\sin\delta\cos\theta)^2 \\ &\quad +2\,Re[(i\beta_1\sin\theta+\cos\theta)^2\varphi_0'(z_1)+(i\beta_2\sin\theta+\cos\theta)^2\psi_0'(z_2)] \\ \tau_{r\theta} &= -p\{(\sin\delta\cos\delta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\sin\theta\cos\theta\} \\ &\quad +2\,Re[(\sin\theta-i\beta_1\cos\theta)(i\beta_1\sin\theta+\cos\theta)\varphi_0'(z_1)] \\ &\quad +(\sin\theta-i\beta_2\cos\theta)(i\beta_2\sin\theta+\cos\theta)\psi_0'(z_2)] \end{aligned}\right\}(2.3.15)$$

いま円孔の周縁における応力を求めるために（2.3.13）式より$\varphi_0'(z_1)$および$\psi_0'(z_2)$を求め，円孔周縁上で成り立つところのつぎの関係

$$\sqrt{Z_1^2-a^2(1-\beta_1^2)} = ia(\sin\theta-i\beta_1\cos\theta)$$

$$\sqrt{z_2^2 - a^2(1-\beta_2^2)} = ia(\sin\theta - i\beta_2 \cos\theta) \quad \Bigg\} \quad (2.3.1\,6)$$

を用いればつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_0'(z_1) &= \frac{p}{2(\beta_1-\beta_2)} \cdot \frac{1}{\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta}\left[\{\sin\delta\cos\delta(1+\beta_1)(1+\beta_2)\sin\theta\cos\theta -\right.\\
&\quad -(\cos^2\delta-\beta_2\sin^2\delta)(\sin\theta+\beta_1\cos^2\theta)\} - i\{\sin\delta\cos\delta(1+\beta_2)(\sin^2\theta-\beta_1\cos^2\theta)\\
&\quad \left.+(\cos^2\delta-\beta_2\sin\delta)(1+\beta_1)\sin\theta\cos\theta\}\right]\\
\psi_0'(z_2) &= -\frac{p}{2(\beta_1-\beta_2)} \cdot \frac{1}{(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)}\left[\{\sin\delta\cos\delta(1+\beta_2)(1+\beta_1)\sin\theta\cos\theta -\right.\\
&\quad -(\cos^2\delta-\beta_1\sin^2\delta)(\sin^2\theta-\beta_2\cos^2\theta)\} + i\{\sin\delta\cos\delta(1+\beta_1)(\sin^2\theta-\beta_2\cos^2\theta)\\
&\quad \left.+(\cos^2\delta-\beta_1\sin^2\delta)(1+\beta_2)\sin\theta\cos\theta\}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.1\,7)$$

したがつて円孔周辺応力 σ_θ は（2.3.1 7）式を（2.3.1 5）式に代入してつぎのようにえられる。

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = &\frac{-p}{(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)}\left[\{(1+\beta_1+\beta_2)\cos^2\delta-\beta_1\beta_2\sin^2\delta\}\right.\\
&\sin^2\theta-(\beta_1+\beta_2)(1+\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin\delta\cos\delta\sin\theta\cos\theta+\beta_1\beta_2\}-\cos^2\delta+\\
&\left.+(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin^2\delta\}\cos^2\theta\right] \qquad (2.3.1\,8)
\end{aligned}$$

ここで β_1 および β_2 と地山の弾性性質との関係は（1.3.1 2）式で与えられ，さらに a_{11}，a_{22}，a_{12}，a_{66} 等の係数はポアッソン比 $\nu_{31}=\nu_{32}=0$ と仮定すれば（1.3.9）式よりつぎのように書かれるから，

$$a_{11}=1/E_1,\quad a_{22}=1/E_2,\quad a_{12}=-\nu_1/E_1,\quad a_{66}=1/G$$

結局 β_1，β_2 はつぎのようになる。

$$\beta_1^2\,\beta_2^2 = E_1/E_2,\quad \beta_1^2+\beta_2^2 = E_1/G - 2\nu_1 \qquad (2.3.1\,9)$$

この関係を（2.3.1 8）式に入れれば，円孔周辺応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta = &\frac{-p}{E\ N}\left[\{(1+n)\cos^2\delta+m\sin^2\delta\}\sin^2\theta-n(1+n-m)\sin\delta\cos\delta\sin\theta\cos\theta\right.\\
&\left.+\{\cos^2\delta+(m-n)\sin^2\delta\}m\cos^2\varphi\right] \qquad (2.3.2\,0)
\end{aligned}$$

ここに

$$m=\sqrt{\frac{E_1}{E_2}},\qquad n=\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}-\nu_1\right)+\frac{E_1}{G}}$$

$$N=\frac{\sin^4\theta}{E_1}+\left(\frac{1}{G}-\frac{2\nu_1}{E_1}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{\cos^4\theta}{E_2} \qquad (2.3.21)$$

（2.3.2 0）式はG.Sonntag[27]の与えているものと同じである。

坑道応力におよぼすポアッソン比ν_1の影響は地山岩盤の弾性係数の影響よりも一層小さいから，計算を容易にするために$\nu_1=0$とおけば，せん断性係数Gはつぎの式により，E_1およびE_2によつて一義的に定められる。[28]

$$\frac{1}{G}=\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2} \qquad (2.3.2 1)$$

$$\beta_1=1,\quad \beta_2=\sqrt{E'/E_2} \qquad (2.3.2 2)$$

となる。

(2)坑道応力分布の計算結果とその考察

いま（2.3.2 0）式を用いて地山の主弾性係数比$E_2/E_1=1$，2，4，6，18，10のそれぞれの場合に対して，主弾性係数E_1の方向が$\delta=0^\circ$，22.5°，45°，67.5° 90°と異なる場合について円形坑道周辺応力を計算すれば，表－2.3.1(a)，(b)，(c)，(d)，(e)に与えられた結果をうる。またこの結果より坑道周辺の応力分布の2.3の例を図示すれば，図－2.3.2(a)，(b)，(c)のようである。

図－2.3.2より判るように$\delta=0$のとき，2方向の弾性係数の差異が大きくなればなるほど

表－2.3.1（a）

$\delta=0°$		σ_θ/p					
φ	θ	$E_2/E_1=1$	2	4	6	8	10
0°	−90°	−3.00	−2.71	−2.50	−2.41	−2.35	−2.32
15	−57	−2.73	−2.56	−2.42	−2.35	−2.31	−2.29
30	−66	−2.00	−2.12	−2.15	−2.15	−2.15	−2.17
45	−45	−1.00	−1.33	−1.60	−1.71	−1.78	−1.82
60	−30	0	−0.32	−0.57	−0.57	−1.33	−0.74
75	−15	0.73	0.90	1.00	0.99	0.94	0.87
90	0	1.00	1.41	2.00	2.45	2.83	3.16
105	15	0.73	0.90	1.00	0.99	0.94	0.87
120	30	0	−0.32	−0.57	0.55	−1.33	−0.74
135	45	−1.00	−1.33	−1.60	−1.71	−1.78	−1.82
150	60	−2.00	−2.15	−2.15	−2.15	−2.17	−2.17
165	75	−2.56	−2.42	−2.35	−2.35	−2.31	−2.29
180	90	−3.00	−2.71	−2.50	−2.41	−2.35	−2.32

表－2.3.1　(b)

$\delta=22.5°$		$\sigma\theta/p$					
φ	θ	$E_2/E_1=1$	2	4	6	8	10
0°	−67.5°	−3.00	−2.76	−2.56	−2.47	−2.41	−2.364
15	−52.5	−2.73	−2.77	−2.72	−2.67	−2.63	−2.603
30	−37.5	−2.00	−2.32	−2.57	−2.66	−2.71	−2.73
45	−22.5	−1.00	−1.31	−1.88	−2.02	−2.22	−2.87
60	− 7.5	0	0.09	−0.07	0.49	0.06	−0.01
75	7.5	0.73	1.13	1.77	2.12	2.46	2.74
90	22.5	1.00	1.23	1.39	1.42	1.40	1.06
105	37.5	0.73	0.58	0.34	0.19	0.08	−0.00
120	52.5	0	−0.32	−0.59	−0.71	−0.78	−0.83
135	67.5	−1.00	−1.19	−1.30	−1.34	−1.36	−1.48
150	82.5	−2.00	−1.91	−1.84	−1.80	−1.78	−1.76
156	97.5	−2.73	−2.45	−2.26	−2.17	−2.11	−2.06
180	112.5	−3.00	−2.76	−2.56	−2.47	−2.41	−2.36

表－2.3.1　(c)

$\delta=45°$		$\sigma\theta/p$					
φ	θ	$E_2/E_1=1$	2	4	6	8	10
0°	− 45°	−3.00	−2.94	−2.80	−2.68	−2.63	−2.58
15	− 30	−2.73	−3.02	−3.23	−3.29	−3.31	−3.31
30	− 15	−2.00	−2.37	−2.87	−3.28	−3.23	−3.70
45	0	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00
60	15	0	0.37	0.87	1.28	1.50	1.70
75	30	0.73	1.02	1.23	1.29	1.31	1.49
90	45	1.00	0.94	0.80	0.70	0.63	0.58
105	60	0.73	0.32	0.20	0.09	0.02	−0.03
120	75	0	−0.25	−0.41	−0.48	−0.51	−0.54
135	90	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00
150	105	−2.00	−1.75	−1.59	−1.53	−1.49	−1.46
165	120	−2.73	−2.44	−2.20	−2.09	−2.02	−1.97
180	135	−3.00	−2.94	−2.80	−2.68	−2.63	−2.58

表－2.3.1 (d)

$\delta=67.5°$		σ_θ/p					
φ	θ	$E_2/E_1=1$	2	4	6	8	10
0°	−22.5°	−3.00	−2.85	−3.06	−3.13	−3.16	−3.17
15	−7.5	−2.73	−2.49	−2.93	−3.27	−3.55	−3.79
30	−7.5	−2.00	−1.44	−1.36	−1.26	−1.15	−1.04
45	22.5	−1.00	−0.30	0.20	0.30	0.46	0.57
60	37.5	0	0.37	0.52	0.57	0.58	0.59
75	52.5	0.73	0.55	0.46	0.39	0.35	0.32
90	67.5	1.00	0.37	0.19	0.10	0.05	0.02
105	82.5	0.73	0.02	−0.17	−0.28	−0.26	−0.29
120	97.5	0	−0.56	−0.58	−0.60	−0.60	−0.61
135	112.5	−1.00	−1.20	−0.99	−1.03	−1.00	−0.98
150	127.5	−2.00	−1.90	−1.67	−1.57	−1.50	−1.46
165	142.5	−2.73	−2.53	−2.39	−2.28	−2.21	−2.15
180	157.5	−3.00	−2.85	−3.06	−3.13	−3.16	−3.17

表－2.3.1 (e)

$\delta=90°$		σ_θ/p					
φ	θ	$E_2/E_1=1$	2	4	6	8	10
0°	0°	−3.00	−3.41	−4.00	−4.45	−4.83	−5.16
15	15	−2.73	−2.90	−3.00	−2.99	−2.94	−2.88
30	30	−2.00	−1.77	−1.43	−1.32	−1.06	−0.95
45	45	−1.00	−0.67	−0.40	−0.29	−0.22	−0.18
60	60	0	0.12	0.15	0.16	0.15	0.14
75	75	0.73	0.58	0.42	0.35	0.31	0.28
90	90	1.00	0.71	0.50	0.41	0.35	0.32
105	105	0.73	0.58	0.42	0.35	0.31	0.28
120	120	0	0.12	0.15	0.16	0.15	0.14
135	135	−1.00	−0.67	−0.40	−0.29	−0.22	−0.18
150	150	−2.00	−1.77	−1.43	−1.32	−1.06	−0.95
165	165	−2.73	−2.90	−3.00	−2.99	−2.94	−2.88
180	180	−3.00	−3.41	−4.00	−4.45	−4.83	−5.16

ど，すなわちE_2/E_1 が大きいほど上下盤における引張応力が増大し，$E_2/E_1=10$のときには側壁の圧縮応力よりもむしろ大きくなる。これとは逆に側壁の圧縮応力E_2/E_1 の増大にともなつて減少する。また坑道上下盤において引張応力を生じる範囲は応力集中度とは逆にE_2/E_1 が大きいほど狭くなる傾向がある。

$\delta=90°$のときには坑道周辺応力分布に及ぼす地山の異方性の影響は$\delta=0$のときと反対になる。すなわち上下盤に生ずる引張応力の大きさは，E_2/E_1 の増加に伴つて減少するが，その範囲は大きくなる。また側壁の圧縮応力は，E_2/E_1 の増大するにつれていちぢるしく増加す。

また$\delta=45°$ のときは$\delta=0°$，$90°$ の場合と異り，E_2/F_1 が大きいほど最大引張力を生ずる位置と最大圧縮応力を生ずる位置が接近し，複雑な応力分布を呈する。

以上のことより坑道の堀削される地山の弾性性質の異方性が大きいほど，弾性係数の小さい方向における坑道周縁応力の集中度が高くなり，この部分が危険な状態になると考えられる。たとえば$\delta=0°$ のときには上下盤の引張応力に，$\delta=45°$ のときには上下盤と側壁との中間部分の応力に，また$\delta=90°$ のときには側壁部分の圧縮応力に注目すべきである。

もちろんE_2/E_1 およびδの値によつて最大応力集中度の大きさおよびそれの生ずる位置は変化し，したがつて坑道周縁で危険な応力状態に達する位置も異なつてくるわけである。それでつぎに地山の異方性が坑道周辺の最大引張および圧縮応力の大きさとその生ずる位置にどのような影響を及ぼすかを調べてみる。

まず表−2.3.1 を用いて最大応力の値とE_2/E_1 との関係を，δをパラメーターとして図示すれば図−2.3.3のようになる。この図よりつぎのことが明らかである。坑道側壁部の圧縮応力は$\delta=45°\sim 90°$ でE_2/E_1 の増加に伴つてほぼ一様に増加し，そのうちでも$\delta=90°$ のときの増加率は最も大きい。これに対して$\delta=0°\sim 45°$ の場合には，この圧縮応力は逆にE_2/E_1の増加に伴つて減少する傾向がある。なおこの傾向はE_2/E_1 の小さい場合の方が大きく，$E_2/E_1>6$のところでは圧縮応力はほとんど変化しない。上盤あるいは下盤における引張応力は側壁の圧縮応力の傾向とはまつたく反対に，$\delta=0°\sim 45°$ のときにE_2/E_1の増加に伴つて一様に増大し，その増加率も$\delta=0$に近づくほど大となり，$\delta=45°\sim 90°$ ではその変化はあまり見られない。

(3) 坑道周辺に生ずる最大応力およびその位置について

つぎに（2.3.20）式をθについて微分し，その式を零とおいて解けば，つぎのように坑道周辺でσ_θ が最小（最大圧縮応力）および最大（最大引張応力）になる位置を求める式をうる。

$$\{(1-m)^4(1+m^2)^2\sin^2 2\delta-4m(1-m)^2\cos^2 2\delta\}\sin^4\theta$$

$$-\{m^2(1-m)^4(1+m^{*})\sin^2 2\delta-2m(1-m)^2\cos^2\delta\}\sin^2\theta$$

$$+m^2(1-m^2)\sin^2\delta=0 \qquad (2.3.23)$$

この式においてさきと同様に$E_2/E_1=2.4.6.8.10.$，$\delta=0°$，$22.5°$,$45°$，$67.5°$ $90°$ の値を用いて計算した結果を示すと，表−2.3.2（a），（b），（c），（d），（e）

および図－2.3.4のようである。図－2.3.4には最大引張応力σ_{tmax} および最大圧縮応力σ_{cmax}を生ずる位置とδとの関係が，E_2/E_1 をパラメーターとして図示されている。この図よりつぎのことが判る。主弾性係数の方向が荷重方向より傾く場合，その程度によつて最大応力の生ずる位置は変化するが，いずれのE_2/E_1 の値に対してもδが30°～45°の場合には，圧縮応力の生ずる位置が，またδが45°～60°の場合には，引張応力の生ずる位置が荷重方向およびそれに垂直な方向よりもつと大きく偏移する。しかしその偏移する角度はE_2/E_1 が大きいほど大きく，また$\delta=45°$のときには圧縮も引張もともに同じだけ偏移し，最大引張，圧縮応力はかなり接近した位置に生ずることになる。

3．2　素堀円形坑道の変形状態[29]

表－2.3.2　σ_{cmax}　σ_{tmax}　の位置

（a）　$\delta=0°$

E_2/E_1	θ_c	θ_t	α_c	α_t
2	90°	0	0	0
4	90°	0	0	0
6	90°	0	0	0
8	90°	0	0	0
10	90°	0	0	0

（b）　$\delta=22.5°$

E_2/E_1	θ_c	θ_t	α_c	α_t
2	14° 15′	－59° 40′	7° 50′	7° 15′
4	11° 45′	－50° 20′	17° 10′	15° 45′
6	9° 35′	－44° 40′	22° 50′	12° 55′
8	8° 30′	－40° 30′	27° 00′	14° 00′
10	8° 05′	－37° 25′	30° 05′	14° 25′

（c）　$\delta=45°$

E_2/E_1	θ_c	t_t	α_c	α_t
2	－35° 20′	35° 20′	9° 40′	9° 40′
4	－26° 30′	26° 30′	18° 30′	18° 30′
6	－22° 10′	22° 10′	22° 50′	22° 50′
8	－19° 35′	19° 35′	25° 25′	25° 25′
10	－17° 35′	17° 35′	27° 25′	27° 25′

(d)　　$\delta = 67.5^\circ$

E_2/E_1	θ_c	θ_t	α_c	α_t
2	−14° 15′	59° 40′	7° 15′	7° 50′
4	−11° 45′	50° 20′	10° 45′	17° 10′
6	− 9° 35′	44° 40′	12° 55′	22° 50′
8	− 8° 30′	40° 30′	14° 00′	27° 00′
10	− 8° 05′	37° 25′	14° 25′	30° 05′

(e)　　$\delta = 90^\circ$

E_2/E_1	θ_c	θ_t	α_c	α_t
2	0°	90°	0°	0°
4	0	90	0	0
6	0	90	0	0
8	0	90	0	0
10	0	90	0	0

従来より地山を等質の弾性体とみなすことにより坑道の変形についての理論的な研究がなされてきている。また最近小田[30]はrheologyの立場より地山を粘弾性体とみなした場合のトンネルの変形挙動について報告されているが，この場合も地山は等方等質であり，その終極においては弾性的変位と一致する。このように地山状態が等方等質であることは実際にはきわめてまれであり，かなり複雑な様相を呈することは以前より指摘されている通りである。それでここではさらに実際的な岩盤および地層の性質を考慮し，とくに成層状態にともなう地山の弾性性質の異方性がいかに坑道周辺の変形状態に影響をおよぼすかを理論的に考察した。

ここでは地山として一般的な等質直交異方性弾性体を考えるが，積層状の地山の場合でも層間に相対変位を生ずることのない場合には，地山全体としての等値主弾性係数を考慮することにより等質直交異方性の場合と同様に取扱うことができる。

孔周辺の応力に対しては円孔または楕円孔を有する直交異方性板が一様に引張りをうけている場合の池田[31]の解があるが，これは荷重方向が弾性主軸の方向と一致する場合に対するものである。また *S.G.Lechnizki*，[32]はさらに一般的な場合の円孔周辺応力に対する厳密解を与えており，その解を用いてG.Sonntag[33]は坑道周辺応力状態におよぼす地山の異方性の影響について種々の考察を行つている。著者もG.*N.*Sawin，[34]の与えている弾性基礎方程式を適用して一般的な状態に対する円孔周辺応力を算出し，上記のものと同様な結果を得た。しかし坑道周辺の変位に関する理論計算はあまり見られず，G.Sonntag，が地山の主弾性係数の方向が地山荷重の方向と一致する場合に対してG.N.Sawin.により計算された応力式を用いて

坑道周辺の変位量を求めているのを知るだけである。それゆえ著者は一般的に地山荷重が直交異方性地山の弾性主軸と任意の傾きをなして作用する場合に対して，Muschelishvili の複素関数を用いて導かれた応力式にふくまれる２つの解析関数で境界条件を満足するものを変位の一般式に導入することにより，坑道近傍および周縁の変位式を算出し，さらに特別な場合として地山荷重が主弾性係数の方向に２軸的に作用した場合の坑道の変位量を示す式を求めた。

さらにこれらの変位式を用いて種々の主弾性係数比，弾性主軸の方向および鉛直，水平方向地山荷重比などに対して数値計算を行い，それらの結果を図示するとともに坑道周縁の変位状態や坑道の変位量に及ぼす地山の異方性の影響について考察した。

(1) 直交異方性弾性体における変位式

いま３．１の場合と同様に図−2.3.1に示すごとく座標軸を弾性主軸に選び，任意方向に地山荷重pが作用する場合を考えると（1.3.1 6）式より各成応力は２つの解析関数 $\varphi(z_1)$ および $\psi(z_2)$ によってつぎのように表わされる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2Re\,[\,s_1^2\varphi'(z_1) + s_2^2\psi'(z_2)\,] \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2Re\,[\,\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)\,] \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2Re\,[\,s_1\varphi'(z_1) + s_2\psi'(z_2)\,]
\end{aligned}
\right\}
$$

いまx，y方向の変位をu（x，y），およびv（x，y）で表わせば，この場合弾性主軸の方向がx，y軸と一致するから，平面問題における各ヒズミ成分は（1.3.1）式より次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\tau_{xy}
\end{aligned}
$$

（2.3.2 5)式に（2.3.2 4）式の σ_x，σ_y の値を代入し積分すれば，u（x，y）およびv（x，y）はつぎのようにえられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
u(x, y) &= 2Re\,[\,p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)\,] - \gamma_0 y + \alpha_0 \\
v(x, y) &= 2Re\,[\,q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)\,] + \gamma_0 x + \beta_0
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.3.2\,6)
$$

上式において

$p_1 = a_{11}s_1^2 + a_{12}$，　$p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12}$

$$q_1=(a_{12}\,s_1^2+a_{22})/s_1\ ,\quad q_2=(a_{12}\,s_2^2+a_{22})/s_2 \qquad (2.3.2\,7)$$

であり，また $(-\gamma_0 y+\alpha_0)$ および $(\gamma_0 x+\beta_0)$ は物体全体の固定変位を生ずる項であつて，ここで考える坑道の変形に対して考慮しなくてもよい。

(2) 円孔を有する異方性弾性地山中の変位

さて図－2.3.1に示されるような地山荷重状態に対する2つの解析関数 $\varphi(z_1)$ および $\psi(z_2)$ は2，1で求められたごとく，次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z_1)&=Bz_1+\varphi_0(z_1)\\ \psi(z_2)&=(B'+iC')z_2+\psi_0(z_2)\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.2\,8)$$

上式で係数B B′ およびC′ はつぎのようである。

$$\left.\begin{aligned}B&=-p\frac{\cos^2\delta+\beta_2^2\sin^2\delta}{2(\beta_2^2-\beta_1^2)}\\ B'&=p\frac{\cos^2\delta+\beta_1^2\sin^2\delta}{2(\beta_2^2-\beta_1^2)}\\ C'&=-p\frac{\sin 2\delta}{4\beta_2}\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.2\,9)$$

また $\varphi_0(z_1)$ および $\psi_0(z_2)$ はつぎのようになる。

$$\varphi_0(z_1)=\frac{ipa^2(1-is_1)}{4(s_1-s_2)}\left\{\frac{(s_2\sin 2\delta+2\cos^2\delta)}{z_1+\sqrt{z_1^2-a^2(1+s_1^2)}}+\frac{i(2s_2\sin^2\delta+\sin 2\delta)}{z_1+\sqrt{z_1^2-a^2(1+s_1^2)}}\right\}$$

$$\psi_0(z_2)=-\frac{ipa^2(1-is_2)}{4(s_1-s_2)}\left\{\frac{(s_1\sin 2\delta+2\cos^2\delta)}{z_2+\sqrt{z_2^2-a^2(1+s_2^2)}}+\frac{i(2s_1\sin^2\delta+\sin 2\delta)}{z_2+\sqrt{z_2^2-a^2(1+s_2^2)}}\right\}$$

(2.3.2 8.) を (2.3.2 4) 式に代入すれば、この場合の応力成分式は

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-p\cos^2\delta+2Re\left[s_1^2\varphi_0'(z_1)+s_2^2\psi_0'(z_2)\right]\\ \sigma_y&=-p\sin^2\delta+2Re\left[\varphi_0'(z_1)+\psi_0'(z_2)\right]\\ \tau_{xy}&=-p\sin\delta\cos\delta-2Re\left[s_1\varphi_0'(z_1)+s_2\psi_0'(z_2)\right]\end{aligned}\right. \qquad (2.3.3\,1)$$

となる。(2.3.2 6) 式に (2.3.3 1) 式を代入し，(2.3.2 7) 式を考慮すれば，この場合の変位成分u (x，y) およびv (x，y) は次式で与えられる。

$$u(x,y)=-p\,(-a_{11}\beta_1^2+a_{12})\left[\frac{\cos^2\delta+\beta_2^2\sin^2\delta}{(\beta_2^2-\beta_1^2)}x-\frac{a(1+\beta_1)}{2(\beta_1+\beta_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right.$$

$$\times\frac{a^{2(n-1)}(1-\beta_1^2)^{n-1}}{(x^2+\beta_1^2y^2)^{2n-1}}\left\{-a\sin 2\delta(1+\beta_2)\sum_{r=1}^{n}(-1)^r{}_{2n-1}C_{2r-1}\beta_1^{2r-1}\right.$$

$$\cdot x^{2n-2r}y^{2r-1}+2a(\cos^2\delta-\beta_2\sin^2\delta)$$

$$
\times \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r} {}_{2n-1}C_{2r}\beta_1^{2r}x^{2n-2r-1}y^{2r}\}] - p(-a_{11}\ \beta_2^2+a_{12})[-\frac{(\cos^2\delta+\beta_1^2\sin^2\delta}{(\beta_2^2-\beta_1^2\ )}\ x
$$

$$
-\frac{\sin 2\delta}{2}\ y+\frac{a(1+\beta_2)}{2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\cdots(2n-3)}{2.4\cdots 2n}\cdot\frac{a^{2(n-1)}\ (1-\beta_2^2)^{n-1}}{(x^2+\beta_2^2y^2)^{2n-1}}
$$

$$
\times\{-a\sin 2\delta(1+\beta_1)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}{}_{2n-1}C_{2r-1}\beta_2^{2r-1}\cdot
$$

$$
x^{2n-2r}y^{2r-1}+2a(\cos^2\delta-\beta_1\sin^2\delta)\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}{}_{2n-1}C_{2r}\beta_2^{2r}x^{2n-2r-1}y^{2r}\}]\quad(2.3.3\,2)
$$

$$
v(x,y)=-\frac{P(-a_{12}\beta_1^2+a_{22})}{\beta_1}\ [\frac{(\cos^2\delta+\beta_2^2\ \sin^2\delta)}{(\beta_2^2-\beta_1^2)}\ \beta_1\ y
$$

$$
-\frac{a(1+\beta_1)}{2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\cdots(2n-3)}{2.4\cdots 2n}\cdot\frac{a^{2(n-1)}\ (1-\beta_2^2)^{n-1}}{(x^2+\beta_1^2\ y^2)^{2n-1}}
$$

$$
\times\{a\sin 2\delta(1+\beta_2)\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r}{}_{2n-1}C_{2r}\beta_1^{2r}x^{2n-2r-1}y^{2r}
$$

$$
+2a(\cos^2\delta-\beta_2\sin^2\ \delta
$$

$$
\times\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}{}_{2n-1}C_{2r-1}\beta_1^{2r-1}x^{2n-2r}y^{2r-1}\}]
$$

$$
-\frac{p(-a_{12}\beta_2^2+a_{22}}{\beta_2}\ [-\frac{(\cos^2\delta+\beta_1^2\sin^2\delta)}{(\beta_2^2-\beta_1^2)}\ \beta_2 y
$$

$$
+\frac{\sin 2\delta}{2}\ x+\frac{a(1+\beta_2)}{2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3\cdots\cdots(2n-3)}{2.4\cdots\cdots 2n}\cdot
$$

$$
\times\frac{a^{2(n-1)}\ (1-\beta_2^2)^{n-1}}{(x^2+\beta_2^2y^2)^{2n-1}}\quad\{a\sin 2\delta\ (1+\beta_1)\sum_{r=0}^{n-1}
$$

$$
(-1)^{r}{}_{2n-1}C_{2r}\beta_2^{2r}\ x^{2n-2r-1}y^{2r}
$$

$$
+2a(\cos^2\delta-\beta_1\ \sin^2\delta)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}{}_{2n-1}C_{2r-1}\beta_2^{2r-1}\ x^{2n-2r}y^{2r-1}\}]\quad(2.3.3\,3)
$$

いま地山が等方等質あるいはそれに近い状態の場合は$\beta_1-\beta_2=0$あるいは$\beta_1-\beta_2\fallingdotseq 0$となるから，上式において［ ］内の各項の分母が零になるため計算できないように思われるが，上式の級数項を分解整理すれば（2.3.3 2）および（2.3.3 3）式は（$\beta_1-\beta_2$）に対して無関係な項と（$\beta_1-\beta_2$）の高次の項に分けることができる。その表示式は多少複雑になるので省略するが，とくに地山が等方等質の弾性体と見なせる場合，すなわち$\beta_1=\beta_2$のときの変位成分を求めるとつぎのようになる。なおこの場合は$a_{11}=a_{22}$である。

$$
u(x,y)=-px(a_{11}\cos^2\delta+a_{12}\sin^2\delta)-\frac{1}{2}py(a_{11}-a_{12})\sin 2\delta
$$

$$
-pa^2y\frac{\{(3a_{11}-a_{12}\ )x^2+(a_{11}+a_{12})y^2\}}{(x^2+y^2)^2}\ \sin 2\delta
$$

$$
-pa^2\ \frac{x}{2(x^2+y^2)^2}\ \{(5a_{11}\cos^2\delta-3a_{11}\sin^2\delta-a_{12})x^2
$$

$$+(a_{11}+3a_{12}\cos^2\delta-5a_{12}\sin^2\delta)y^2\}+pa^4\frac{(a_{11}-a_{12})}{2(x^2+y^2)^6}$$

$$\times\{(3x^8y+8x^6y^3+6x^4y^5-y^9)\sin2\delta$$

$$+(x^9-6x^5y^4-8x^3y^6-3xy^8)(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\}\qquad(2.3.34)$$

$$v(x,y)=-py(a_{12}\cos^2\delta+a_{22}\sin^2\delta)+\frac{1}{2}px(a_{12}-a_{22})\sin2\delta$$

$$-pa^2\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\{(a_{12}+a_{22})x^2-(a_{12}-a_{22})y^2\}\sin2\delta-pa\frac{y}{2(x^2+y^2)^2}$$

$$\times\{(5a_{12}\cos^2\delta-3a_{12}\sin^2\delta-a_{22})x^2+(a_{12}+3a_{22}\cos^2\delta-5a_{22}\sin^2\delta)y^2\}$$

$$-pa^4\frac{(a_{22}-a_{12})}{2(x^2+y^2)^6}\{(x^9-6x^5y-8x^3y^6-3xy^8)\sin2\delta$$

$$-(3x^8y+8x^6y^3+6x^4y^5-y^9)(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\}\qquad(2.3.35)$$

さらに地山荷重の方向がx軸と一致するときは$\delta=0$となり，平面応力の状態の場合を考えると，$a_{11}=a_{22}=1/E$，$a_{12}=-\nu/E$であるから，（2.3.34）式および（2.3.35）式より，

$$u(x,y)=-\frac{p}{2E}\Big[2x+\frac{a^2x}{(x^2+y^2)^2}\{(5+\nu)x^2+(1-3\nu)y^2\}-\frac{a^4}{(x^2+y^2)}(1+\nu)$$

$$\times(x^9-6x^5y^4-8x^3y^6-3xy^8)\Big]$$

$$=-\frac{p}{2E}\Big[2r\cos\varphi+\frac{1}{r}a^2\cos\varphi\{4(1+\nu)\cos^2\varphi+1-3\nu\}$$

$$-\frac{a^4}{r^3}(1+\nu)\cos\varphi(4\cos^2\varphi-3)\Big]\qquad(2.3.36)$$

$$v(x,y)=-\frac{p}{2E}\Big[-2\nu y+\frac{a^2y}{(x^2+y^2)^2}\{-(1+\nu)x^2+(3-\nu)y^2\}$$

$$-\frac{a^4}{(x^2+y^2)^6}(1+\nu)(3x^8y+8x^6y^3+6x^4y^5-y^9)\Big]$$

$$=-\frac{p}{2E}\Big[-2\nu r\cos\varphi+\frac{a^2}{r}\sin\varphi(1+5\nu-4(1+\nu)\sin^2\varphi\}$$

$$-\frac{a^4}{r^3}(1+\nu)(3-4\sin^2\varphi)\Big]\qquad(2.3.37)$$

なお上の（2.3.36）式および（2.3.37）式はたとえばS.Timoshenkoによる応力式[35)]を用いて求めた変位式と全く同一のものである。

(3) 素掘円形坑道周辺の変位

つぎに坑道周辺における変位を考えてみると周辺上では（2.3.30）式において次式：

$$\sqrt{z_1^2-a^2(1+S_1^2)}=\sqrt{(x+i\beta_1y)^2-a^2(1-\beta_1^2)}$$

$$=a(i\sin\theta-\beta_1\cos\theta)$$

$$\sqrt{z_2^2-a^2(1+S_2^2)}=\sqrt{(x+i\beta_2y)^2-a^2(1-\beta_2^2)}$$

$$=a(i\sin\theta+\beta_2\cos\theta)$$

が成り立つから，解析関数$\varphi_0\ (z_1)$ および$\psi_0\ (z_2)$ はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(z_1)_a &= \frac{pa}{4(\beta_1-\beta_2)}\left\{\frac{2(\cos^2\delta-\beta_2\sin^2\delta)+i(1+\beta_2)\sin 2\delta}{\cos\theta+i\sin\theta}\right.\\ \psi_0(z_2)_a &= \frac{pa}{4(\beta_1-\beta_2)}\left\{\frac{2(\cos^2\delta-\beta_1\sin^2\delta)+i(1+\beta_1)\sin 2\delta}{\cos\theta+i\sin\theta}\right\}\end{aligned}\right\}\quad(2.3.38)$$

上式を（2.3.2 6）式に代入して計算を行うと，素堀円形坑道の周辺におけるx方向およびy方向の変位は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}u_{r=a} &= -pa\{(1+\beta_1+\beta_2)a_{11}\cos^2\delta\cos\theta-\beta_1\beta_2 a_{11}\sin^2\delta\cos\theta\\ &\quad+\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+\beta_2^2)a_{11}\sin\theta\}\\ v_{r=a} &= -pa\{\frac{(1+\beta_1+\beta_2)}{2\beta_1\beta_2}a_{22}\sin 2\delta\cos\theta-\frac{1}{\beta_1\beta_2}a_{22}\cos^2\delta\sin\theta\\ &\quad+\frac{\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2}a_{22}\sin\delta\sin\theta\}\end{aligned}\right\}\quad(2.3.39)$$

さらに上式を用いて坑道周辺における半径方向および切線方向の変位u_r およびu_θ を求めると次式をうる。

$$\begin{aligned}u_r &= -pa[\{(1+\beta_1+\beta_2)\cos^2\delta-\beta_1\beta_2\sin^2\delta\}a_{11}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\{(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+\beta_2^2)a_{11}\\ &\quad+\frac{(1+\beta_1+\beta_2)\beta_1\beta_2+\beta_1^2}{\beta_1^2\beta_2^2}a_{22}\}\sin 2\delta\sin\theta\cos\theta\\ &\quad+\frac{1}{\beta_1\beta_2}\{-\cos^2\delta+(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin^2\delta\}a_{22}\sin^2\theta]\end{aligned}\quad(2.3.40)$$

$$\begin{aligned}u_\theta &= -pa[\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\beta_1+\beta_2)\beta_1\beta_2+\beta_1^2}{\beta_1^2\beta_2^2}a_{22}\sin 2\delta\cos^2\theta\\ &\quad+\{-((1+\beta_1+\beta_2)\cos^2\delta-\beta_1\beta_2\sin^2\delta)a_{11}\\ &\quad+\frac{1}{\beta_1\beta_2}(-\cos^2\delta+(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin^2\delta)a_{22}\}\\ &\quad\times\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+\beta_2^2)a_{11}\sin 2\delta\sin^2\theta]\end{aligned}\quad(2.3.41)$$

（2.3.4 0）式および（2.3.4 1）式におけるβ_1，β_2は（2.3.1 9）式で与えられるごとく，地山の異方性によつて異なつてくる。この場合ポアッソン比νの影響は地山材料の弾性係数の影響よりも一層小さいから，計算を容易にするために$\nu=0$とおいて結果を比較しても差支えないと思われる。

いま$\nu=0$と仮定すれば平面ひずみおよび平面応力状態に対して，$\beta_1=1$，$\beta_2=\sqrt{E_1/E_2}$となるから，（2.3.4 0）式および（2.3.4 1）式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{pa}{E_1E_2}[\{2E_2\cos^2\delta+\sqrt{E_1E_2}(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\}\cos^2\theta\\ &\quad+(E_1+2\sqrt{E_1E_2}+E_2)\sin 2\delta\sin\theta\cos\theta\\ &\quad+\{2E_1\sin^2\delta-\sqrt{E_1E_2}(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\}\sin^2\theta]\end{aligned}\quad(2.3.42)$$

$$u_\theta = -\frac{pa}{E_1E_2}\Big[(0.5E_1+\sqrt{E_1E_2}+0.5E_2)\sin 2\delta\cos^2\theta$$
$$+\{(-2\sqrt{E_1E_2}+E_2)\cos^2\delta+2(\sqrt{E_1E_2}+E_1)\sin^2\delta\}\sin\theta\cos\theta$$
$$-(0.5E_1+\sqrt{E_1E_2}+0.5E_2)\sin 2\delta\sin^2\theta \qquad (2.3.43)$$

いま地山が等方等質の弾性体とみなされるときには，上式で $E_1=E_2=E$ とおいて次式をうる。

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -\frac{pa}{E}\big[(3\cos^2\delta-\sin^2\delta)\cos^2\theta+4\sin 2\delta\sin\theta\cos\theta \\ &\quad +(3\sin^2\delta-\cos^2\delta)\sin^2\theta \\ u_\theta &= -\frac{pa}{E}\big[2\sin 2\delta\cos^2\theta-4(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\sin\theta\cos\theta-2\sin 2\delta\sin^2\theta \end{aligned}\right\} \quad (2.3.44)$$

さらに $\delta=0$ とおけば地山荷重が x 方向に作用する場合であつて，つぎのごとく S.Timosh-enko による応力式から求めたものと一致する。

$$u_r=-\frac{pa}{E}(2\cos 2\theta+1),\quad u_\theta=\frac{2pa}{E}\sin 2\theta \qquad (2.3.45)$$

つぎに地山荷重の方向が主弾性係数の方向（x 軸および y 軸方向）と一致する場合を考える。この場合には（2.3.42）式および（2.3.43）式において $\delta=0^\circ$ あるいは $\delta=90^\circ$ とおけばよく，$\delta=0$ の場合は図－2.3.5（a）のごとく鉛直方向（y 軸方向）に荷重が作用する場合であつて，変位式はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -\frac{pa}{E_1E_2}\{(2E_2+\sqrt{E_1E_2})\cos^2\theta-\sqrt{E_1E_2}\sin^2\theta\} \\ u_\varphi &= \frac{2pa}{E_1E_2}(\sqrt{E_1E_2}+E_2)\sin\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (2.3.46)$$

また $\delta=90^\circ$ の場合は図－2.3.5（b）のごとく水平方向（x 軸方向）に荷重が作用する場合であり，変位式は，

$$\left.\begin{aligned} u_r &= -\frac{pa}{E_1E_2}\{-\sqrt{E_1E_2}\cos^2\theta+(2E_1+\sqrt{E_1E_2})\sin^2\theta\} \\ u_\theta &= -\frac{2pa}{E_1E_2}(\sqrt{E_1E_2}+E_1)\sin\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (2.3.47)$$

したがつて一般に弾性主軸が鉛直および水平方向にあり，それぞれの方向に地山荷重 p および q が作用するときの坑道周辺における変位式は次式で与えられる。

$$u_r=-\frac{a}{E_1E_2}\big[\{2pE_2+\sqrt{E_1E_2}(p-q)\}\cos^2\theta+\{2qE_1-\sqrt{E_1E_2}(p-q)\}\sin^2\theta\big]$$
$$u_\theta=\frac{2a}{E_1E_2}\big[\sqrt{E_1E_2}(p-q)+pE_2-qE_1\big]\sin\theta\cos\theta \qquad (2.3.48)$$

ゆえにこの場合にはつぎのような上下盤間および側壁間の直径の変化を生ずる（図－2.3.5参照）

$$\Delta\overline{AA}=-\frac{4pa}{E_1}-\frac{2a}{\sqrt{E_1E_2}}(p-q) \qquad (2.3.49)$$

$$\triangle\overline{BB} = -\frac{4pa}{E_1^2} + \frac{2a}{\sqrt{E_1 E_2}}(p-q)$$

このように主弾性係数が鉛直および水平方向をとり，かつ地山荷重が鉛直方向に作用する場合（図−2.3.5（a），$\delta = 0^\circ$ の場合）に対してG.Sonntag,[36] はつぎのようにして上盤Aおよび側壁Bの変位を求めている。まず上盤Aの変位は，

$$(u_r)_A = -\frac{pa}{E_1} - \frac{1}{E_1}\int_{r=a}^{\infty}[p - \sigma_r(\theta=0^\circ)]dr \tag{2.3.50}$$

上式において最初の項はトンネルが穿たれる前の半径aの短縮（すなわちA点の変位）に当り，積分の項は坑道の開削による影響を与える。また側壁Bの変位（水平半径の増加）はつぎのようになる。

$$(u_r)_B = \frac{1}{E_2}\int_{r=a}^{\infty}\sigma_r(\theta=90^\circ)dr \tag{2.3.51}$$

（2.3.5 0），（2.3.5 1）式においてσ_r はG.N.Sawin によってつぎのように計算されている。

$$\sigma_r(\theta=0^\circ) = p + \frac{pa}{\beta_1 - \beta_2}\Big\{\frac{\beta_1^2}{a(1-\beta_1)}\Big(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2(1+\beta_1^2)}}\Big) - \frac{\beta_2^2}{a(1-\beta_2)}\Big(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2(1+\beta_2^2)}}\Big)$$

上式を（2.3.5 0）式および（2.3.5 1）式は代入して積分すれば，$\nu = 0$に対して鉛直および水平方向の直径の変化はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\triangle\overline{AA} &= -\frac{2pa}{E_1}\Big(2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\Big)\\ \triangle\overline{BB} &= \frac{2pa}{\sqrt{E_1 E_2}}\end{aligned}\right\} \tag{2.3.53}$$

上式は（2.3.4 6）式の変位式より特別な場合（$\theta = 0^\circ$）および90°）として求められるものにほかならない。測定された変形量から地山荷重を推定する場合に便利なように（2.3.4 9）の才1式を変形すると，

$$\frac{p}{E_1}\cdot\frac{2a}{\triangle AA} = \frac{-1}{\Big\{2 + \Big(1 - \frac{q}{p}\Big)\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}} \tag{2.3.54}$$

さらに水平方向と鉛直方向径の変化量の比を求めればつぎのようになり，その比△BB／△AA を測定することにより地山荷重の比q／pを推定することができる。

$$\frac{\triangle\overline{BB}}{\triangle\overline{AA}} = \frac{-2q/p\cdot\sqrt{E_1/E_2} + (1-q/p)}{-2\sqrt{E_2/E_1} - (1-q/p)} \tag{2.3.55}$$

(4) 計算結果およびその考察

つぎに種々の主弾性係数比およびその方向を与えて計算した結果を述べる。計算に用いられた主弾性係数比は

$$E_1/E_2 = 1/10,\ 1/8,\ 1/6,\ 1/4,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,$$

であり，そのおのおのについて荷重方向と主弾性係数 E_1 の方向（x 軸方向）とのなす角 δ を

$$\delta = 0^\circ,\ 22.5^\circ,\ 45^\circ,\ 67.5^\circ,\ 90^\circ$$

にとつて，地山荷重 p が鉛直方向に作用する場合を考える。これらの値を用いて β_1 および β_2 をもとめ，さらに（2.3.4 0）式および（2.3.4 1）式より素堀円形坑道周辺の半径，切線方向の変位を算出するとつぎのようである。いま 2.3 の場合にたいする周辺の変位状態を図示すると図－2.3.6（a），（b），（c）のようである。図－2.3.6 には E_1/E_2 = 1，2，10 の場合が対比して示されており，これらの図からつぎのことが明らかになる。

一般に主弾性係数比が大きいほど半径，切線方向変位とも増加する。この場合主弾性係数の方向 δ に対しても変位量は大いに影響される。$\delta = 90^\circ$ に近づくほど，すなわち小さい方の主弾性係数の方向が地山荷重の方向に近づくほど変位量はいちじるしく大きくなり，E_1/E_2 の増大にともなう変位量の増加の傾向もまた大きくなる。これらの変位量におよぼす地山の異方性の影響をさらに明らかにするために，半径方向変位 $u_r \cdot E_1/pa$ および切線方向変位 $u_\theta \cdot /pa$ と坑道周辺の各点（主弾性係数 E_1 からの角度 θ で表わす ※）との関係を $\delta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の場合について E_1/E_2 をパラメーターとして図示すれば，図－2.3.7（a），（b）のようである。さらに坑道周辺上の各点（$\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$）における変位量と主弾性係数の方向 δ との関係を E_1/E_2 をパラメーターとして図示すれば図－2.3.8（a），（b）のようになる。図－2.3.8 より判るごとく荷重方向と垂直な位置にある坑道周辺の点（この場合は坑道側壁，$\varphi = 0^\circ, 180^\circ$）における半径方向変位 u_r は主弾性係数の方向 δ には無関係に一定であり，ただ地山の主弾性係数比 E_1/E_2 の値によつてのみ変化する。しかしこの点の半径方向変位量は E_1/E_2 の値の変化に対してもほかの部分ほど大きな変化は示さない。これに反して $\varphi = 90^\circ$ の位置（上下盤）における u_r は E_1/E_2 が大きいほど，なおかつ δ が増大するほど急激に増加することはこの図から一層はつきりされる。また切線方向変位 u_θ については，φ が 45° および

※ 坑道の水平直径の位置からの角度 φ との関係を示すべきであるが，図中の曲線が重なるため，変位量の変化する傾向を見やすくするために θ に対する関係を図示した。

135° 付近でほかの部分よりも変位量が大きく，その値はさきと同様に E_1/E_2 および δ の増加によつてかなり増加する。ここでとくに興味あるのは坑道側壁および上下盤における切線向変位量がいずれの δ に対しても大きさ等しく符号反対の値を示すことであり，さらにその値は $\delta = 45^\circ$ の場合に最大となる。

つぎに主弾性係数の方向が鉛直および水平方向をとり，鉛直および水平に地山荷重 p および q が作用場合に対して鉛直直径の変化 $\Delta\overline{AA}$ と荷重比 q／p の関係を（2.3.5 4）式より求め，さらに水平直径と鉛直直径の変化の比 $\Delta\overline{BB}/\Delta\overline{AA}$ と荷重比 q／p との関係を（2.3.5 5）式より計算して，それらの結果を E_1/E_2 をパラメーターとして図示すればそれぞれ図－2.3.9 および図－

2.3.10のようになる。この場合直径の短縮を負にとつている。図－2.3.10によればこのような場合鉛直方向の主弾性係数が水平方向のそれよりも大きいほど上下盤の変形量に対して側壁の変化量は大きく，とくに水平方向荷重が増大すれば側壁の坑道空間への移動は極度に大きくなることが判る。

以上で直交異方性地山における 坑道 周辺の変位に対する式を導き，さらに特別な場合として主弾性係数の方向に作用する2軸的な地山荷重による 坑道 の変形に対する式を算出した。その後種々の主弾性係数比およびその方向を与えて数値計算を行ない，それらの結果より坑道周辺の変位におよぼす地山状態の異方性の影響について考察した。ここで行つた数値計算では計算を容易に行うために$\nu=0$と仮定したが，νの影響は地山の弾性係数の影響よりも小さく思われ，また地山の異方性の変化による変位状態の変化傾向を知る上にも$\nu=0$とおいてさしつかえないと考えられる。しかし実際にνおよびGの値が地山材料に対して与えられている場合でも上に導いた式より同様に計算することができる。

3．3　巻立坑道の周辺応力状態

地山を等方等質の完全弾性体と仮定した場合の巻立坑道の周辺応力状態については，オ2章において，円形および楕円形坑道に対するいくつかの解を示し，その応力状態を考察したが，ここでは異方性地山内の巻立坑道について考える。まず図－2.3.11のように坑道中心に原点をとり，水平方向にx軸，鉛直方向にy軸をとり，それらが弾性主軸（E_1，E_2）の方向と一致すると仮定し，さらに楕円形（半径a，b）の坑道の対称軸とも一致する場合を考える。この場合地山の初期応力状態としては一般にx軸方向とδなる角をなして一軸方向に等分布荷重pのみが作用するものとする。

図－2.3.11に示すような状態における坑道周縁の応力分布を求めるのに，つぎのような2つの場合を考える。すなわちオ1は開削された坑道が強固な覆工によつて巻立てられ，その覆工が変形しないような状態を仮定した場合であり，オ2章の完全弾性体としての地山内の巻立坑道に対して，N.MusChelishvili や Yi-YuanYu が行つた仮定と同じものである。この状態は一つの極端な場合であるが，計算が比較的容易に行われうる。オ2は通常の状態通りに，弾性的な覆工が施された場合の坑道応力状態である。この場合の完全弾性地山における円形坑道応力についてはオ2章2．2（3）において地山と覆工との間の附着に対して2種の状態を考慮しているが，ここでは覆工と地山との間の附着が完全である場合についてのみ考えている。

(1) 覆工を固定環と仮定した場合

(i) 基　本　式

図－2.3.11のごとく坑道断面を楕円形と考え，それに施された覆工が強固で固定環（$E=\infty$）と仮定される場合について考える。この場合覆工は位置を変化するか，ある角εだけ回転するが，覆工全体としての変位はその周囲の応力状態に変化を及ぼさないから考慮する必要はない。

x方向およびy方向の変位成分を$u(x, y)$，$v(x, y)$とすれば，これらは(1.3.17)

式より応力関数に相当する２つの解析関数$\varphi(z_1)$および$\psi(z_2)$でつぎのように与えられる。

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= 2Re\,[p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)] \\ v(x,y) &= 2Re\,[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)] \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.5\,6)$$

上式において

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= a_{11}s_1^2+a_{12}, \quad p_2 = a_{11}s_2^2+a_{12} \\ q_1 &= \frac{a_{12}s_1^2+a_{22}}{s_1}, \quad q_2 = \frac{a_{12}s_2^2+a_{22}}{s_2} \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.5\,7)$$

この場合の境界条件としては楕円孔周辺Lにおいて変位が与えられている場合を考えねばならないから，才１篇，才３章，３．１で述べたような才２種境界値問題である。すなわち関数$\varphi(z_1)$および$\psi(z_2)$に対する境界条件はつぎの形をとる。

$$\left.\begin{aligned} 2Re\,[p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)] &= g_1(s) \\ 2Re\,[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)] &= g_2(s) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.5\,8)$$

一般に孔周辺に作用する外力の合力が零にならず，無限遠において均一な応力状態が与えられている場合には関数$\varphi(z_1)$および$\psi(z_2)$はつぎのような形をとる。

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z_1) &= A\cdot\ln z_1+Bz_1+\varphi_0(z_1) \\ \psi(z_2) &= B\cdot\ln z_2+(B'+iC')z_2+\psi_0(z_2) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.5\,9)$$

上式でB, B', C'は（2.3.5）式で与えられ！AおよびBは次式より求められる。[37]

$$\left.\begin{aligned} (1-is_1)A-(1-i\bar{s}_1)\bar{A}+(1-is_2)B-(1-i\bar{s}_2)\bar{B} &= \frac{X-iY}{2\pi} \\ (p_1-iq_1)A-(\bar{p}_1-i\bar{q}_1)\bar{A}+(p_2-iq_2)B-(\bar{p}_2-i\bar{q}_2)\bar{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.6\,0)$$

楕円孔の半径をaおよびbとし，つぎのような関数，

$$z=\omega(\zeta)=\frac{a-b}{2}\zeta+\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{\zeta} \qquad (2.3.6\,1)$$

を用いて，楕円孔の外部を単位円の内部に写像する。さらに$\Phi(\zeta)=\varphi[\omega_1(\zeta)]$，$\Psi(\zeta)=\psi[\omega_2(\zeta)]$で表わすものとすると，（2.3.5 9）式の$\varphi(z_1)$および$\psi(z_2)$を境界条件（2.3.5 8）式に代入し，その両辺に$\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma}$をかけて単位円$\gamma$に沿つて積分することにより次式をうる。

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{4\pi(p_1q_2-p_2q_1)}\int_\gamma[p_2g_2^0(\theta)-q_2g_1(\theta)]\frac{\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$\Phi(\zeta) = -\frac{1}{4\pi(p_1 q_2 - p_2 q_1)} \int_\gamma [p_1 g_2^o(\theta) - q_1 g_1^o(\theta)] \frac{\sigma+\zeta}{\sigma+\zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} \quad (2.3.6\,2)$$

上式で $g_1^o(\theta)$ および $g_2^o(\theta)$ は既知の関数で，

$$\left.\begin{aligned} g_1^o(\theta) &= g_1(\theta) - 2\mathrm{Re}[Ap_1 \ln z_1 + Bp_1 z_1 + Bp_2 \ln z_2 + p_2(B' + iC' z_2)] \\ g_2^o(\theta) &= g_2(\theta) - 2\mathrm{Re}[Aq_1 \ln z_1 + Bq_1 z_1 + Bq_2 \ln z_2 + q_2(B' + iC' z_2)] \end{aligned}\right\} \quad (2.3.6\,3)$$

（2.3.6 2）式が求まれば，（2.3.1 6）式より算出されたつぎの関係，

関数 Φ（ζ）の変数 ζ に対して：

$$\zeta = \frac{a - i s_1 b}{z_1 + \sqrt{z_1 - (a^2 + s_1^2 b^2)}}$$

関数 Ψ（ζ）の変数 ζ に対して：

$$\zeta = \frac{a - i s_2 b}{z_2 + \sqrt{z_2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}}$$

を用いて，変数 ζ を z_1 および z_2 に戻すことによつて関数 φ_0（z_1）および ψ_0（z_2）がえられ，これらを（2.3.5 9）式に代入すれば φ（z_1）および ψ（z_2）の最終的な形をえて，問題が解けたことになる。

(ii) 坑道周辺応力式

図－2.3.1 1に示したごとく楕円形固定覆工を有する異方性の弾性地山が無限遠において一方向に p なる等分布荷重をうける場合は，さきにも述べたように固定覆工の回転による周縁変位のみを考えればよい。いま回転角を ε とすれば，周辺変位はつぎのようになる。

$$u = -\varepsilon y, \quad v = \varepsilon x \quad (2.3.6\,5)$$

この場合は外力の合力は零であるから一般的な場合に対する式（2.3.5 9）および（2.3.6 3）式において A＝B＝0となり（2.3.6 3）式はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} g_1^o &= -\varepsilon y - 2R_e[Bp_1 z_1 + p_2(B' + iC')z_2] \\ g_2^o &= \varepsilon x - 2R_e[Bq_1 z_1 + q_2(B' + iC')z_2] \end{aligned}\right\} \quad (2.3.6\,5)$$

（2.3.6 2）式において $g_1(\theta)$ 及び $g_2(\theta)$ の代りに（2.3.6 6）式で求められる g_1^o 及び g_2^o を代入すれば，Φ_0（ζ）及び $\Psi_0(\zeta)$ がつぎのような形で得られる。

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= -(P_1 \varepsilon + Q_1)\zeta \\ \Psi_0(\zeta) &= (P_2 \varepsilon + Q_2)\zeta \end{aligned}\right\} \quad (2.3.6\,7)$$

ここで

$$P_1 = \frac{ap_2+ibq_2}{2(p_1 q_2-p_2 q_1)}, \quad P_2 = \frac{ap_1+ibq_1}{2(p_1 q_2-p_2 q_1)}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2(p_1 q_2-p_2 q_1)} [B\{(a+is_1 b)(p_1 q_2-q_1 p_2)+(a+i\bar{s}_1 b)(\bar{p}_1 q_2-\bar{q}_1 p_2)\}$$

$$+(B'-iC')(a+i\bar{s}_2 b)(\bar{p}_2 q_2-\bar{q}_2 p_2) \qquad (2.3.6\,8)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2(p_1 q_2-p_2 q_1)} [B\{(a+i\bar{s}_1 b)(\bar{p}_1 q_1-\bar{q}_1 p_1)\}+(B'+iC')(a+is_2 b)$$

$$(p_2 q_1-p_1 q_2)+(B'-iC')(a+i\bar{s}_2 b)(\bar{p}_2 q_1-\bar{q}_2 p_1)]$$

したがつて（2.3.5 9）式の関数 $\varphi(z_1)$ 及び $\psi(z_2)$ は，

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z_1) &= Bz_1 - \frac{(P_1\varepsilon+Q_1)(a-is_1 b)}{z_1+\sqrt{z_1^2-(a^2+s_1^2 b^2)}}\\ \psi(z_2) &= (B'+iC')z_2+\frac{(P_2\varepsilon+Q_2)(a-is_2 b)}{z_2+\sqrt{z_2^2-(a^2+s_2^2 b^2)}}\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.6\,9)$$

最終的に $\varphi(z_1)$ 及び $\psi(z_2)$ を決定するには楕円形覆工の回転角 ε を求める必要がある。この角は周囲の材料から覆工に作用するところの力のモーメントが零であるという条件よりでてくる。すなわち楕円孔の周辺を廻るとき，

$$2Re\,[F_1(z_1)+F_2(z_2)] \qquad (2.3.7\,0)$$

の増加が零であることが必要である。ここで $F_1(z_1)=\int_{L(1)}\varphi(z_1)dz_1$，$F_2(z_2)=\int_{L(2)}\varphi(z_2)dz_2$ であつて，（2.3.7 0）式を零とおけば次式をうる。

$$2Re\{(P_1\varepsilon+Q_1)(a-is_1 b)i-(P_2\varepsilon+Q_2)(a-is_2 b)i\}=0$$

したがつて，

$$\varepsilon = \frac{Re\,[i\{Q_2(a-is_2 b)-Q_1(a-iS_1 b)\}]}{Re\,[i\{P_1(a-is_1 b)-P_2(a-iS_2 b)\}]} \qquad (2.3.7\,1)$$

（2.3.7 1）式より求められる ε を（2.3.6 9）式の $\varphi(z_1)$ および $\psi(z_2)$ の中に入れれば，その最終的な式が求まる。

つぎに上に導かれた各式を用いて固定の円形覆工を有する場合につき円孔周辺の応力を計算してみる。まず（2.3.7 1）式より ε の値を求める。この場合 $a=b$ であり，$S_1=i\beta_1$，$s_2=i\beta_2$ で与えられるから，$|q_1|=Re\,[q_1]$，$|q_2|=Re\,[q_2]$ で表わせば，（2.3.7 1）式中の P_1，P_2，Q_1，Q_2 はつぎのようになる。

$$P_1=-i\frac{a}{2}\cdot\frac{p_2-|q_2|}{p_1|q_2|-p_2|q_1|}, \quad P_2=-i\frac{a}{2}\cdot\frac{p_1-|q_1|}{p_1|q_2|-p_2|q_1|}$$

$$Q_1=\frac{a}{(p_1|q_2|-p_2|q_1|)}[(p_1|q_2|+\beta_1 p_2|q_1|)B+(1+\beta_2)p_2|q_2|(B'-iC')]$$

$$Q_2 = \frac{a}{(p_1|q_2| - p_2|q_1|)}[(1+\beta_1)p_1|q_1|B + (p_2|q_1| + \beta_2 p_1|q_1|)B' - i(p_1|q_2| + \beta_2|q_1|)C']$$

したがつて

$$\varepsilon = \frac{2(1+\beta_2)C'[p_1|q_2| + \beta_2 p_2|q_1| - (1+\beta_1)p_2|q_2|]}{(p_2 - |q_2|)(1+\beta_1) - (p_1 - |q_1|)(1+\beta_2)} \qquad (2.3.73)$$

ここで計算を簡単にするために $\nu_1 = 0$ と仮定すると $a_{12} = 0$ となり，また $\beta_1 = 1$，$\beta_2 = \sqrt{E_1/E_2}$ となつて，(2.3.73) 式はつぎのような値になる。

$$\varepsilon = -\frac{2(\beta_2+1)^2(\beta_2^2-1)c'}{\frac{1}{a_{11}}\beta_2(2\beta_2+1) + \frac{1}{a_{11}}(\beta_2+2)} = p\frac{(\beta_2+1)^2(\beta_2^2-1)\sin\delta\cos\delta}{E_1(2\beta_2+1) + E_1(\beta_2^2+2\beta_2)} = p\frac{(\beta_2+1)^2(\beta_2^2-1)\sin\delta\cos\delta}{E_1(\beta_2^2+4\beta_2+1)} \qquad (2.3.74)$$

つぎに (2.3.69) 式よりこの場合の $\varphi'(z_1)$ および $\psi'(z_2)$ を求めると，

$$\begin{aligned}\varphi'(z_1) &= B + \varphi_0'(z_1) = B + (P_1\varepsilon + Q_1)(1+\beta_1)\frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2(1-\beta_1^2)}}{a(1-\beta_1^2)\sqrt{z_1^2 - a^2(1-\beta_1^2)}} \\ \psi'(z_2) &= B' + iC' + \psi_0'(z_2) = B' + iC' - (P_2\varepsilon + Q_2)(1+\beta_2)\frac{z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2(1-\beta_2^2)}}{a(1-\beta_2^2)\sqrt{z_2^2 - a^2(1-\beta_2^2)}}\end{aligned} \qquad (2.3.75)$$

となる。とくに円孔周辺上においてはつぎの関係

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{z_1^2 - a^2(1-\beta_1^2)} = ia(\sin\theta - i\beta_1\cos\theta) \\ &\sqrt{z_2^2 - a^2(1-\beta_2^2)} = ia(\sin\theta - i\beta_2\cos\theta) \\ &Z_1 = a(\cos\theta + i\beta_1\sin\theta),\ Z_2 = a(\cos\theta + i\beta_2\sin\theta)\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.76)$$

が成立するから，円孔周辺上では (2.3.75) 式はつぎのようになる。

$$\varphi'(z_1) = B - (P_1\varepsilon + Q_1)\frac{1}{a(\sin^2\theta + \beta_1^2\cos\theta)}\{(\sin^2\theta - \beta_1\cos^2\theta) + i(1+\beta_1)\sin\theta\cos\theta\}$$

$$\psi'(z_2) = B' + iC' + (P_2\varepsilon + Q_2)\frac{1}{a(\sin^2\theta + \beta_2^2\cos^2\theta)}\{(\sin^2\theta - \beta_2\cos^2\theta) + i(1+\beta_2)\sin\theta\cos\theta\} \qquad (2.3.77)$$

極座標系による応力成分は (2.3.15) 式で与えられるから，その式に (2.3.77) 式を代入して整理を行えば円孔周辺上における各成分応力は次式のように求められる。

$$\sigma_r = -p(\cos\delta\cos\theta + \sin\delta\sin\theta)^2 + \frac{2}{\beta_2^2+\beta_2+1}[\{(\beta_2^2+\beta_2-1)B + \beta_2 B'\}\sin^2\theta + \{(\beta_2^2-\beta_2-1)B - \beta_2^2 B'\}\cos^2\theta\{\frac{\beta_2\varepsilon}{2}(E_1-E_2) + (\beta_2+1)^2(\beta_2^2+1)C'\}\sin\theta\cos\theta] \qquad (2.3.78)$$

$$\sigma_\theta = -p(\cos\delta\sin\theta - \sin\delta\cos\theta)^2 - \frac{2}{(\beta_2^3-1)}\{(\beta_2^3+1)B + \beta_2^2(\beta_2+1)B'\}$$

$$+ \frac{2}{(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)(\beta_2^3-1)}[\{2\beta_2 B+\beta_2(\beta_2^2+1)B'\}\{\beta_2^2\sin^4\theta - (\beta_2^3-2\beta_2^2-2\beta_2+1)$$

$$\sin^2\theta\cos^2\theta+\beta_2\cos^4\theta\}+\{\frac{\beta_2\varepsilon}{2}(E_1-E_2)+(\beta_2^4+1)C'\}\{(\beta_2^2+\beta_2-2)\beta_2\sin\theta+$$

$$+(2\beta_2^2-\beta_2-1)\cos^2\theta\}\sin\theta\cos\theta \qquad (2.3.79)$$

$$\tau_{r\theta} = -p\{\sin\delta\cos\delta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\sin\theta\cos\theta\}$$

$$+\frac{2}{(\beta_2^2+\beta_2+1)}[\{2\beta_2 B+\beta_2(\beta_2^2+1)B'\}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\varepsilon F_1(1+\beta_2\sin^2\theta)$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon E_2(\beta_2^2+\beta_2\cos^2\theta)-(\beta_2^3-\beta_2^4\sin^2\theta-\cos^2\theta)C'] \qquad (2.3.80)$$

とくに荷重方向が弾性主軸の方向と一致するときには$\delta=0^\circ$あるいは$\delta=90^\circ$となるから，（2.3.74）式より明らかなように$\varepsilon=0$となり，覆工の回転は起らない。したがってこの場合には円孔周辺上での応力成分は一般に次式で与えられる。

$$\sigma_r = -p\cos^2\theta+\frac{2}{a}\{(Q_2-Q_1)\sin^2\theta+(Q_2\beta_2-Q_1\beta_1)\cos^2\theta\}$$

$$\sigma_\theta = -p\sin^2\theta+\frac{2}{a}\mathrm{Re}[\frac{\sin\theta+i\cos\theta}{\sin\theta-s_2\cos\theta}Q_2(s_2\sin\theta+\cos\theta)^2$$

$$-\frac{\sin\theta+i\cos\theta}{\sin\theta-s_1\cos\theta}Q_1(s_1\sin\theta+\cos\theta)^2] \qquad (2.3.81)$$

$$\tau_{r\theta} = p\sin\theta\cos\theta+\frac{2}{a}\mathrm{Re}[\{Q_2(s_2\sin\theta+\cos\theta)-Q_1(s_1\sin\theta+\cos\theta)\}(\sin\theta+i\cos\theta)]$$

上式においてQ_1およびQ_2は（2.3.72）式で与えられているものと同一である。

この場合（2.3.78）～（2.3.80）式中のB，F'，C'等は（2.3.11）で与えられているものと同じになるから，いま計算が簡単なために$\nu_2=0$と仮定すれば，円孔周辺上の応力成分はそれぞれつぎのように求められる。

$$\sigma_r = -p(\cos^2\delta\cos^2\theta+\sin^2\delta\sin^2\theta)-\frac{p}{\beta_2^2+\beta_2+1}[\{\cos^2\delta+\beta_2(\beta_2+1)\sin^2\delta\}\sin^2\theta$$

$$+\{(\beta_2+1)\cos^2\delta+\beta_2^2\sin^2\delta\}\cos^2\theta \qquad (2.3.82)$$

$$\sigma_\theta = -p(\cos^2\delta\sin^2\theta+\sin^2\delta\cos^2\theta)-\frac{p}{(\beta_2^3-1)}[(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\frac{\beta_2}{\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta}$$

$$\times\{-\beta_2\cos^4\theta+(\beta_2^3-2\beta_2^2-2\beta_2+1)\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$-\beta_2^2\sin^4\theta\}+(\cos\delta-\beta_2^3\sin^2\delta)] \qquad (2.3.83)$$

$$\tau_{r\theta} = p\sin\theta\cos\theta+\frac{p\cdot\beta_2}{\beta_2^2+\beta_2+1}(\cos^2\delta-\sin^2\delta)\sin\theta\cos\theta \qquad (2.3.84)$$

覆工のまわりの地山が等質等方の弾性体である場合には，$\beta_1=\beta_2=1$であり，

$a_{11}=a_{22}=1/E$, $a_{12}=-\nu/E$ となるから地山内の各成分応力は次式のようになる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{p}{2}\left[1+(1-2\nu)\frac{a^2}{r^2}+\left\{1+\frac{4}{(3-4\nu)}\cdot\frac{a^2}{r^2}-\frac{3}{(3-4\nu)}\cdot\frac{a^4}{r^4}\right\}\cos 2\theta\right] \\
\sigma_\theta &= \frac{p}{2}\left[1-(1-2\nu)\frac{a^2}{r^2}-\left\{1-\frac{3}{(3-4\nu)}\cdot\frac{a^4}{r^4}\right\}\cos 2\theta\right] \\
\tau_{r\theta} &= \frac{p}{2}\left\{1-\frac{2}{(3-4\nu)}\cdot\frac{a^2}{r^2}+\frac{3}{(3-4\nu)}\cdot\frac{a^4}{r^4}\right\}\sin 2\theta
\end{aligned}
\right\}
\quad (2.3.85)
$$

さらにこの場合で$\nu=0$と仮定したときの円孔周辺上の成分応力は上式において$\nu=0.$，$r=a$，と置いてつぎのようにえられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_r &= -p\left(1+\frac{2}{3}\cos 2\theta\right) \\
\sigma_\theta &= 0 \\
\tau_{r\theta} &= \frac{2}{3}p\sin 2\theta
\end{aligned}
\right\}
\quad (2.3.86)
$$

(iii) 数値計算結果およびその考察

つぎに種々の主弾性係数比および初期応力状態を与えて計算した結果について述べる。計算に用いられた地山の主弾性係数の1つは$E_2=5\times10^4$Kg/cm²で，主弾性係数比は

$E_1/E_2=1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$

であり，そのおのおのについて初期地圧の方向が主弾係数E_1の方向（x軸方向）とのなす角δを，

$\delta=0°$，22.5°，45°，67.5°，90°にとつて円形覆工と地山との接着部における成分応力の値を求めた。この場合は主弾性係数の方向を鉛直（y軸）および水平（x軸）方向と一致させてとり，荷重方向を変化させたが，荷重（初期地圧）の方向が鉛直方向で地山の異方性の主軸が傾斜している場合となんら異なるところはない。まずこれらの値よりβ_1およびβ_2を求め，それらの値を式に用い，それぞれの場合の固定円形覆工の回転角ϵを表－2.3.3のようにうる。この表よりも明らかなように円形覆工の回転角ϵは荷重方向が弾性主軸の方向から傾くほど大きくなり，$\delta=45°$の場合に最大になる。また主弾性係数比E_1/E_2が大きくなるほど大きくなることが判る。しかしいづれの場合にも回転角そのものは僅かであるので，後述の各成分応力の分布状態にたいしては覆工の回転を無視してその値を図示することにする。さてつぎに（2.3.5）式より常数B，B'，およびC'を求め，それらの値を（2.3.78）～（2.3.80）式に用いると，覆工と地山との境界線上の各成分応力がつぎのように求められる。いま2.3の場合に対する境界円周上の応力分布を図示すれば，図－2.3.12（a），（b），（c）（半径方向直応力σ_r），図－2.3.13（a），（b），（c）（切線方向直応力σ_θ）および図－2.3.14（a），（b），（c）（せん断応力$\tau_{r\theta}$）のようである（引張応力を⊕，圧縮応力を⊖で示す。）これらの図には$\delta=0°$，45°，90°に対して$E_1/E_2=$ 1，2，10の場合が対比

表－2.3.3　　　　　ε の 値

E_1/E_2	$\delta=0^\circ$	$\delta=22.5^\circ$	$\delta=45^\circ$	$\delta=67.5^\circ$	$\delta=90^\circ$
2	0	2.38×10^{-6}	3.367×10^{-6}	2.380×10^{-6}	0
4	0	3.672×10^{-6}	5.192×10^{-6}	3.670×10^{-6}	0
6	0	4.176×10^{-6}	5.905×10^{-6}	4.176×10^{-6}	0
8	0	4.464×10^{-6}	6.314×10^{-6}	4.464×10^{-6}	0
10	0	4.662×10^{-6}	6.597×10^{-6}	4.662×10^{-6}	0

して示されており，とくに$E_1/E_2=1$の場合のσ_θの値は円周上のすべての点で零になるために，円周と一致して図示されている。これらの図よりつぎのことが明かになる。覆工外壁に垂直にかかる応力σ_rは初期荷重の方向にかかわらずその方向において最大値をとり，その方向と垂直の位置において最小となる。しかして荷重が弾性係数の大きい方向から作用する場合にはσ_rは主弾性係数比E_1/E_2が大きくなるほど一様に減少するが，逆に弾性係数の小さい方向から荷重が作用する場合にはE_1/E_2の増大に従つて円周上のいづれの位置においても同じ程度にσ_rは増加する。これらに対して荷重方向が主弾性係数の方向と45°傾いている場合には，覆工上に作用する垂直応力（σ_r）は荷重方向では等方等質の場合よりも異方性の場合の方が大きく，E_1/E_2が大きいほどその値も大きくなるが，荷重方向に対して垂直な方向のσ_rでは逆に異方性の場合が小さくなり，その値もほとんど零に近くなる。しかしてこの場合は等方等質の場合から$E_1/E_2=2$までの間にσ_rの値にかなりの変化が見られるが，$E_1/E_2=2\sim10$の間ではほとんど変化が見られない。

つぎに切線方向応力σ_θについてみると，この場合とくに興味あることはいかなる荷重状態の場合も弾性主軸が円周と交わる位置において$\sigma_\theta=0$となることである。また荷重方向が弾性係数の大きい方向から作用する場合には円周全体にわたつてσ_θは圧縮応力になるが，弾性係数の小さい方向から作用するときにはσ_θは引張応力として生ずる。荷重方向がそれらの中間にあるときは円周上にはそれぞれ引張応力あるいは圧縮応力のσ_θを生じ，とくに$\sigma=45^\circ$の場合にはσ_θの絶対値は弾性主軸にたいしてまつたく対称的な分布を示す。$\delta=45^\circ$の場合においてσ_θは最大値をとる。σ_θの値はいづれの場合もE_1/E_2が大きいほど大きくなるが，σ_rに比してかなり小さい。とくに等方等質の場合には円周全体にわたつて$\sigma_\theta=0$である。

せん断応力$\tau_{r\theta}$の分布状態は荷重方向とそれに垂直な方向にたいして対称的であり，δの値のいかんにかかわらず，その大きさはほとんど変化しないし，またE_1/E_2の値の変化にたいしてもほとんど変らない。強い差異について見れば，E_1/E_2の変化にたいする$\tau_{r\theta}$の値の大小はσ_rの場合の傾向とは逆に，荷重方向が弾性係数の大きい方向に作用するときにはE_1/E_2が大きいほど$\tau_{r\theta}$は減少し，小さい方向に作用するときは$\tau_{r\theta}$は逆に増大する。

以上の各応力分布の変化をさらに判り易くするためにθと応力との関係を図示すれば，図－2.3

１５（ａ），（ｂ），（ｃ），（ｄ），（ｅ）のようになる。いま地山の初期応力ｐを鉛直方向のみと考え，地山の異方性が地山と覆工との境界線上の応力分布に及ぼす影響についてみれば，つぎのようなことが判る。σ_r は境界線上のどの位置においても異方性の方向およびその大きさに対して同じような変化を示している。σ_θ は φ（水平軸からの角度，図－２.３１１参照）が 0° および 90° の附近ではほとんど変化を示さず $\varphi = 35^\circ$ のあたりで $\delta = 20^\circ$ または 70° のときにそれぞれ最大圧縮または引張りを生じ，地山異方性の影響を大きくうける。また各位置における σ_θ は $\delta \gtrless 45^\circ$ によつてその符号を変えるし，E_1/E_2 の値が大きいほど応力の絶対値は大きくなる。$\tau_{r\theta}$ はいづれの位置においても大きな変化を示さず，地山の異方性は $\tau_{r\theta}$ にはほとんど影響を及ぼさないことが判る。

さらに異方性の大きさ，すなわち E_1/E_2 の値にたいする各成分応力の変化を見るために，荷重ｐの方向が主弾性係数 E_1 の方向に一致する場合（$\delta = 0$ の場合）について，$\sigma/p - E_1/E_2$ の関係を θ（この場合は E_1 軸からの角度になる）をパラメーターとして図示すると図－２.３１６のようになる。この図によれば σ_r，σ_θ は $E_1/E_2 < 3$ の範囲で大きく E_1/E_2 の値に影響され，とくに $E_1/E_2 < 1$ の場合，すなわち荷重が主弾性係数の小さい側から作用する場合には，σ_r がかなり増大し，また σ_θ は圧縮応力から引張応力に変化する。またこの図からも $\tau_{r\theta}$ が地山の異方性にほとんど影響されないことが判る。

以上では，固定円形覆工のほどこされた坑道を有する異方性の地山が一軸方向に荷重をうける場合の，地山における応力の一般式およびその円孔と覆工との境界線上における応力式を導き，さらにそれらの式を用いていくつかの場合について計算を行い，地山の異方性すなわち初期荷重にたいする主弾性係数の方向 δ および主弾性係数比 E_1/E_2 が円孔周辺の応力に及ぼす影響について考察した。なお一般的に地山の初期荷重が二軸的である場合には上で求められた結果を適当に重畳することにより，それぞれの場合に対応した応力値をうることができる。最初にも述べたように頁岩あるいは土壌などのかなり弾性係数の低い地山において，かなり厚い覆工が施されるような場合で，覆工の変形が無視され，固定環のごとく考えられる場合には，上で求められた応力式および数値計算結果が近似的に用いられるだろうし，結果として得られた円孔の応力に及ぼす地山の異方性の影響についての考察も坑道の設計施工にたいする一つの資料を提供するものと思う。しかし実際には覆工は弾性変形するものであるから，つぎにさらに一般的に円孔をうがたれた異方性地山中に弾性変形をする覆工が施された場合の，地山および覆工内の応力式を導くことにする。

(2) 円形覆工が弾性変形する場合

(1)において覆工が固定した楕円環あるいはその特別な場合としての円環として取扱いうる場合について述べたが，ここでは一般的に弾性変形をする円形覆工の施された坑道の周辺応力および変形状態に対する解を考えてみる。

オ２章２．２（３）においても述べたように，巻立坑道に対する坑道周辺の境界条件としては，覆工と地山との間の附着状態が重要な要素となる。ここでは覆工と地山とは完全に附着している場合を考える。しかるときには，坑道周辺における境界条件は（２.２４８）式で与えられているよう

に，覆工および地山の半径方向直応力，せん断応力がそれぞれ等しくなり，また半径方向変位および切線方向変位もそれぞれ等しくなる。それでここでは無限遠において任意方向から初期荷重が作用する場合の境界周に沿つて分布する半径方向直応力およびせん断応力を，一般に未知定数を係数とするFourier 級数の形で与え，初期荷重，境界周における半径方向直応力およびせん断応力によつて生ずる坑道の変形状態を求めるとともに，一方円形覆工の外周に同じ半径方向直応力およびせん断応力が作用した場合の覆工の変形状態を求めて，地山と覆工の境界における変位成分をそれぞれ等値することにより，Fourier 級数の形で与えられた応力式の未知定数を定める方法をとつた。これらについて以下に述べることにする。

(i) 円孔周辺に垂直圧縮荷重p（s）が作用する場合

図－2.3.17のごとき円形覆工（内径 r_1，外径 r_2 弾性係数E，ポアッソン比 ν）を有する坑道の覆工と地山との境界線に沿つて垂直圧縮荷重p（s）が作用するものとし，いま覆工を除いた半径 r_2 の円孔を有する地山のみについて考えることにする。円孔周辺（z，平面）に作用するp（s）をFourier 級数に展開して次式のように表わすものとする。

$$p(s)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta-b_n\sin n\theta) \qquad (2.3.87)$$

（2.3.2）式を用いて円孔（L）の外部を単位円 γ の内部（ζ－平面）に写像するものとし，いま上式の一般的なもの $p_n=a_n\cos n\theta-b_n\sin\theta$ をとつて考えると，それは ζ－平面においてはつぎのように表わされる。

$$p_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta \quad (n\geqq 1) \qquad (2.3.88)$$

応力および変位を与えるところの応力関数 $\varphi(z)$ および $\psi(z_1)$ は前項において述べたように求められるから，同様に計算を行うことにする。まず円孔周辺に作用する外力の成分は

$$X_n=-p(\theta)\cos(n,x)=-p(\theta)\frac{dy}{ds},\quad Y_n=-p(\theta)\cos(n,y)=p(\theta)\frac{dx}{ds}$$

である。したがつて（2.3.2）式を考慮すれば境界条件式（1.3.19）式の右辺は $p_n(n\geqq 2)$ に対して

$$f_1(\theta)=-\int_{\theta_0}^{s}Y_n ds=-\int_0^s p(\theta)\,dx$$

$$=r_2\left[a_n\left\{\frac{\cos(n-1)\theta}{2(n-1)}-\frac{\cos(n+1)\theta}{2(n+1)}\right\}+b_n\left\{\frac{\sin(n-1)\theta}{2(n-1)}-\frac{\sin(n+1)\theta}{2(n+1)}\right\}\right]$$

$$f_2(\theta)=\int_0^s X_n ds'=-\int_0^s p(\theta)\,dy$$

$$=r_2\left[a_n\left\{\frac{\sin(n-1)\theta}{2(n-1)}+\frac{\sin(n+1)\theta}{2(n+1)}\right\}-b_n\left\{\frac{\cos(n-1)\theta}{2(n-1)}+\frac{\cos(n+1)\theta}{2(n+1)}\right\}\right]$$

（2.3.89）

しかるに $\cos n\theta=\frac{1}{2}(\sigma^{n}+\sigma^{-n})$，$\sin n\theta=\frac{1}{2}(\sigma^{n}-\sigma^{-n})$ と書かれるから，結局境界条件式の右辺はつぎのようになる。

$$f_1(\theta)=r_2\left[\sigma^{n-1}\frac{a_n-ib_n}{4(n-1)}+\frac{1}{\sigma^{n-1}}\cdot\frac{a_n+ib_n}{4(n-1)}-\sigma^{n+1}\frac{a_n-ib_n}{4(n+1)}-\frac{1}{\sigma^{n+1}}\cdot\frac{a_n+ib_n}{4(n+1)}\right]$$

$$f_2(\theta)=r_2\left[-\sigma^{n-1}\frac{ia_n+b_n}{4(n-1)}+\frac{1}{\sigma^{n-1}}\cdot\frac{ia_n-b_n}{4(n-1)}+\sigma^{n+1}\frac{ia_n+b_n}{4(n+1)}+\frac{1}{\sigma^{n+1}}\cdot\frac{ia_n-b_n}{4(n+1)}\right]$$

(2.3.90)

(2.3.90)式を(2.3.80)式と同様の式に用い，つぎの関係

$$\int_{\gamma}\frac{\sigma_n\sigma+\zeta}{\sigma-\zeta}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma}=4\pi i\zeta^{n}\quad(n\geqq 1)$$

$$=2\pi i\qquad(n=0)$$

$$=0\qquad(n<0)$$

を考慮すれば，つぎのように $\Phi(\zeta)$ および $\Psi(\zeta)$ をうる。

$$\Phi(\zeta)=\frac{-r_2}{4(s_1-s_2)}\left[\frac{1}{(n-1)}\{(1+s_2)a_n+(1-is_2)b_n\}\zeta^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n+1)}\{(-s_2+i)a_n+(is_2+1)b_n\}\zeta^{n+1}\right]$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{r_2}{4(s_1-s_2)}\left[\frac{1}{(n-1)}\{(1+s_1)a_n+(1-is_1)b_n\}\zeta^{n-1}+\right.$$

(2.3.91)

$$\left.+\frac{1}{(n-1)}\{(-s_1+i)a_n+(is_1+1)b_n\}\zeta^{n+1}\right]$$

(2.3.91)式の変数を z_1 および z_2 に戻すため，(2.3.9)および(2.3.10)式を用いれば，つぎのように2つの解析関数の最終的な形をうる。

$$\varphi(z_1)=\frac{-r_2}{4(s_1-s_2)}\left[\frac{1}{(n-1)}\{(1+s_2)a_n+(1-is_2)b_n\}\frac{r_2^{n-1}(1-is_1)^{n-1}}{(z_1+\sqrt{z_1-r_2^2(1+s_1^2)})^{n-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n+1)}\{(i-s_2)a_n(1+(1+is_2)b_n\}\frac{r_2^{n+1}(1-is_1)^{n+1}}{(z_1+\sqrt{z_1-r_2^2(1+s_1^2)})^{n+1}}\right]$$

$$\psi(z_2)=\frac{r_2}{4(s_1-s_2)}\left[\frac{1}{(n-1)}\{1+s_1)a_n+(1-is_1)b_n\}\frac{r_2^{n-1}(1-is_2)^{n-1}}{(z_2+\sqrt{z_2-r_2^2(1+s_2^2)})^{n+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n+1)}\{(i-s_1)a_n+(1+is_2)b_n\}\frac{r_2^{n+1}(1-is_2)^{n+1}}{(z^2+\sqrt{z_2-r_2^2(1+s_2^2)})^{n+1}}\right]$$

$(n\geqq 2)$

つぎに $n=1$ の場合には同様にして次式をうる。

$$\varphi(z_1') = \frac{-r_2}{8(s_1-s_2)}[\{(1-s_2)a_1 + (1+is_2)b_1\}\frac{r_2^2(1-is_1)^2}{(z_1+\sqrt{z_1^2-r_2^2(1+s_1^2)})^2}$$

$$+ (a_1 s_2 - b_1) - 6\pi(a_1 - b_1 s_2)]$$

$$\psi(z_2) = \frac{r_2}{8(s_1-s_2)}[\{(1-s_1)a_1 + (1+is_1)b_1\}\frac{r_2^2(1-is_2)^2}{(z_2+\sqrt{z_2^2-r_2^2(1+s_2^2)})^2} \qquad (2.3.93)$$

$$+ (a_1 s_1 - b_1) - 6\pi(a_1 - b_1 s_1)]$$

また常数項$\frac{a_0}{2}$にたいしては

$$\varphi(z_1) = -\frac{ir_2^2 a_0(1+is_2)}{4(s_1-s_2)} \cdot \frac{(1-is_1)}{z_1+\sqrt{z_1^2-r_2^2(1+s_1^2)}}$$

$$\psi(z_2) = \frac{ir_2^2 a_0(1+is_1)}{4(s_1-s_2)} \cdot \frac{(1-is_2)}{z_2+\sqrt{z_2^2-r_2^2(1+s_2^2)}} \qquad (2.3.94)$$

円孔の周辺上では次式が成立するから

$$\sqrt{z_2^2-r_2^2(1+s_2^2)} = ir_2(\sin\theta - i\beta_2\cos\theta)\ .$$

この関係を用いれば（2.3.92）～（2.3.94）式より円孔周辺上の$\varphi'(z_1)$および$\psi'(z_2)$として次式をうる。

$n \geqq 2$に対して

$$\varphi'(z_1) = -\frac{1}{2(\beta_1-\beta_2)} \cdot \frac{(ia_n+b_n)}{(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)}(\sin\theta+i\beta\cos\theta)(\cos\theta+i\beta_2\sin\theta)(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

$$\psi'(z_2) = \frac{1}{2(\beta_1-\beta_2)} \cdot \frac{(ia_n+b_n)}{(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)}(\sin\theta+\beta_2\cos\theta)(\cos\theta+i\beta_2\sin\theta)(\cos n\theta - i\sin\theta)$$

$n=1$に対して

$$\varphi'(z_1) = \frac{ia_1+b_1}{4(\beta_1-\beta_2)(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)}(1-\beta_2)(\sin\theta+i\beta_1\cos\theta)(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$$

$$\psi'(z_2) = \frac{-(ia_1+b_1)}{4(\beta_1-\beta_2)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)}(1-\beta_1)(\sin\theta+i\beta_2\cos\theta)(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$$

常数項に対して

$$\varphi'(z_1) = -\frac{a_0(1-\beta_2)}{4(\beta_1-\beta_2)(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)}\{(\sin^2\theta - \beta_1\cos^2\theta) + i(1+\beta_1)\sin\theta\cos\theta\}$$

$$\psi'(z_2) = \frac{a_0(1-\beta_1)}{4(\beta_1-\beta_2)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)}\{(\sin^2\theta - \beta_2\cos^2\theta) + i(1+\beta_2)\sin\theta\cos\theta\}$$

この場合の極座標系による各成分応力は（2.3.15）式の各式の才2項で与えられるから，その式に（2.3.95）式を代入すれば，つぎのように求められる。

$n \geqq 2$ に対して

$$\sigma_r = a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)} [\{\beta_1\beta_2 - (1-(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)\sin^2\theta\cos^2\theta\}$$

$$\times(-a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) + (\beta_1+\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)\sin\theta\cos\theta(a_n\sin n\theta + b_n\cos n\theta)] \tag{2.3.96}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

上と同様にしてn＝1および常数項に対する円孔周辺上での応力成分を求めるとつぎのようになる。

n＝1に対して

$$\sigma_r = a_1\cos\theta - b_1\sin\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)} [\{\beta_1\beta_2(1-\beta_1-\beta_2) - (1-\beta_1^2\beta_2^2)\sin^2\theta$$

$$-(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)\sin^4\theta\}(a_1\cos 2\theta\cos\theta - b_1\sin 2\theta\cos\theta) - \{(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)$$

$$-(1-\beta_1^2\beta_2^2)\cos^2\theta + (1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)\cos^4\theta\}(a_1\sin 2\theta\sin\theta + b_1\cos 2\theta\sin\theta)]$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \tag{2.3.97}$$

常数項に対して

$$\sigma_r = a_0/2$$

$$\sigma_\theta = \frac{a_0}{2(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)} \{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$+(\beta_1+\beta_2)(\sin^2\theta+\beta_1\beta_2\cos^2\theta) - \beta_1\beta_2\} \tag{2.3.98}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

つぎにこの場合の荷重状態に対する円孔周辺の変位式を求める。x，y座標に対する変位成分をu（x，y）およびv（x，y）で表わせば，uおよびvは（1.3.17）より2つの解析関数φ（z_1）およびψ（z_2）を用いて求めることができる。さらに極座標系における変位成分u_rおよびu_θは次式によつてuおよびvから求められる。

$$u_r = u\cos\theta + v\sin\theta$$

$$u_\theta = v\cos\theta - u\sin\theta \tag{2.3.99}$$

したがつてこの場合の円孔周辺上の変位成分は，（2.3.92）～（2.3.94）式を（1.3.17）式に代入してuおよびvを求め，さらにそれらを（2.3.99）式に用いて計算することによりつぎのように与えられる。

$n \geqq 2$ に対して

$$u_r=\frac{r_2\, a_n}{(n-1)(n+1)}\left[a_{11}\{(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos n\theta\cos+(n\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\}\cos\theta\right.$$

$$+a_{12}\cos n\theta+\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{n\beta_1+n\beta_2+1)\cos n\theta\sin\theta-(n+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\cos\theta\}\sin n\theta\cos\theta\}$$

$$\left.\sin\theta\right]+\frac{r_2\, b_n}{(n-1)(n+1)}\left[a_{11}\{(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta-(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin\theta\cos\theta\}\right.$$

$$\cos\theta]-a_{12}\sin n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\cos\theta+(n\beta_1+n\beta_2+1)\sin n\theta\sin\theta\}$$

$$\sin\theta]$$

$$u_\theta=-\frac{r_2\, a_n}{(n-1)(n+1)}\left[a_{11}\{n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos n\theta\cos+(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\}\sin\theta\right.$$

$$+a_{12}\, n\sin n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n\beta_1+n\beta_2+1)\cos n\theta\sin\theta-(n+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\cos\theta\}\cos\}\cos\theta]$$

$$-\frac{r_2\, b_n}{(n-1)(n+1)}\left[a_{11}\{(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta-(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin\theta\cos\theta\}\sin\theta\right.$$

$$+a_{12}\cdot n\cdot\cos n\theta+\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\cos\theta+(n\beta_1+n\beta_2+1)\sin n\theta\sin\theta\}\cos\theta]$$

$n=1$ に対して

$$u_r=\frac{r_2}{4\beta_1\beta_2}\left[a_1\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\cos 2\theta\cos\theta-a_{12}\beta_1\beta_2\cos\theta-a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\sin 2\theta\right.$$

$$\sin\theta\}-b_1\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\sin 2\theta\cos\theta-a_{12}\beta_1\beta_2\sin\theta+a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\cos 2\theta\sin\theta\}]$$

$$u_\theta=\frac{r_2}{4\beta_1\beta_2}\left[-a_1\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\cos 2\theta\sin\theta+a_{12}\beta_1\beta_2\sin\theta+a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\right.$$

$$\sin 2\theta\cos\theta\}+b_1\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\sin 2\theta\sin\theta-a_{12}\beta_1\beta_2\cos\theta-a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)$$

$$\cos 2\theta\cos\theta\}]$$

常数項に対して

$$u_r=\frac{r_2 a_0}{2\beta_1\beta_2}\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\cos^2\theta-a_{12}\beta_1\beta_2-a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\sin^2\theta\}$$

$$u_\theta=-\frac{r_2 a_0}{2\beta_1\beta_2}\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)+a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\}\sin\theta\cos\theta$$

(ii) 円孔周辺に切線荷重 q (s) が作用する場合円孔周辺に作用する切線荷重 q (s) が(1)の場合と同様につぎのように Fourier 級数に展開されるものとする。

$$q(s)=\frac{c_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta-d_n\sin n\theta)$$

しかるときはζ一平面の単位円に対する接線荷重はつぎのごとく表わされる。

$$q(\theta)=\frac{c_0}{2}\;\Sigma(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta) \qquad (2.3.104)$$

この場合には

$$X_n=q(\theta)\cos(t,x)=q(\theta)\frac{dx}{ds},\quad Y_n=q(\theta)\cos(t,y)=q(\theta)\frac{dy}{ds}$$

であり，境界条件式（1.2.1 9）式の右辺は（ｉ）の場合と同様にしてつぎのように算出される。

$n \geqq 2$ に対して

$$f_1(\theta)=r_2[-\sigma^{n-1}\frac{ic_n+d_n}{4(n-1)}+\frac{1}{\sigma^{(n-1)}}\cdot\frac{ic_n-d_n}{4(n-1)}-\sigma^{n+1}\frac{ic_n+d_n}{4(n+1)}+\frac{1}{\sigma^{n+1}}\cdot\frac{ic_n-d_n}{4(n+1)}]$$

$$f_2(\theta)=-r_2[\sigma^{n-1}\frac{c_n-id_n}{4(n-1)}+\frac{1}{\sigma^{n-1}}\cdot\frac{c_n+id_n}{4(n-1)}-\sigma^{n+1}\frac{c_n-id_n}{4(n+1)}-\frac{1}{\sigma^{n+1}}\cdot\frac{c_n+id_n}{4(n+1)}]$$

(2.3.1 0 5)

また $n=1$ に対して

$$f_1(\theta)=r_2[-\frac{1}{8}c_1(\sigma^2-\frac{1}{\sigma^2})+\frac{1}{2}c_1\theta-\frac{1}{8}d_1(\sigma^2+\frac{1}{\sigma^2})+\frac{1}{4}d_1]$$

$$f_2(\theta)=-r_2[-\frac{1}{8}c_1(\sigma^2+\frac{1}{\sigma^2})+\frac{c_1}{4}+\frac{1}{8}d_1(\sigma^2-\frac{1}{\sigma^2})+\frac{1}{2}\theta d_1]$$

(2.3.1 0 6)

常数項 $\frac{c_0}{2}$ に対して

$$f_1(\theta)=-i\frac{c_0 r_2}{4}(\sigma-\frac{1}{\sigma}),\quad f_2(\theta)=\frac{c_1 r_2}{4}(\sigma+\frac{1}{\sigma})$$

(2.3.1 0 7)

（2.3.1 0 5）～（2.3.1 0 7）式を（2.3.8）式に代入して $\Phi(\zeta)$ 及び $\Psi(\zeta)$ を求めれば

$$\Phi(\zeta)=\frac{-r_2}{4(s_1-s_2)}[\frac{1}{(n-1)}\{(1-is_2)c_n-(1+s_2)d_n\}\zeta^{n-1}-\frac{1}{n+1}\{(1+is_2)c_n-(i-s^2)d_n\}\zeta^{n+1}]\quad(n\geqq 2)$$

$$=\frac{-r_2}{4(s_1-s_2)}[-\frac{1}{2}\{(1+is_2)c_n-(i-s_2)d_n\}\zeta^2+\frac{1}{2}(c_n+s_2d_n)+3\pi(c_n s_2+d_n)]$$

$(n=1)$

$$=\frac{r_2 c_0}{4(s_1-s_2)}(1+is_2)\zeta\quad(\text{常数項})$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{r_2}{4(s_1-s_2)}[\frac{1}{n-1}\{(1-is_1)c_n-(1+s_1)d_n\}\zeta^{n-1}-\frac{1}{n+1}\{(1+is_1)c_n-(i-s_1)d_n\}\zeta^{n+1}]$$

$(n\geqq 2)$

$$=\frac{r_2}{4(s_1-s_2)}[-\frac{1}{2}\{(1+is_1)c_n-(i-s_1)d_n\}\zeta^2+\frac{1}{2}(c_n+s_1d_n)+3\pi(s_1c_n+d_n)]\quad(n=1)$$

$$=-\frac{r_2 c_0}{4(s_1 s_2)}(1+is_1)\zeta\quad(\text{常数項})$$

上式をさらに変数変換すると，2つの解析関数 $\varphi(z_1)$ 及び $\psi(z_2)$ をつぎのような形でえられる。

$$\varphi(z_1)=\frac{-r_2}{4(s_1-s_2)}[\frac{1}{n-1}\{(1-is_2)c_n-(1+s_2)d_n\}\frac{r_2^{n-1}(1-is_1)^{n-1}}{(z_1+\sqrt{z_1^2-r_2^2(1+s_1^2)})^{n-1}}$$

$$-\frac{1}{n+1}\{(1+is_2)c_n-(i-s_2)d_n\}\frac{r_2^{n+1}(1-is_1)^{n+1}}{(z_1+\sqrt{z_1^2-r_2^2(1+s_1^2)})^{n+1}}]\quad(n\geqq 2)\qquad(2.3.1\,0\,8)$$

$$=\frac{-r_2}{4(s_1-s_2)}[-\frac{1}{2}\{(1+is_2)c_n-(i-s_2)d_n\}\frac{r_2^2(1-is_1)^2}{(z_1+\sqrt{z_1^2-r_2^2(1+s_1^2)})^2}$$

$$+\frac{1}{2}(c_1+s_2d_1)+3\pi(c_1s_2+d_1)] \qquad (n=1)$$

$$=\frac{r_2c_o}{4(s_1-s_2)}(1+is_2)\cdot\frac{r_2(1-is_1)}{z_1+\sqrt{z_1^2-r_2^2(1+s_1^2)}} \qquad (\text{常数項})$$

$$\psi(z_2)=\frac{r_2}{4(s_1-s_2)}[\frac{1}{n-1}\{(1-is_1)Cn-(1+s_1)dn\}\frac{r_2^{n-1}(1-is_2)^{n-1}}{(z^2+\sqrt{z_2^2-r_2^2(1+s_2^2)})^{n-1}}$$

$$-\frac{1}{n+1}\{(1+is_1)c_n-(1-s_1)d_n\}\frac{r_2^{n+1}(1-is_2)^{n+1}}{(z_2+\sqrt{z_2^2-r_2^2(1+s_2^2)})^{n+1}} \qquad (n\geqq 2) \qquad (2.3.109)$$

$$=\frac{-r_2}{4(s_1-s_2)}[-\frac{1}{2}\{(1+is_1)c_1-(1-s_1)d_1\}\frac{r_2^2(1-is_2)^2}{(z_2+\sqrt{z_2^2-r_2^2(1+s_2^2)})^2}$$

$$+\frac{1}{2}(c_1+s_1d_1)+3\pi(c_1s_1+d_1)] \qquad (n=1)$$

$$=\frac{-r_2c_o}{4(s_1-s_2)}(1+is_1)\cdot\frac{r_2(1-is_2)}{z_2+\sqrt{z_2^2-r_2^2(1+s_2)^2}} \qquad (\text{常数項})$$

円孔周辺上では，上式よりつぎのようになる。

$$\varphi'(z_1)=\frac{-(C_n-id_n)}{2(\beta_1-\beta_2)(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)}(\sin\theta+i\beta_1\cos\theta)(i\sin\theta+\beta_2\cos\theta)(\cos n\theta$$

$$-i\sin\theta) \qquad (n\geqq 2)$$

$$=\frac{1}{4(\beta_1-\beta_2)}\cdot\frac{(c_1-id_1)}{(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)}(1-\beta_2)(\sin\theta+i\beta_1\cos\theta)(\cos2\theta-i\sin2\theta) \qquad (n=1)$$

$$=\frac{c_o}{4(\beta_1-\beta_2)}\cdot\frac{1-\beta_2}{\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta}\{\sin\theta\cos\theta(1+\beta_1)-i(\sin^2\theta-\beta_1\cos^2\theta)\} \qquad (\text{常数項})$$

$$\psi'(z_2)=\frac{1}{2(\beta_1-\beta_2)}\cdot\frac{(Cn-idn)}{\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta}(\sin\theta+i\beta_2\cos\theta)(i\sin n\theta+\beta_1\cos\theta)(\cos n\theta-$$

$$-i\sin n\theta) \qquad (n\geqq 2)$$

$$=\frac{-1}{4(\beta_1-\beta_2)}\cdot\frac{c_1-id_1}{(\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta)}(1-\beta_1)(\sin\theta+i\beta_2\cos\theta)(\cos2\theta)i\sin2\theta) \qquad (n=1)$$

$$=-\frac{c_o}{4(\beta_1-\beta_2)}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta}\{\sin\theta\cos\theta(1+\beta_2)-i(\sin^2\theta-\beta_2\cos^2\theta)\} \qquad (\text{常数項})$$

(2.3.110)

(2.3.110) 式を (2.3.15) 式才2項に用いればこの場合の各成分応力は次式で与えられる。

$$\sigma_r=C_n\cos n\theta-d_n\sin n\theta \qquad (n\geqq 1)$$

$$=C_o/2 \qquad (\text{常数項})$$

$$\sigma_\theta=\frac{1}{(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)(\sin\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)}[\{(2-\beta_1^2-\beta_2^2)\sin^2\theta+(\beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_2^2)\cos^2\theta\}\times$$

$$\times\sin\theta\cos\theta\,(C_n\cos n\theta - d_n\sin n\theta) + (\beta_1+\beta_2)\{(\sin^4\theta+\beta_1\beta_2\cos^4\theta)$$

$$+(1+\beta_1\beta_2)\sin^2\theta\cos^2\theta\}(c_n\sin n\theta + d_n\cos n\theta) \qquad (n\geqq 2)$$

$$=\frac{1}{2(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)}[\{+\beta_2-\beta_2\beta_2)-(1-\beta_1^2\beta_2^2)\cos^2\theta+(1-\beta_1^2)$$

$$(1-\beta_2^2)\cos^4\theta\}\times\sin\theta(-C_1\cos 2\theta+d_1\sin 2\theta)+\{\beta_1\beta_2(-1+\beta_1+\beta_2)+(1-\beta_1^2\beta_2^2)\sin^2\theta+$$

$$+(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)\sin^4\theta\}\cos(C_1\sin 2\theta+d_1\cos 2\theta)] \qquad (n=1)$$

$$=\frac{C_0}{2(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta}\{(\beta_1+\beta_2)(-1+\beta_1\beta_2)+(\beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_1^2\beta_2^2)\cos^2\theta$$

$$+(2-\beta_1^2-\beta_2^2)\sin^2\theta\}\sin\theta\cos\theta \qquad (\text{常数項})$$

(2.3.111)

つぎに円孔周辺上の変位成分はつぎのように求められる。

$n\geqq 2$ に対して

$$u_r=\frac{r_2 C_n}{(n-1)(n+1)}[a_{11}\{(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta-(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\cos\theta\}\cos\theta$$

$$-a_{12}n\sin n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n\beta_1+n\beta_2+1)\cos n\theta\cos\theta+(n+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\}\sin\theta]$$

$$+\frac{r_2 d_n}{(n-1)(n+1)}[-a_{11}\{(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta+(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\}\cos\theta$$

$$-a_{12}n\cdot\cos n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta-(n\beta_1+n\beta_2+1)\sin n\theta\cos\theta\}\sin\theta]$$

$$u_\theta=\frac{r_2\cdot C_n}{(n-1)(n+1)}[a_{11}\{-(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos n\theta\sin\theta+(n\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\cos\theta\}\sin\theta$$

$$-a_{12}\cos n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n\beta_1+n\beta_2+1)\cos n\theta\cos\theta+(n+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\}\cos\theta]$$

$$+\frac{r_2 d_n}{(n-1)(n+1)}[a_{11}\{(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\cos\theta+(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\}\sin\theta$$

$$+a_{12}\sin n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta-(n\beta_1+n\beta_2+1)\sin n\theta\cos\theta\}\cos\theta]$$

$n=1$ に対して

$$u_r=\frac{r_2}{4\beta_1\beta_2}[C_1\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\sin 2\theta\cos\theta-a_{12}\beta_1\beta_2\sin\theta+a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\cos 2\theta\sin\theta$$

$$+d_1\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\cos 2\theta\cos\theta-a_{12}\beta_1\beta_2\cos\theta-a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\sin 2\theta\sin\theta\}]$$

$$u_\theta=-\frac{r_2}{4\beta_1\beta_2}[C_1\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\sin 2\theta\sin\theta-a_{12}\beta_1\beta_2\cos\theta-a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\cos 2\theta\cos\theta\}$$

$$+d_1\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\cos2\theta\sin\theta+a_{12}\beta_1\beta_2\sin\theta+a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\sin2\theta\cos\theta\}]$$

常数項に対して

$$u_r=\frac{r_2C_o}{2\beta_1\beta_2}\{a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)+a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\}\sin\theta\cos\theta \qquad (2.3.1\,1\,4)$$

$$u_\theta=\frac{r_2C_o}{2\beta_1\beta_2}\{-a_{11}\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2-\beta_1\beta_2)\sin^2\theta+a_{12}\beta_1\beta_2+a_{22}(1-\beta_1-\beta_2)\cos^2\theta\}$$

（iii） 無限遠において一方向に等分布圧縮荷重pを受ける場合

図－2.3.1 7に示すごとく無限遠においてx軸にδなる角をなす方向に，地山の初期荷重に相当して等分布圧縮荷重pが作用する場合の円孔周辺の応力および変位について考える。この場合の応力状態は才3章3，1で求められたものと同じであり，円孔周辺における各成分応力式はつぎのようになる。

$$\sigma_r=0$$

$$\sigma_\theta=\frac{-p}{(\sin^2\theta+\beta_1^2\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\beta_2^2\cos^2\theta)}[\{(1+\beta_1+\beta_2)\cos^2\delta-\beta_1\beta_2\sin^2\delta\}\sin^2\theta$$
$$-(\beta_1+\beta_2)(1+\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin\delta\cos\delta\sin\theta\cos\theta+\beta_1\beta_2\{-\cos^2\delta+(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin^2\delta\}$$
$$\cos^2\theta]$$

(2.3.1 1 5)

$$\tau_{r\theta}=0$$

つぎにこの場合の直角座標による変位は，（2.3.1 3）式を（2.3.4）式に代入してえられるところの関数φ（z_1）およびψ（z_2）の値を（1.3.1 7）式に用いることによりえられる。したがつてそれらの変位成分を用いて（2.3.9 9）式より円孔周辺における変位式がつぎのようにえられる。

$$u_r=-pr_2[\{a_{11}(1+\beta_1+\beta_2)\cos^2\delta-a_{11}\beta_1\beta_2\sin^2\delta\}\cos^2\theta+\{a_{11}(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+\beta_2^2)\sin\delta\cos\delta$$
$$+(1+\beta_1+\beta_2+\frac{\beta_1}{\beta_2})\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\sin\delta\cos\delta\}\sin\theta\cos\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{\cos^2\delta-(\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\sin^2\delta\}\sin^2\theta$$

$$u_\theta=-pr_2[-(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+\beta_2^2)a_{11}\sin\delta\cos\delta\sin^2\theta-\{(1+\beta_1+\beta_2)a_{11}\cos^2\delta-\beta_1\beta_2a_{11}\sin^2\delta$$
$$+\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}(\cos^2\delta-(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin^2\delta)\}\sin\theta\cos\theta$$
$$+\frac{a_{22}}{\beta_2\beta_2}(1+\beta_1+\beta_2+\frac{\beta_1}{\beta_2})\sin\delta\cos\delta\cos^2\theta] \qquad (2.3.1\,1\,6)$$

（iv） 円形覆工の外縁にp（θ）およびq（θ）が作用する場合応力式および変位式

覆工と地山とが完全に附着している場合を考えているから，覆工の外縁には垂直荷重p（s）および切線荷重q（s）が作用する。いま覆工を等方等質の弾性体と仮定し，その弾性係数およびポアッソン比をE，νとする。覆工円環の中心を原点とする極座標を考えると，この場合の応力関数は（1.2.17）式よりつぎのように与えられる。

$$F=A_0\log r+B_0r^2+A_0'\theta+(B_1r^3+A_1'r^{-1})\cos\theta+(D_1r^3+C_1'r^{-1})\sin\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(A_nr^n+B_nr^{n+2}+A_n'r^{-n}+B_n'r^{-n+2})\cos n\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(C_nr^n+D_nr^{n+2}+C_n'r^{-n}+D_n'r^{-n+2})\sin n\theta \qquad (2.3.117)$$

しかるときは各成分応力はつぎのようになる。

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$
$$=A_0r^{-2}+2B_0+(2B_1r-2A_1'r^{-3})\cos\theta+(2D_1r-2C_1'r^{-3})\sin\theta$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n-1)A_nr^{n-2}+(n-2)(n+1)B_nr^n+n(n+1)A_n'r^{-n-2}+(n+2)(n-1)B_n'r^{-n}\}\cos n\theta$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n-1)C_nr^{n-2}+(n-2)(n+1)D_nr^n+n(n+1)C_n'r^{-n-2}+(n+2)(n-1)D_n'r^{-n}\}\sin n\theta$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$
$$=-A_0r^{-2}+2B_0+(6B_1r+2A_1'r^{-3})\cos\theta+(6D_1r+2C_1'r^{-3})\sin\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{n(n-1)A_nr^{n-2}+(n+2)(n+1)B_nr^n+n(n+1)A_n'r^{-n-2}+(n-2)(n-1)B_n'r^{-n}\}\cos n\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{(n-1)C_nr^{n-2}+(n+2)(n+1)D_nr^n+n(n+1)C_n'r^{-n-2}+(n-2)(n-1)D_n'r^{-n}\}\sin n\theta$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)$$
$$=A_0'r^{-2}+(2B_1r-2A_1'r^{-3})\sin\theta-(2D_1r-2C_1'r^{-3})\cos\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}n\{(n-1)A_nr^{n-2}+(n+1)B_nr^n-(n+1)A_n'r^{-n-2}-(n-1)B_n'r^{-n}\}\sin n\theta$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}n\{(n-1)C_nr^{n-2}+(n+1)D_nr^n-(n+1)C_n'r^{-n-2}-(n-1)D_n'r^{-n}\}\cos n\theta$$
$$(2.3.118)$$

（2.3.117）式あるいは（2.3.118）式中に含まれる未定係数はつぎのような境界条件より決定される。

$r=r_1$において

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \qquad (2.3119)$$

$r = r_2$ において

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta - d_n \sin n\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3120)$$

ただし上式において $a_1 = -d_1$ ，$b_1 = C_1$ である。

まず（2.3118）を（2.3119）に代入することによりそれぞれつぎの関係をうる。

$$A_0 = -2B_0 r_1^2 \ , \ A_0' = 0$$

$$A_1' = B_1 r_1^4 \ , \quad C_1' = D_1 r_1^4$$

$$A_n = -\frac{1}{n}\{ (n+1) B_n r_1^2 + B_n' r_1^{-2(n-1)} \}$$

$$C_n = -\frac{1}{n}\{ (n+1) D_n r_1^2 + D_n' r_1^{-2(n-1)}$$

$$A_n' = \frac{1}{n}\{B_n r_1^{2(n+1)} - (n-1) B_n' r^2$$

$$C_n' = \frac{1}{n}\{ D_n r_1^{2(n+1)} - (n-1) D_n' r_1^2$$

さらに（2.3120）式の関係を用いれば，各係数はつぎのように求まる。

$$A_0 = B_0 0 \ , \ A_1' = \frac{a_1}{2} \cdot \frac{r_1^4 \, r_2^2}{(r_2^4 - r_1^4)} \ , \ B_1 = -\frac{a_1}{2} \cdot \frac{r_2^2}{(r_2^4 - r_1^4)}$$

$$C_1' = \frac{b_1}{2} \cdot \frac{r^4 r_2^2}{(r_2^4 - r_1^4)} \ , \quad D_1 = \frac{b_1}{2} \cdot \frac{r_2^2}{(r_2^4 - r_1^4)}$$

$$A_n = \frac{1}{2n(n-1)\{n^2 - 2(n^2-1) r_1^2 r_2^{-2} + n^2 r_1^4 r_2^{-4} - r_1^{-2(n-1)} r_2^{2(n-1)} r_2^{-2(n+1)}\} r_1^{-2} r_2^n} \times$$

$$\times [a_n \{ n^2 r_1^2 r_2^{-2} - n(n-1) - n r_1^{-2n} r_2^{2n} \} + dn \{ n^2 r_1^2 r_2^{-2} - (n-1)(n+2) + (n-2) r_1^{-2n} r_2^{2n} \}]$$

$$B_n = \frac{1}{2(n+1)\{n^2 - 2(n^2-1) r_1^2 r_2^{-2} + n^2 r^4 r_2^{-4} - r^{-2(n-1)} r_2^{2(n-1)} - r_1^{2(n+1)} r_2^{-2(n+1)}\} r_2^n} \times$$

$$\times [a_n \{ r_1^{-2(n-1)} r_2^{2(n-1)} - (n+1) r_1^2 r_2^{-2} + n \} - dn \{ r_1^{-2(n-1)} r_2^{2(n-1)} + (n+1) r_1^2 r_2^{-2} - (n-2) \}]$$

$$A_n' = \frac{1}{2n(n+1)\{n^2 - 2(n^2-1) r_1^2 r_2^{-2} + n^2 r^4 r_2^{-4} - r_1^{-2(n-1)} r_2^{2(n-1)} - r_1^{2(n+1)} r_2^{-2(n+1)}\} r_1^{-2} r_2^{-n}} \times$$

$$\times [a_n \{ n^2 r_1^2 r_2^{-2} + n r_1^{2n} r_2^{-2n} - n(n+1) \} - bn \{ n^2 r_1^2 r_2^{-2} - (n+2) r_1^{2n} r_2^{-2n} - (n+1)(n-2) \}]$$

$$B_n' = \frac{1}{2(n-1)\{n^2 - 2(n^2-1) r_1^2 r_2^{-2} + n^2 r_1^4 r_2^{-4} - r_1^{-2(n-1)} r_2^{2(n-1)} - r_1^{2(n+1)}\} r_2^{-n}} \times$$

$$\times [a_n \{ -r_1^{2(n+1)} r_2^{-2(n+1)} - (n-1) r_1^2 r_2^{-2} + n \} + dn \{ -r_1^{2(n+1)} r_2^{-2(n+1)} + (n-1) r_1^2 r_2^{-2} - (n-2) \}]$$

$$C_n=\frac{1}{2n(n+1)\{n^2-2(n^2-1)r_1^2r_2^{-2}+n^2r_1^4r_2^{-4}-r_1^{-2(n-1)}r_2^{2(n-1)}-r_1^{2(n+1)}r_2^{-2(n+1)}\}r_1^{-2}r_2^{n}}\times$$

$$\times[-b_n\{n^2r_1^2r_2^{-2}-n(n-1)-nr_1^{-2n}r_2^{2n}\}r_2^{2n}\}+C_n\{n^2r_1^2r_2^{-2}-(n-1)(n+2)+(n-2)r_1^{-2n}r^{2n}\}]$$

$$C_n'=\frac{1}{2n(n+1)\{n^2-2(n^2-1)r_1^2r_2^{-2}+n^2r_1^4r_2^{-4}-r_1^{-2(n-1)}r_2^{2(n-1)}-r_1^{2(n+1)}r_2^{-2(n+1)}\}r_1^{-2}r_2^{-n}}\times$$

$$\times[-b_n\{n^2r_1^2r_2^{-2}+nr_1^{2n}r_2^{-2n}r_2^{-2n}-n(n+1)\}-C_n\{n^2r_1^2r_2^2-(n+2)r_1^{2n}r_2^{-2n}-(n+1)(n-2)\}]$$

$$D_n=\frac{1}{2(n+1)\{n^2-2(n^2-1)r_1^2r_2^{-2}+n^2r_1^4r_2^{-4}-r_1^{-2(n-1)}r_2^{2(n-1)}-r_1^{2(n+1)}r_2^{-2(n+1)}\}r_2^{n}}\times$$

$$\times[b_n\{-r_1^{-2(n-1)}r_2^{2(n-1)}+(n+1)r_1^2r_2^{-2}-n\}-C_n\{r_1^{-2(n-1)}r_2^{2(n-1)}+(n+1)r_1^2r_2^2-(n-2)\}]$$

$$D_n'=\frac{1}{2(n+1)\{n^2-2(n^2-1)r_1^2r_2^{-2}+n^2r_1^4-r_2^{-4}-r_1^{-2(n-1)}r_2^{2(n-1)}-r_1^{2(n+1)}r_2^{-2(n+1)}\}r_2^{-n}}\times$$

$$\times[b_n\{r_1^{2(n+1)}r_2^{-2(n+1)}+(n-1)r_1^2r_2^{-2}-n\}+C_n\{-r_1^{2(n+1)}r_2^{-2(n+1)}+(n-1)r_1^2\ r_2^{-2}-(n-2)\}]$$

$$n\geqq 2$$

（2.3.1 2 1）

つぎに変位式を算出する。平面応力状態を仮定すればヒズミ成分は（1.2.1 9）式より次式のごとく応力成分で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r=\frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_r-\nu(1+\nu)\sigma_\theta\}\qquad \varepsilon_\theta=\frac{1}{E}\{(1-\nu^2)\sigma_\theta-\nu(1+\nu)\sigma_r\}\\&\gamma_{r\theta}=\frac{1}{G}\ \tau_{r\theta}\end{aligned}\right\}\quad(2.3.1\,2\,2)$$

またヒズミ成分はつぎのように変位成分（u_r' ，u_θ' ）より求められる。

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r'}{\partial r}\ ,\quad \varepsilon_\theta=\frac{u_r'}{r}+\frac{\partial u_\theta'}{r\partial\theta}\ ,\quad \gamma_{r\theta}=\frac{\partial u_r'}{r\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta'}{\partial r}-\frac{u_r'}{\theta}\qquad(2.3.1\,2\,3)$$

（2.3.1 2 2）式を（2.3.1 2 3）式に代入して積分すれば，

$$u_r'=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\int\sigma_r d_r-\nu(1+\nu)\int\sigma_\theta d_r\right]+f(\theta)$$

$$u_\theta'=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\int r\sigma_\theta d\theta-\nu(1+\nu)\int r\sigma d\theta\right]-\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\iint\sigma_r d_r d\theta-\nu(1+\nu)\iint\sigma_\theta drd\theta\right]$$

$$-\int(\theta)d\theta+f_1(r)$$

$$\gamma_{r\theta}'=\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int\sigma_r d_r\right)-\nu(1+\nu)\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\int\sigma_\theta dr\right)\right]+\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\frac{\partial}{\partial r}\left(\int r\sigma_\theta d_\theta\right)\right.$$

$$\left.-\nu(1+\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\int r\sigma_r d\theta\right)\right]-\frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\int\sigma_r d_\theta-\nu(1+\nu)\int\sigma_\theta d_\theta\right]$$

$$-\frac{1}{E}[\frac{(-\nu^2)}{r}\int r\sigma\theta d\theta-\frac{\nu(1+\nu)}{r}\int r\sigma r d\theta]+\frac{1}{E}[\frac{(1-\nu^2)}{r}\iint\sigma_r dr d\theta-$$

$$-\frac{\nu(1+\nu)}{r}\iint\sigma\theta dr d\theta]+\frac{\partial f(\theta)}{r\partial\theta}+\frac{\partial f_1(r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta-\frac{1}{r}f_1(r) \tag{2.3124}$$

上式に(2.3118)式を代入して計算を行えば，u'_r及びu'_θはつぎのようになる。

$$u'_r=\frac{1}{E}[-1+\nu)A_0r^{-1}+2(1+\nu)(1-2\nu)B_0r+\{(1+\nu)(1-4\nu)B_1r^2+(1+\nu)A'_1r^{-2}\}\cos\theta$$

$$+\{(1+\nu)(1-4\nu)D_1r^2+(1+\nu)C'_1r^{-2}\}\sin\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{-n(1+\nu)A_nr^{n-1}+(1+\nu)(-n+2-4\nu)B_nr^{n+1}+n(1+\nu)A'_nr^{-(n+1)}$$

$$+(1+\nu)(n+2-4\nu)B'_nr^{-(n-1)}\}\cos n\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{-n(1+\nu)Cnr^{n-1}+(1+\nu)(-n+2-4\nu)D_nr^{n+1}+n(1+\nu)C'_nr^{-(n+1)}$$

$$+(1+\nu)(n+2-4\nu)D'_nr^{-(n-1)}\}\sin n\theta]+f(\theta)$$

$$u'_\theta=\frac{1}{E}[\{(5-4\nu)(1+\nu)B_1r^2+(1+\nu)A'_1r^{-2}\}\sin\theta-\{(1+\nu)(5-4\nu)D_1r^2+(1+\nu)C'_1r^{-2}\}\cos\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{n(1+\nu)Anr^{n-1}+(1+\nu)(n+4-4\nu)B_nr^{n+1}+n(1+\nu)A'_nr^{-(n+1)}+(1+\nu)(n-4+4\nu)$$

$$B'nr^{-(n-1)}\}\sin n\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\{n(1+\nu)C_nr^{n-1}+(1+\nu)(n+4-4\nu)D_nr^{n+1}+n(1+\nu)C'_nr^{-(n+1)}+(1+\nu)(n-4+4\nu)$$

$$D'_nr^{-(n-1)}\}\cos n\theta$$

$$-\int f(\theta)d\theta+f_1(r) \tag{2.3125}$$

つぎに$\gamma'_{r\theta}=\frac{1}{G}\tau_{r\theta}$なる関係式の両辺に(2.3118)式および(2.3124)式を用いて計算を行えば(2.3124)式中に積分定数として出て来る関数$f(\theta)$及び$f'(r)$の間につぎのような関係があることが判る。

$$\frac{\partial f(\theta)}{r\partial\theta}+\frac{\partial f_1(r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\int f(\theta)d\theta-\frac{1}{r}f_1(r)=0$$

これより　$f(\theta)=H\sin\theta+K\cos\theta$，$f_1(r)=Fr$

がえられる。H，K，F等は常数である。しかしここにおいてはこれらの項は，後で覆工外縁と地山の円孔内辺との間の境界条件より荷重p(s)およびq(s)の形を定める場合に，(2.3125)式中の同型の項に含めて考えてよいから，$f(\theta)=0$，$f_1(r)=0$として取扱うことにする。

さて(2.3125)式中の係数A_n，B_n，Cn，D_n等に(2.3121)式を代入すれば変位式と荷重項で表わすことができる。$k=r_1/r_2$とおき覆工円環外縁($r=r_2$)における変位

成分を求めるとつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}
(u'_r)_{r=r_2} &= \frac{(1+\nu)\, r_2 M_1}{2}(-a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} (1+\nu)\, r_1 K_n \{ M_n (a_n \cos n\theta - b_n \sin\theta - b_n \sin n\theta) + M'_n (d_n \cos n\theta + C_n \sin n\theta) \} \\
(u'_\theta)_{r=r_2} &= \frac{-(1+\nu)\, r_2 N_1}{2}(a_1 \sin\theta + b_1 \cos\theta) \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} (1+\nu)\, r_1 K_n \{ N_n (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) + N'_n (d_n \sin n\theta + C_n \cos n\theta) \}
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.1\,2\,6)$$

ここに

$$M_1 = \frac{1}{E}\left\{ (1-4\nu)\frac{1}{(1-k^4)} - \frac{1}{(1-k^{-4})} \right\}$$

$$M_n = -4(1-2\nu)(n^2-1)k - 2n^2k^2 - 2(2n+1-\nu n-2\nu)k^{2n+1}$$
$$+2(2n-1-2\nu n+2\nu)k^{-2n+1} + 2n^2(3-4\nu)k^{-1}$$

$$M'_n = 4n(n^2-1)k - 2n^2k^2 - 2(n+2-2\nu n-2\nu)k^{2n+1} - 2(n-2-2\nu n+2\nu)k^{-2n+1}$$
$$-2n(n^2-4+4\nu)k^{-1} \qquad (n \geqq 2)$$

$$N_1 = \frac{1}{E}\left\{ (5-4\nu)\frac{1}{(1-k^4)} - \frac{1}{(1-k^{-4})} \right\}$$

$$N_n = 2(n+2-2\nu n-2\nu)k^{2n+1} + 2n^2k^2 - 4n(n^2-1)k + 2n(n^2+8\nu-8)k^{-1}$$
$$+2(n-2\nu n+2\nu)k^{-2n+1} \qquad (n \geqq 2)$$

$$N'_n = 2(2n+1-2n\nu-2\nu)k^{2n+1} + 2n^2k^2 - 4(n^2-1)(3-2\nu)k +$$
$$+2(5n^2-8-4n^2\nu+8\nu)k^{-1} - 2(2n-1-2n\nu+2\nu)k^{-2n+1} \qquad (n \geqq 2)$$

$$K_n = \frac{1}{2\{n^2-2(n^2-1)k^2+n^2k^4-k-2(n-1)-k^{2(n+1)}\}} \qquad (n \geqq 2)$$

(V) 円形巻立坑道を有する地山にpが作用した場合のp(s)およびq(s)の決定

直交異方性地山中の円形巻立坑道の周辺応力おかび変形は，いままでに求めた種々の荷重状態に対する有孔無限板と円環の応力および変位式を用いることによつてつぎのようにして求めることが出来る。

(i)，(ii)，(iii)で求めたところの荷重p(s)，q(s)およびpに対する円孔周縁($r=r_2$)での変位を加え合せれば，それらの荷重が同時に作用した場合の円孔内縁($r=r_2$)における変位式がつぎのように書かれる。

$$(u_r)_{r=r_2}=pr_2\ [\{(1+\beta_1+\beta_2)\cos^2\delta-\beta_1\beta_2\sin^2\delta\}a_{11}\cos^2\theta+\{(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+\beta_2^2)a_{11}\sin\delta\cos\delta$$

$$+(\frac{1+\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2}+\frac{1}{\beta_2^2})a_{22}\sin\delta\cos\delta\quad\}\sin\theta\cos\theta+\{-\cos^2\delta+(\beta_1+\beta_2\beta_1\beta_2)\sin^2\delta\}\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}$$

$$\sin^2\theta]$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\Bigg[\frac{r_2\cdot a_n}{n^2-1}[a_{11}\{n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos n\theta\cos^2+(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\cos\theta\}$$

$$+a_{12}\cos n\theta+\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n\beta_1+n\beta_2+1)\cos n\theta\sin^2\theta-(n+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\cos\theta\}]$$

$$+\frac{r_2\cdot b_n}{n^2-1}[a_{11}\{(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta\cos\theta-(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\cos^2\theta\}$$

$$-a_{12}\sin n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta\cos\theta+(n\beta_1 n\beta_2+1)\sin n\theta\sin^2\theta\}]$$

$$+\frac{r_2\cdot Cn}{n^2-1}[a_{11}\{(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos n\theta\sin\theta\cos\theta-(n\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\cos^2\theta\}$$

$$-a_{12}n\sin n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n\beta_1+n\beta_2+1)\cos n\theta\sin\theta\cos\theta+(n+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin^2\theta\}]$$

$$+\frac{r_2\cdot dn}{n^2-1}[-a_{11}\{(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\cos^2\theta+(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\cos\theta\}$$

$$-a_{12}n\cos n\theta+\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{-(n+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin^2\theta+(n\beta_1+n\beta_2+1)\sin n\theta\sin\theta\cos\theta\}]\Bigg]$$

(2.3128)

$$(u_\theta)_{r=r_2}=pr_2[(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2+\beta_2^2)a_{11}\sin\delta\cos\delta\sin^2\theta+\{(1+\beta_1+\beta_2)\cos^2\alpha$$

$$-\beta_1\beta_2\sin^2\delta\}a_{11}\sin\theta\cos\theta+\{\cos^2\delta-(\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin^2\delta\}\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\sin\theta\ \cos\theta$$

$$-\{\frac{(1+\beta_1+\beta_2)}{\beta_1\beta_2}+\frac{1}{\beta_2^2}\}a_{22}\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha\cos^2\theta]$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\Bigg[-\frac{r_2 an}{n^2-1}[a_{11}\{(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos n\theta\sin\theta\cos\theta+(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin^2\theta\}$$

$$+a_{12}\ n\sin n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n\beta_1+n\beta_2+1)\cos n\theta\sin\theta\cos\theta-(n+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\cos^2\theta\}]$$

$$-\frac{r_2 b_n}{n^2-1}[a_{11}\{(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin^2\theta-(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\cos\theta\}$$

$$+a_{12}\cdot n\cos n\theta+\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\cos^2\theta+(n\beta_1+n\beta_2+1)\sin n\theta\sin\theta\cos\theta\}]$$

$$+\frac{r_2 Cn}{n^2-1}[a_{11}\{-(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos n\theta\sin^2\theta+(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\cos\theta\}]$$

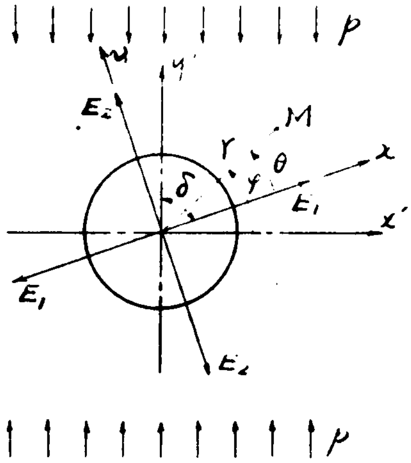


图 · 2 · 3 · 1

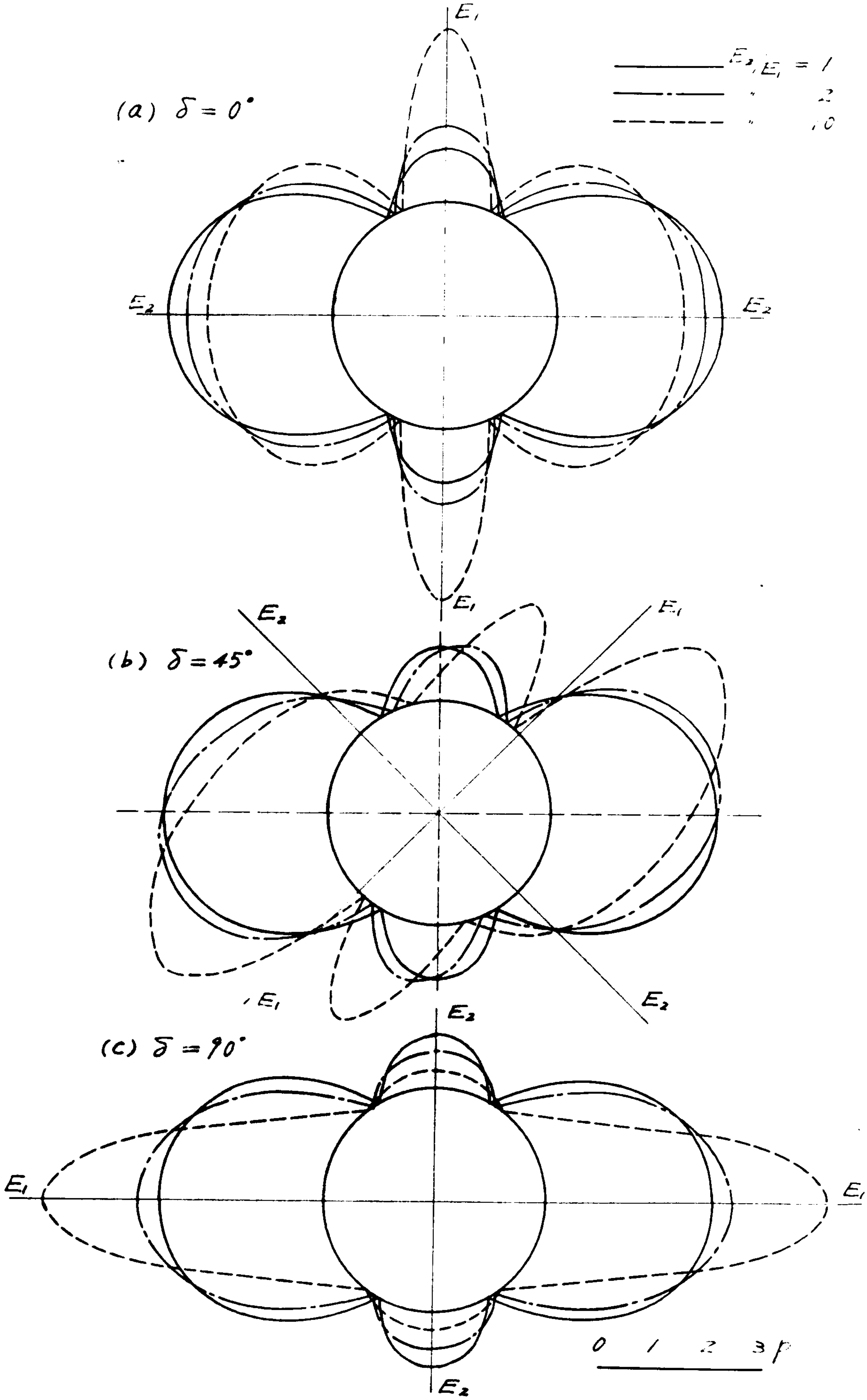


図-2·3·2

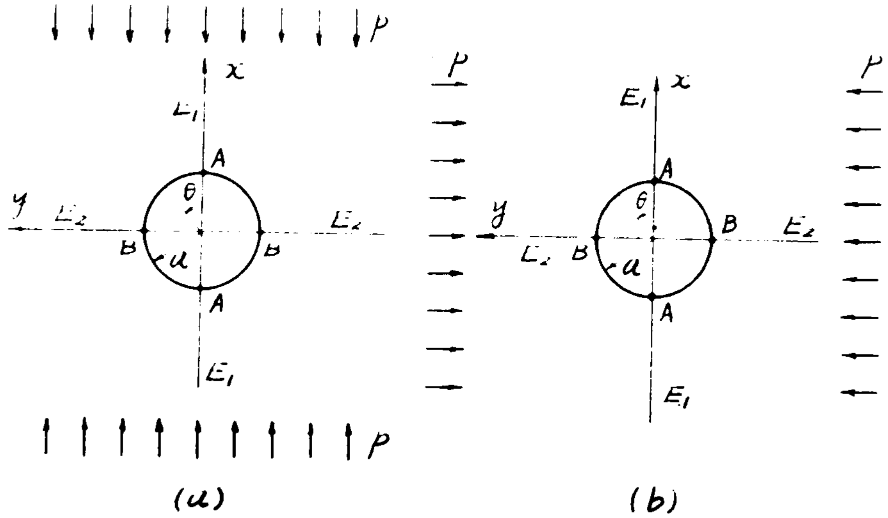
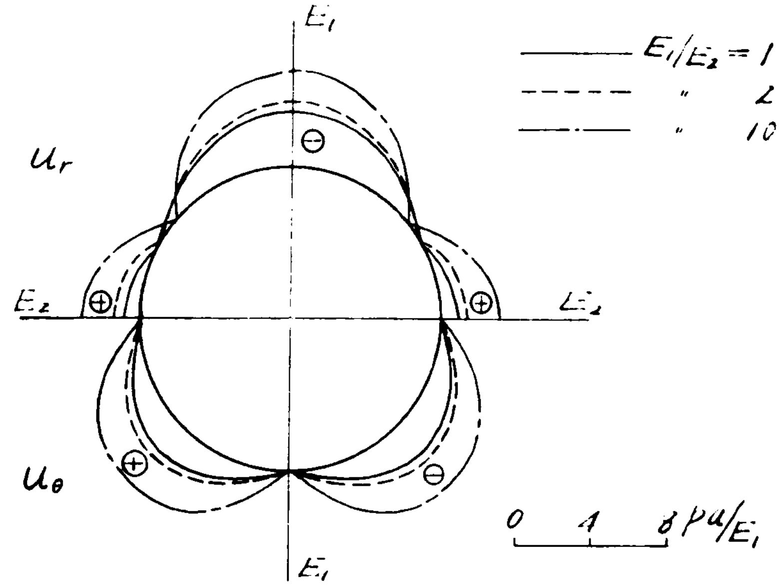
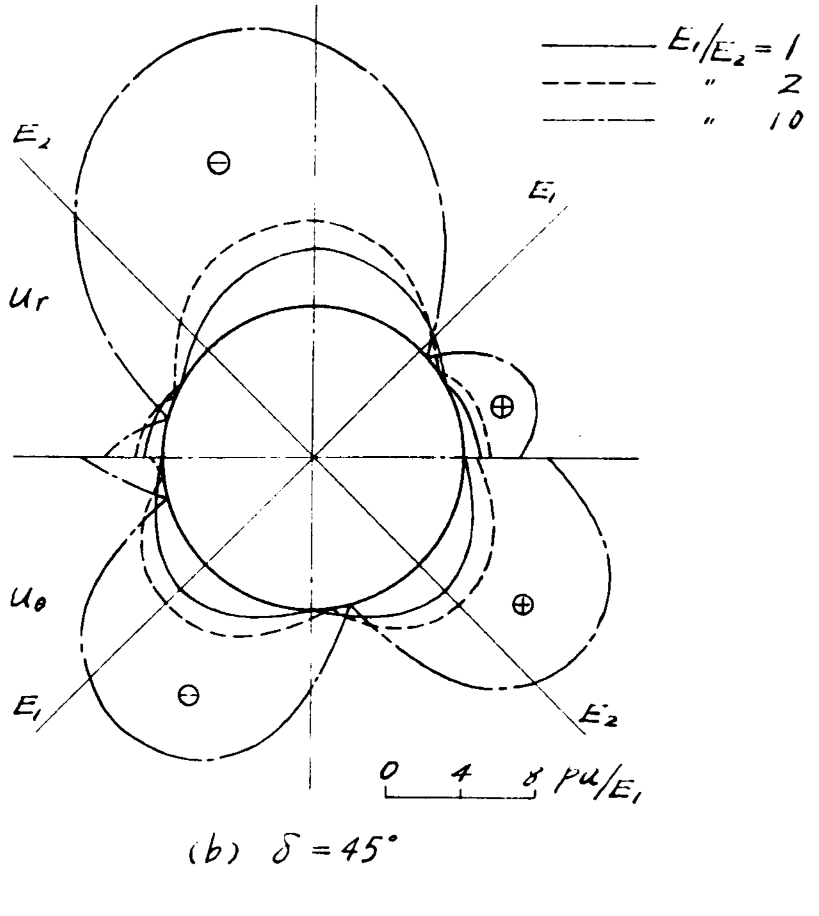


図 2·3·5

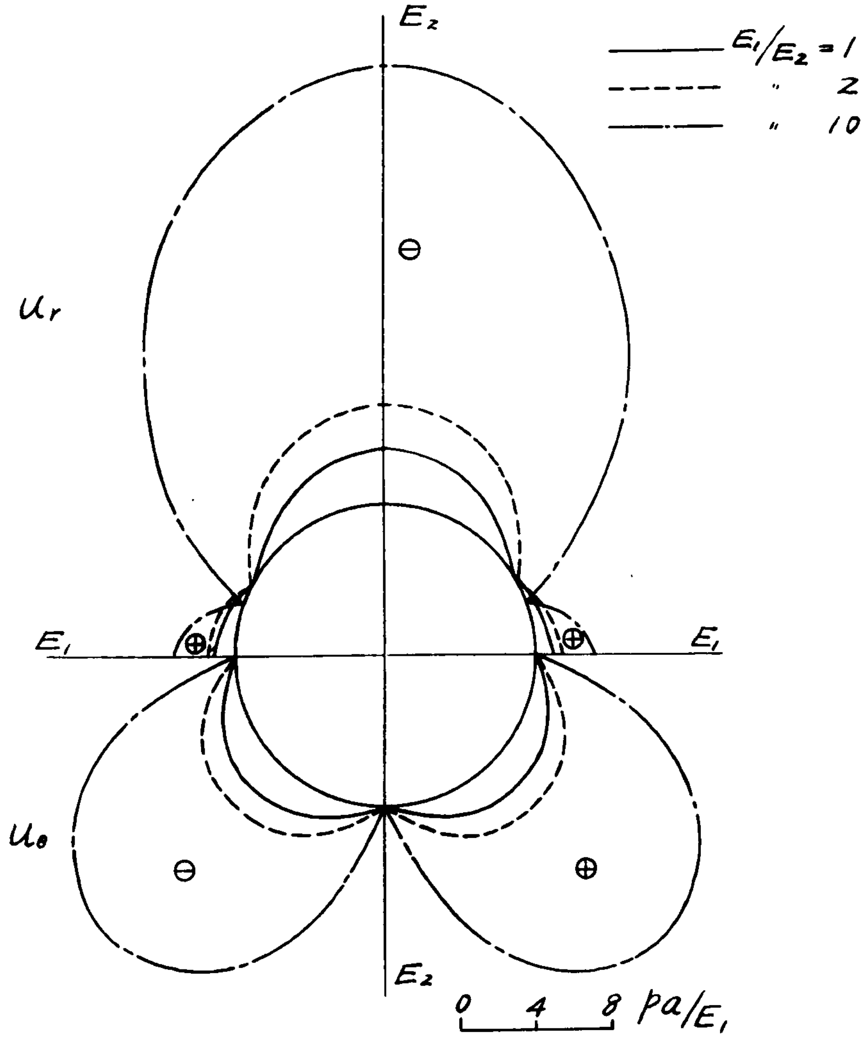


(a) $\delta = 0°$



(b) $\delta = 45°$

図-2・3・6



(c) $\delta = 90°$

図 - 2・3・6

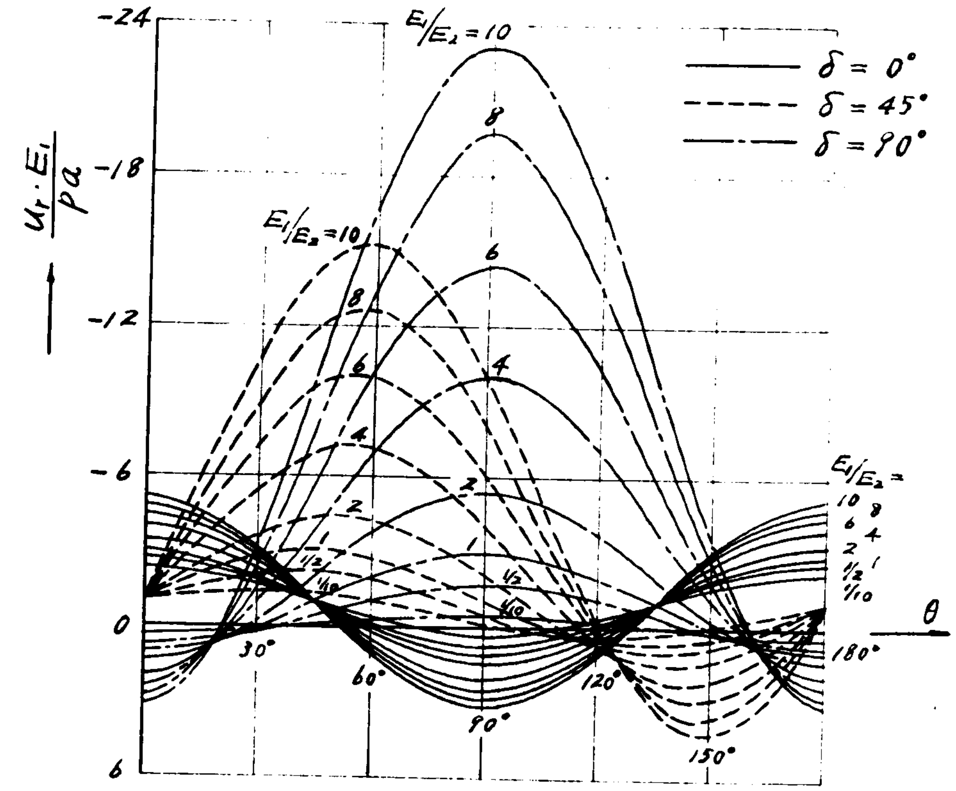


図-2·3·7 (a) U_r の変化

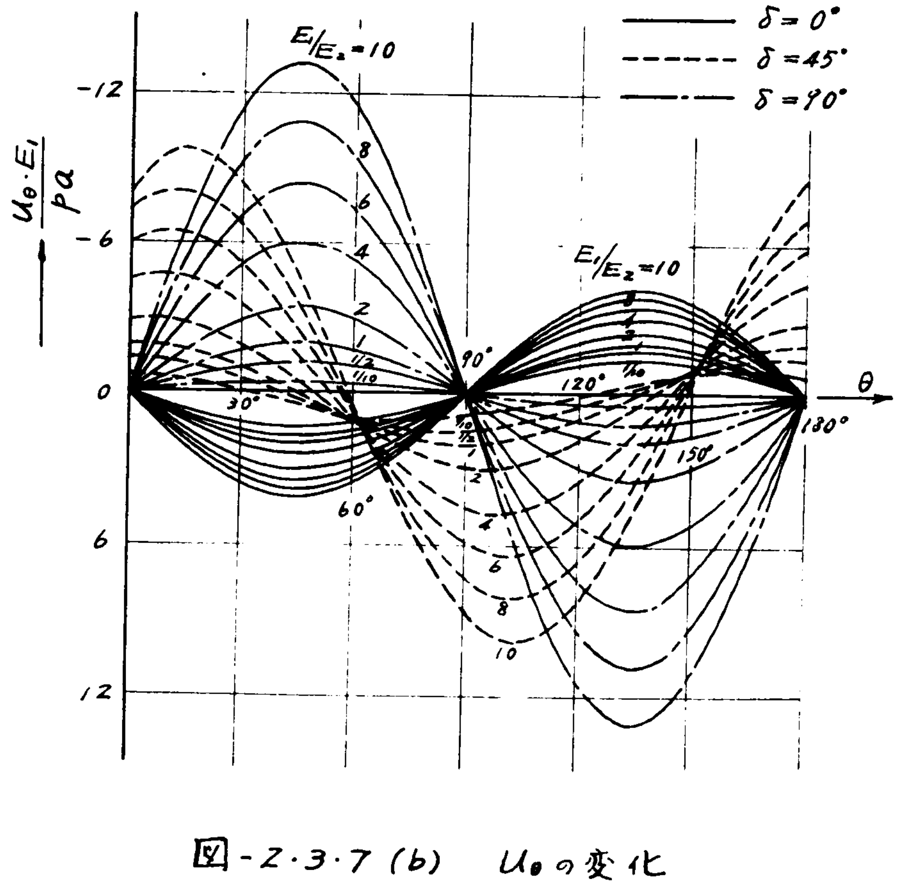
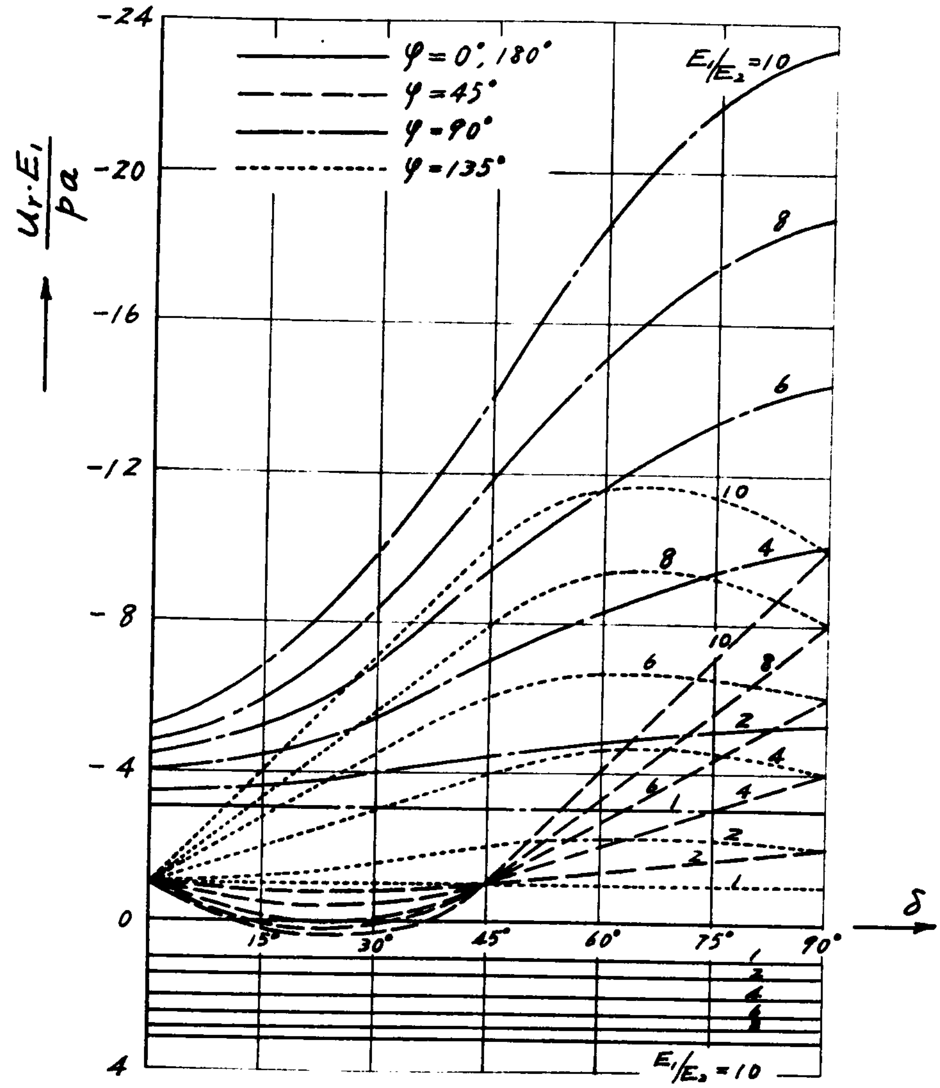
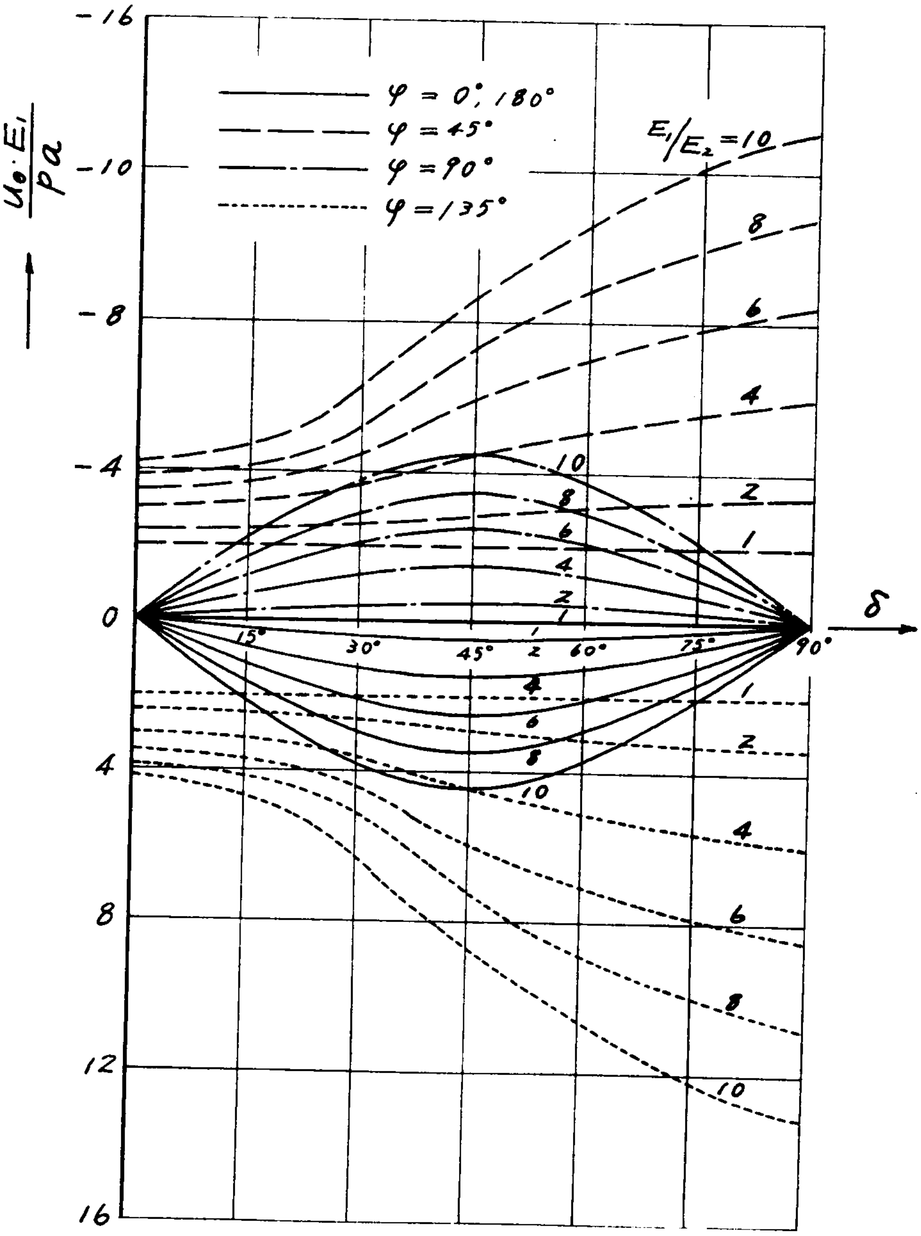


図-2·3·7 (b) U_θ の変化



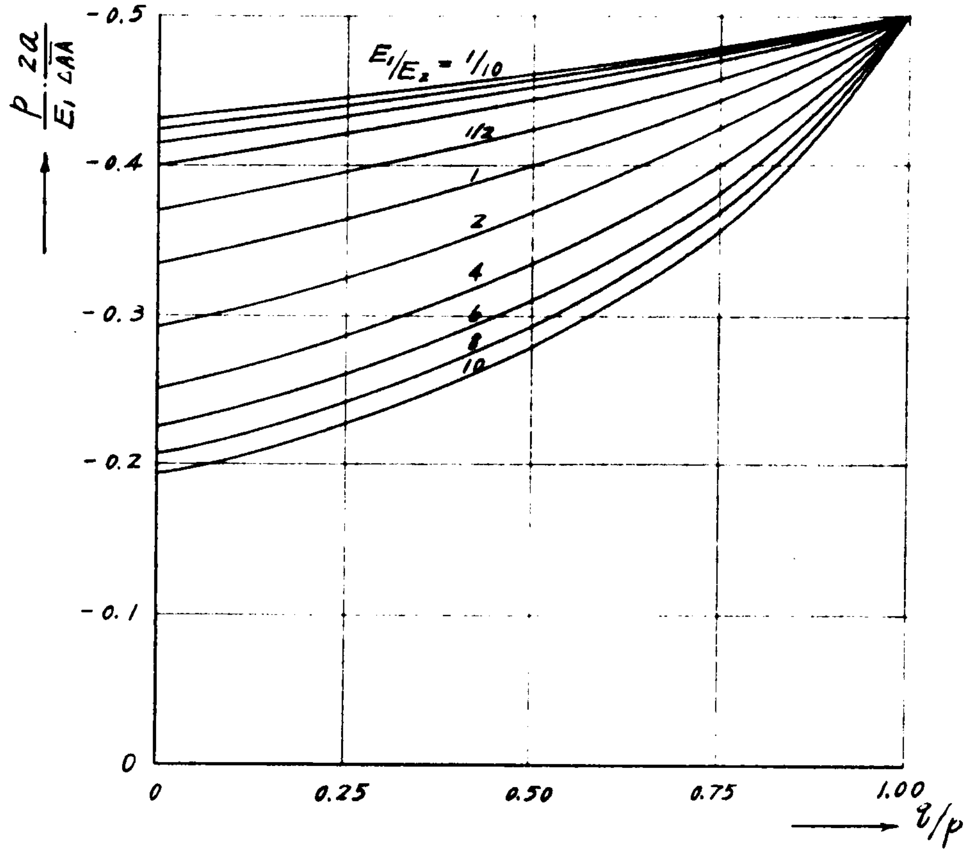
-24
-20
-16
-12
-8
-4
0
4
φ=0°, 180°
φ=45°
φ=90°
φ=135°
E₁/E₂=10
8
6
10
8
4
10
8
6
2
4
6
1
4
2
2
1
15°
30°
45°
60°
75°
90°
δ
Ur·E₁/pa
E₁/E₂=10

図-2・3・8 (a) U_r の変化



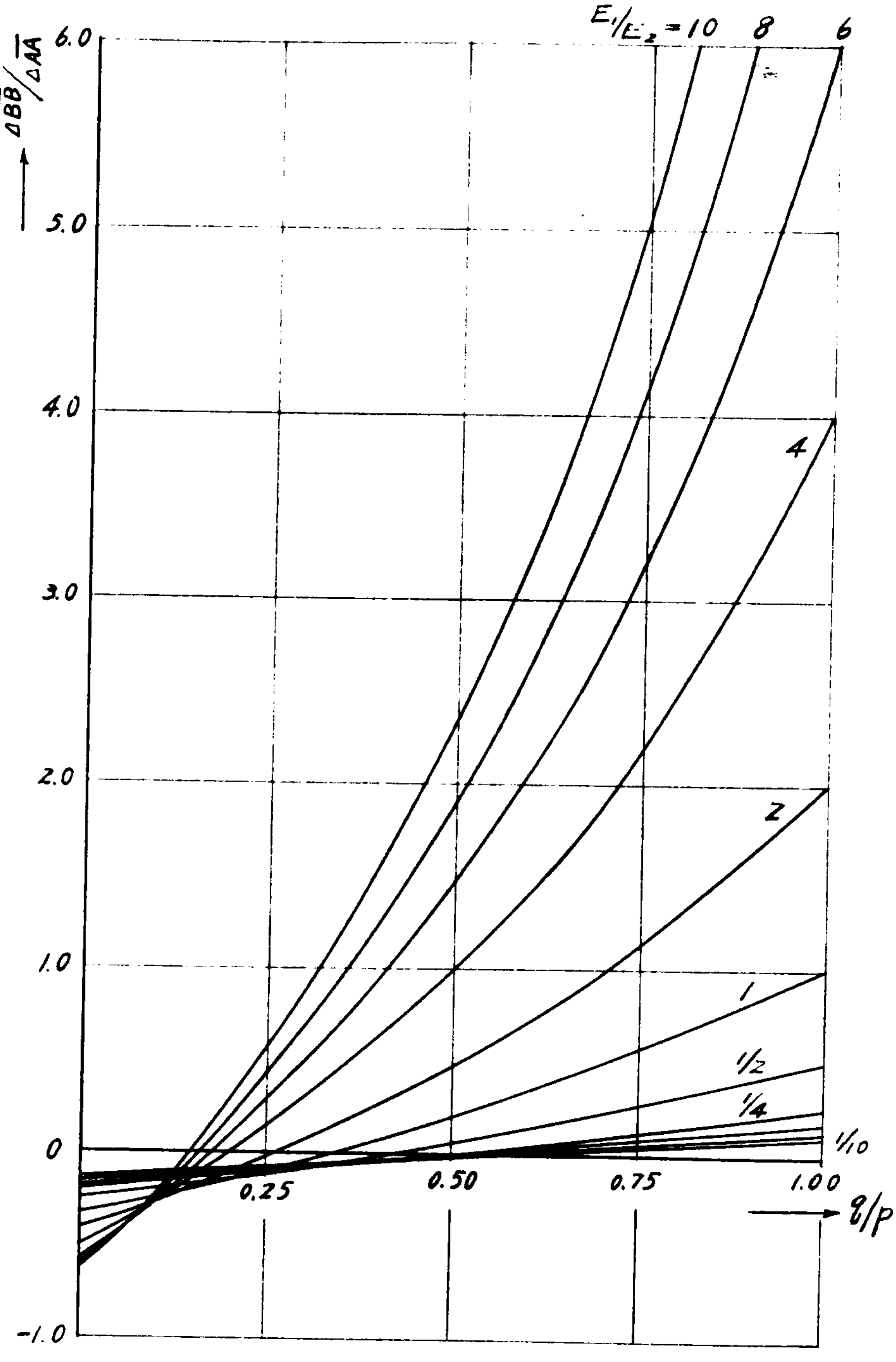
$\varphi = 0°, 180°$
$\varphi = 45°$
$\varphi = 90°$
$\varphi = 135°$
$E_1/E_2 = 10$
$\frac{u_0 \cdot E_1}{pa}$
δ
-16
-10
-8
-4
0
4
8
12
16
15°
30°
45°
60°
75°
90°

図-2・3・8 (b) u_0の変化



$\frac{p}{E_1} \cdot \frac{2a}{\iota A \lambda}$
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
$E_1/E_2 = 1/10$
1/2
1
2
4
6
8
10
0
0.25
0.50
0.75
1.00
q/p

図 - 2・3・9



$\Delta\overline{BB}/\Delta\overline{AA}$
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
-1.0
$E_1/E_2 = 10$
8
6
4
2
1
1/2
1/4
1/10
0.25
0.50
0.75
1.00
q/p

図-2・3・10

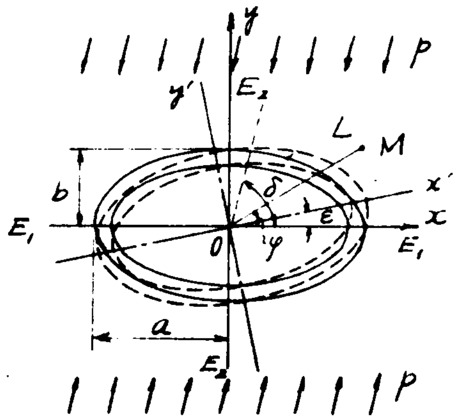


图-2·3·11

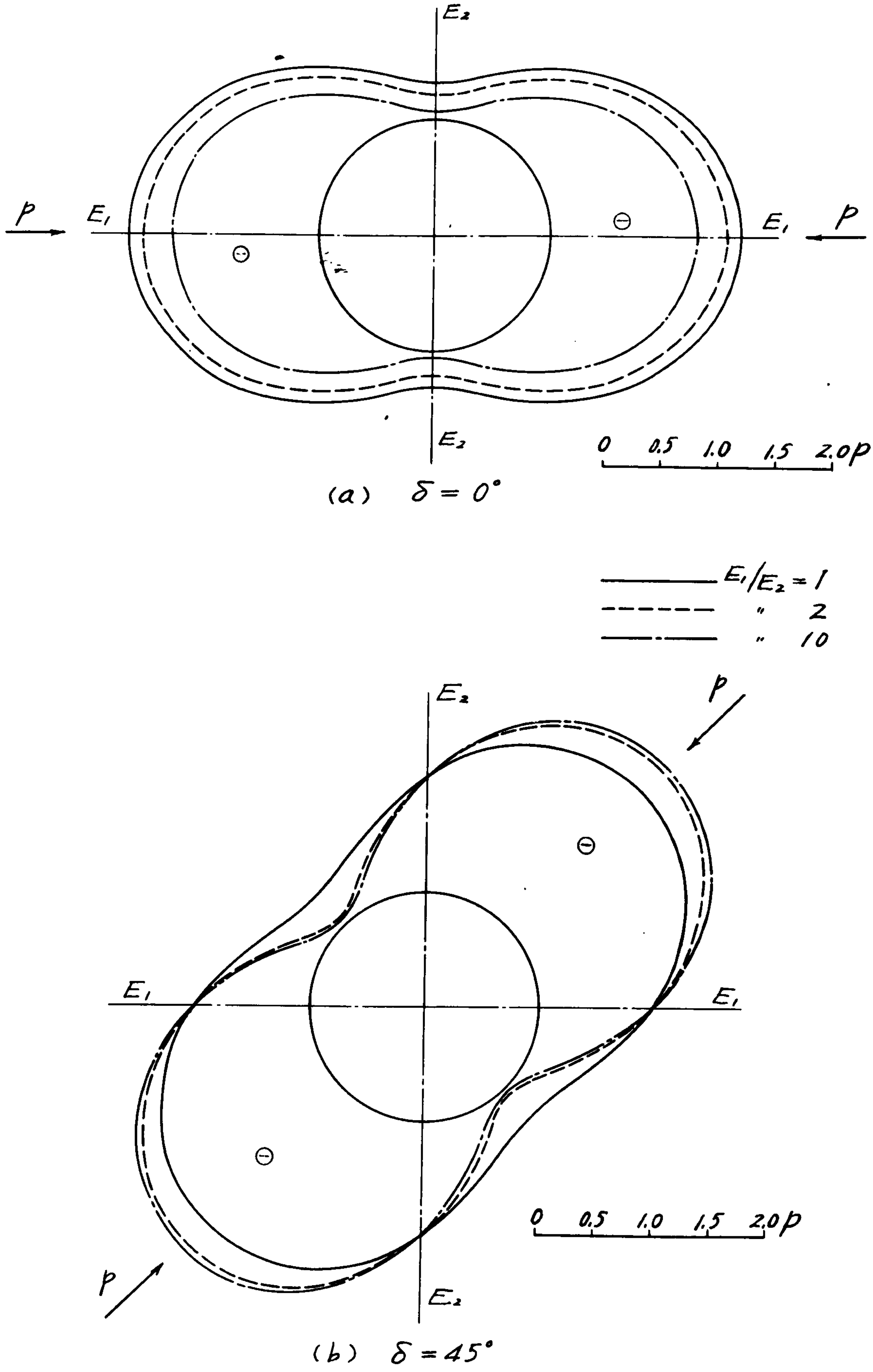
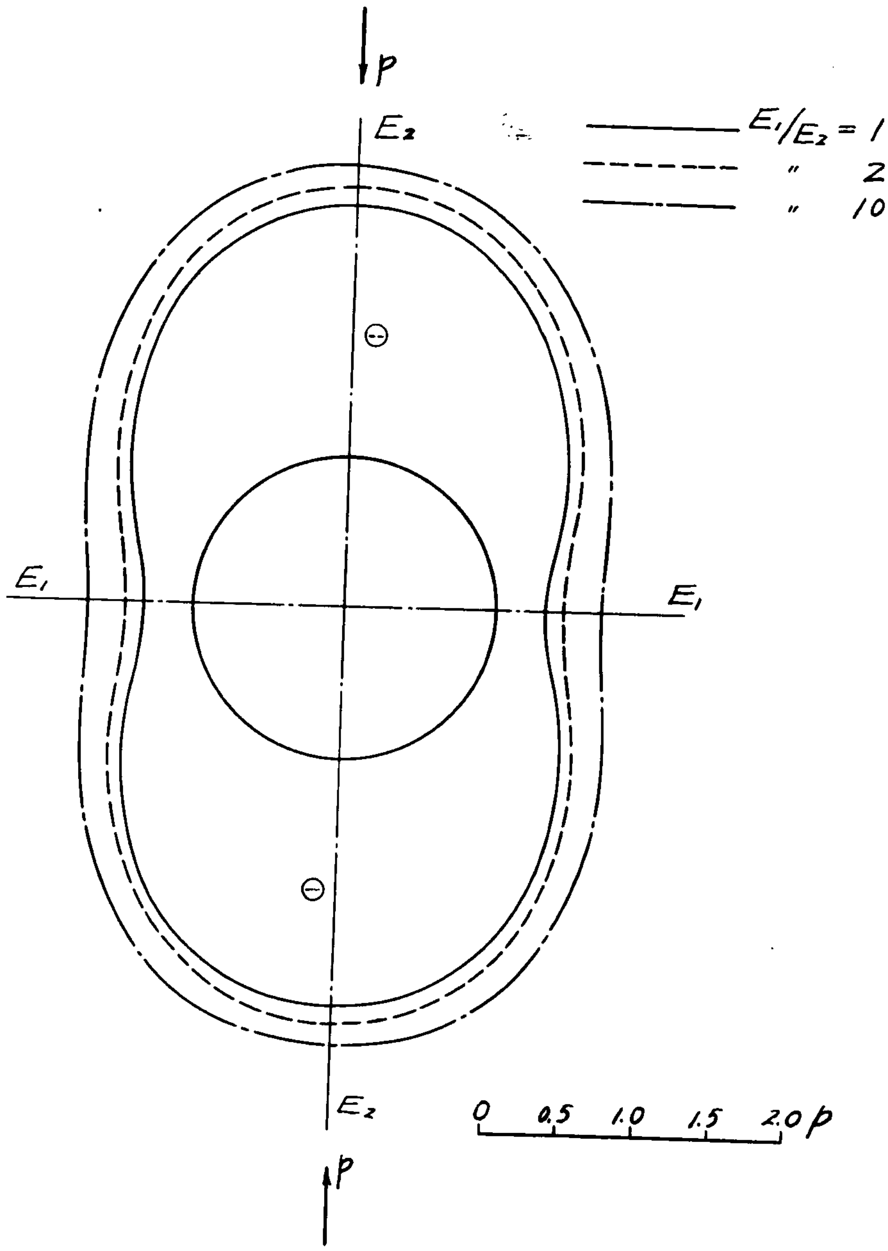
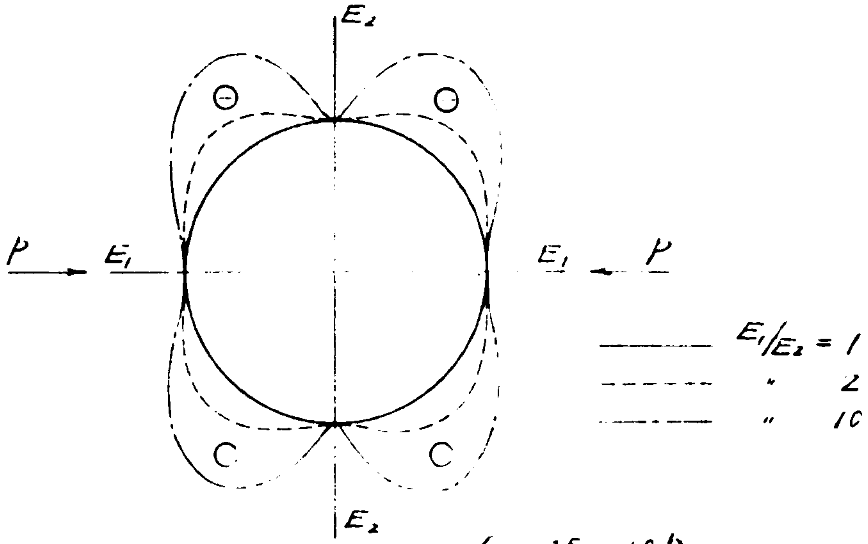


図-2·3·12 σ_r の分布

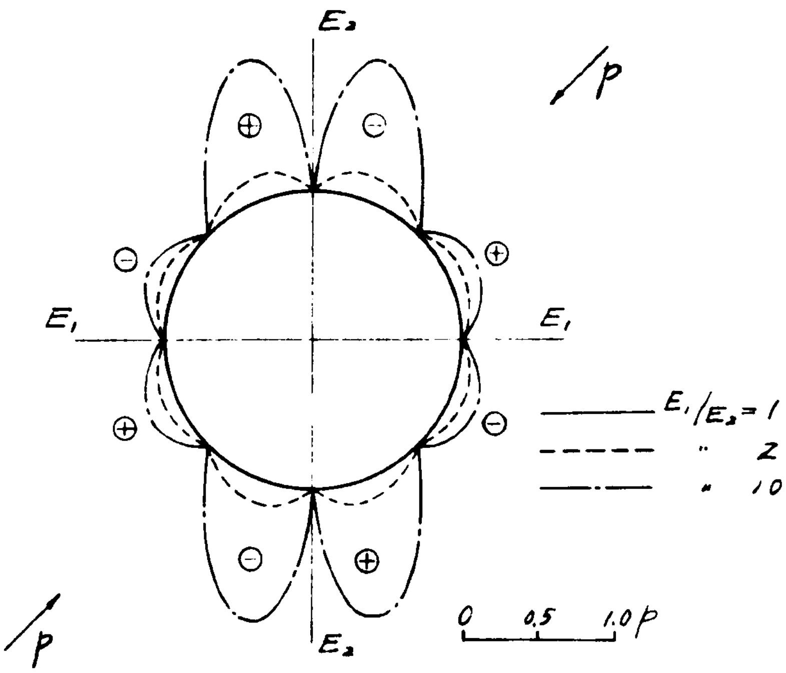


(c) $\delta = 90°$

図-2·3·12 σ_rの分布

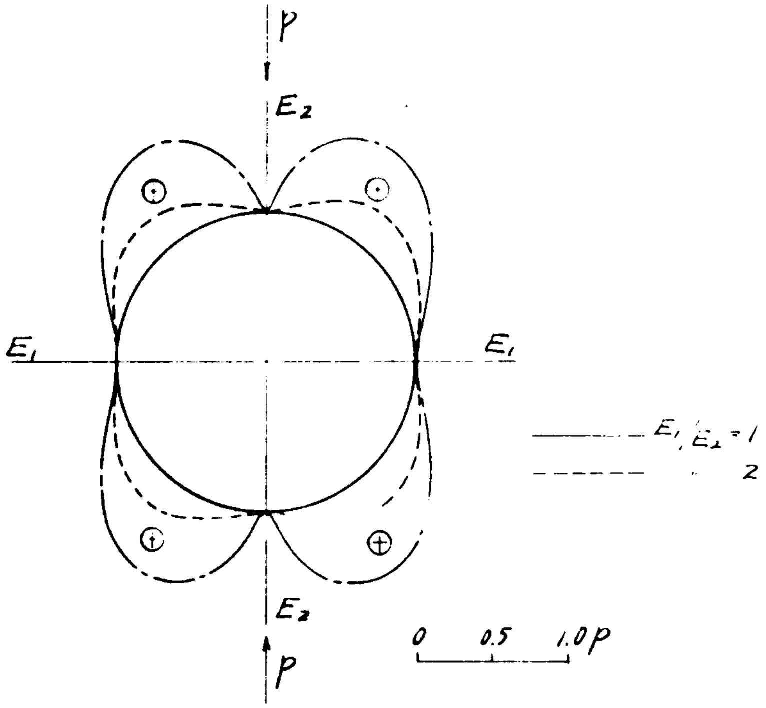


(a) $\delta = 0°$



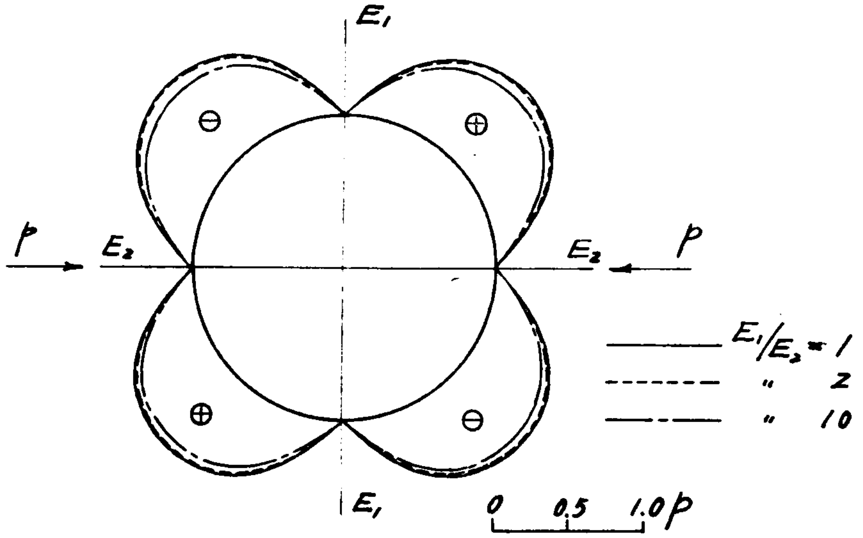
(b) $\delta = 45°$

図-2・3・13　σ_θ の分布

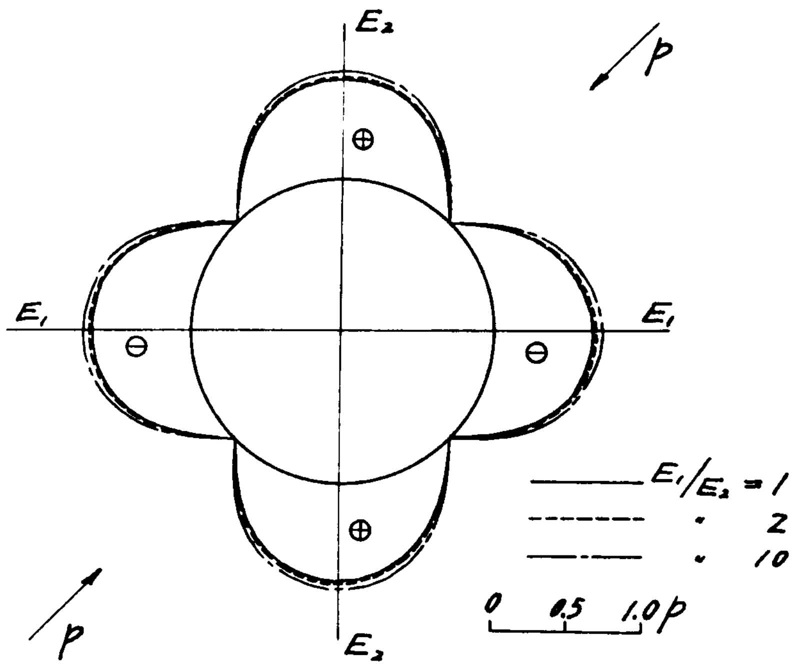


(c) $\delta = 90°$

図-2・3・13 σ_θ の分布

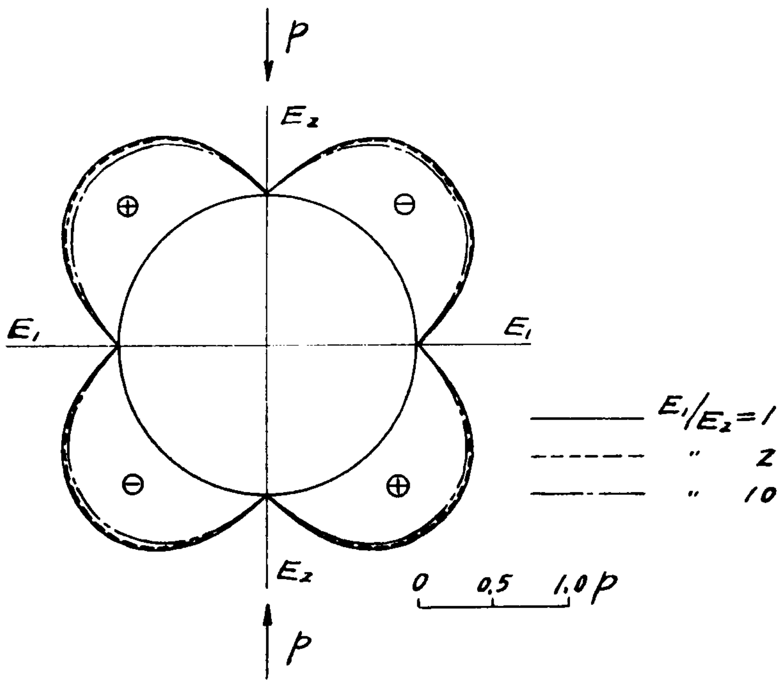


(a) $\delta = 0°$



(b) $\delta = 45°$

図-2・3・14 $\tau_{r\theta}$ の分布



(c) $\delta = 90°$

図-2・3・14 $\tau_{r\theta}$ の分布

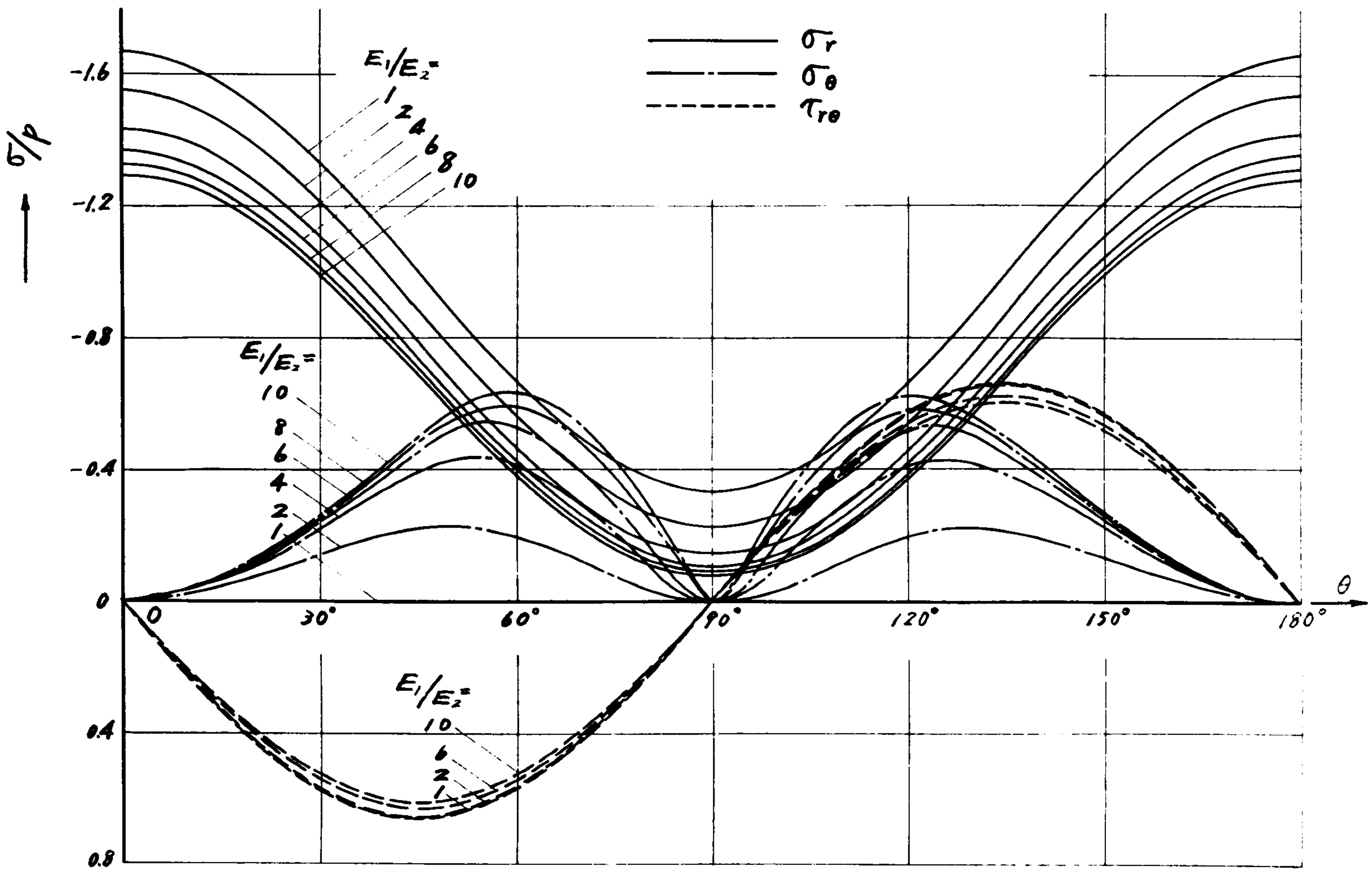


図-2·3·15(a)　$\delta = 0°$

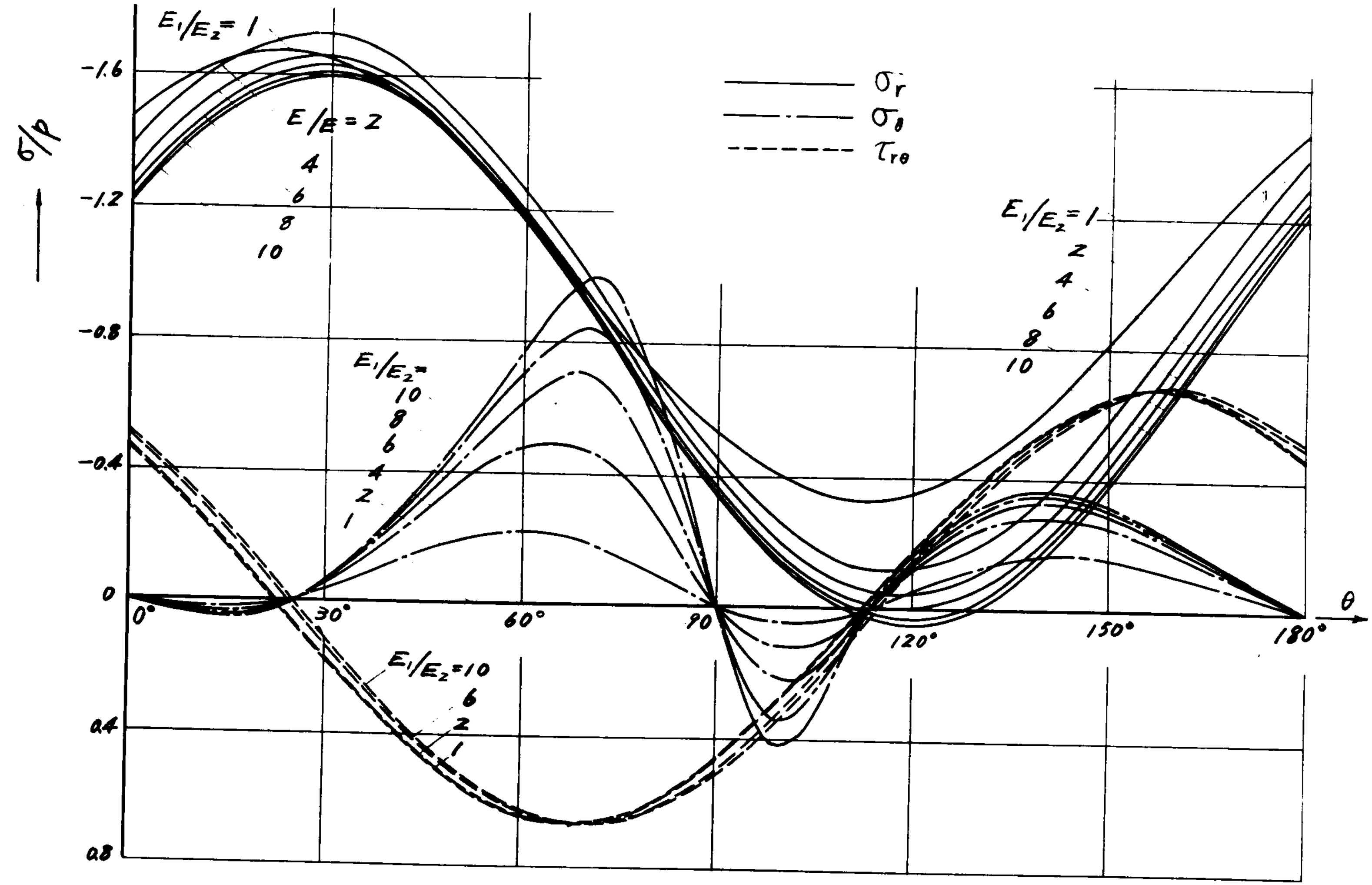


図-2·3·15 (b)　$\delta = 22.5°$

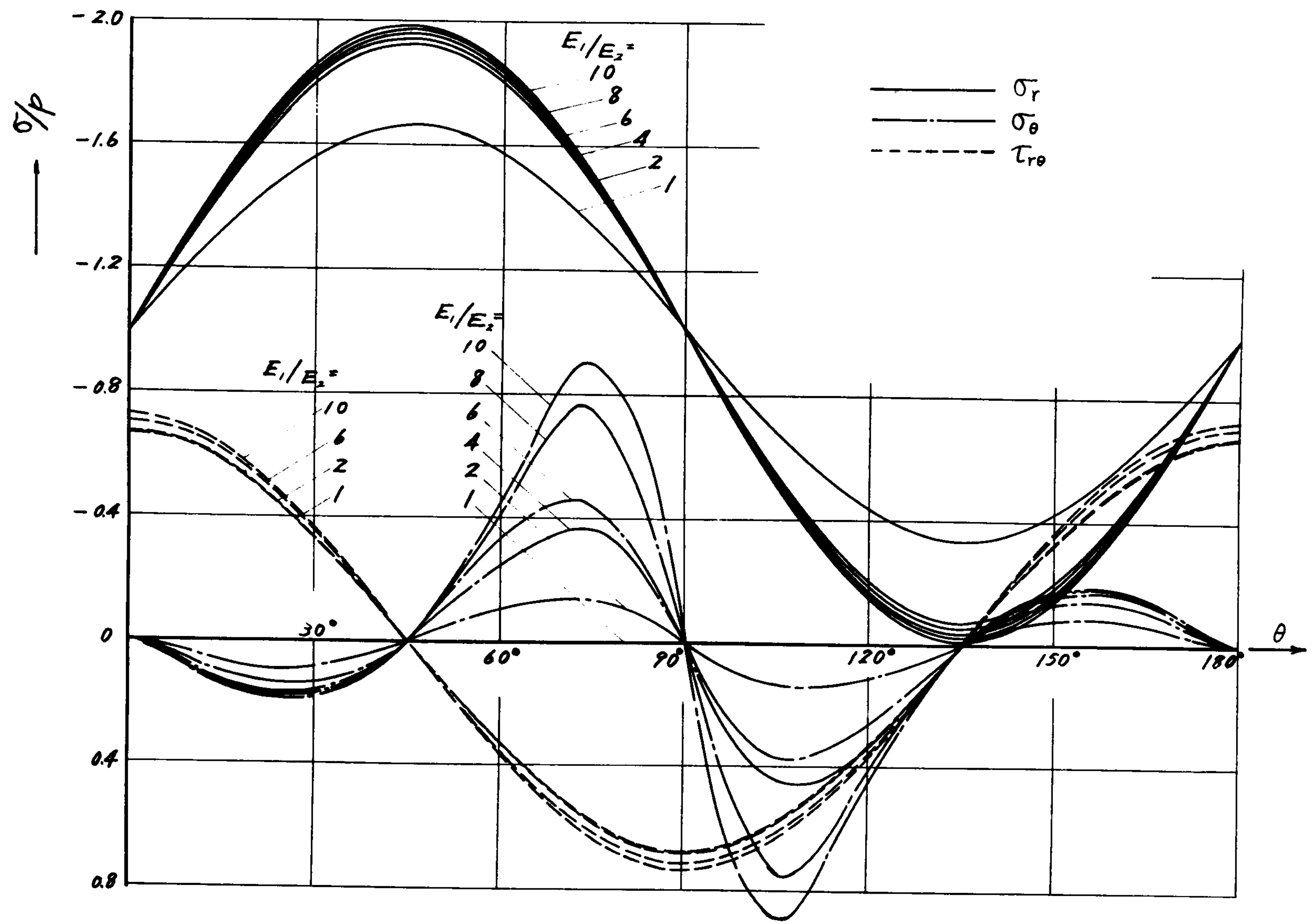


図-2·3·15 (c)　$\delta = 45°$

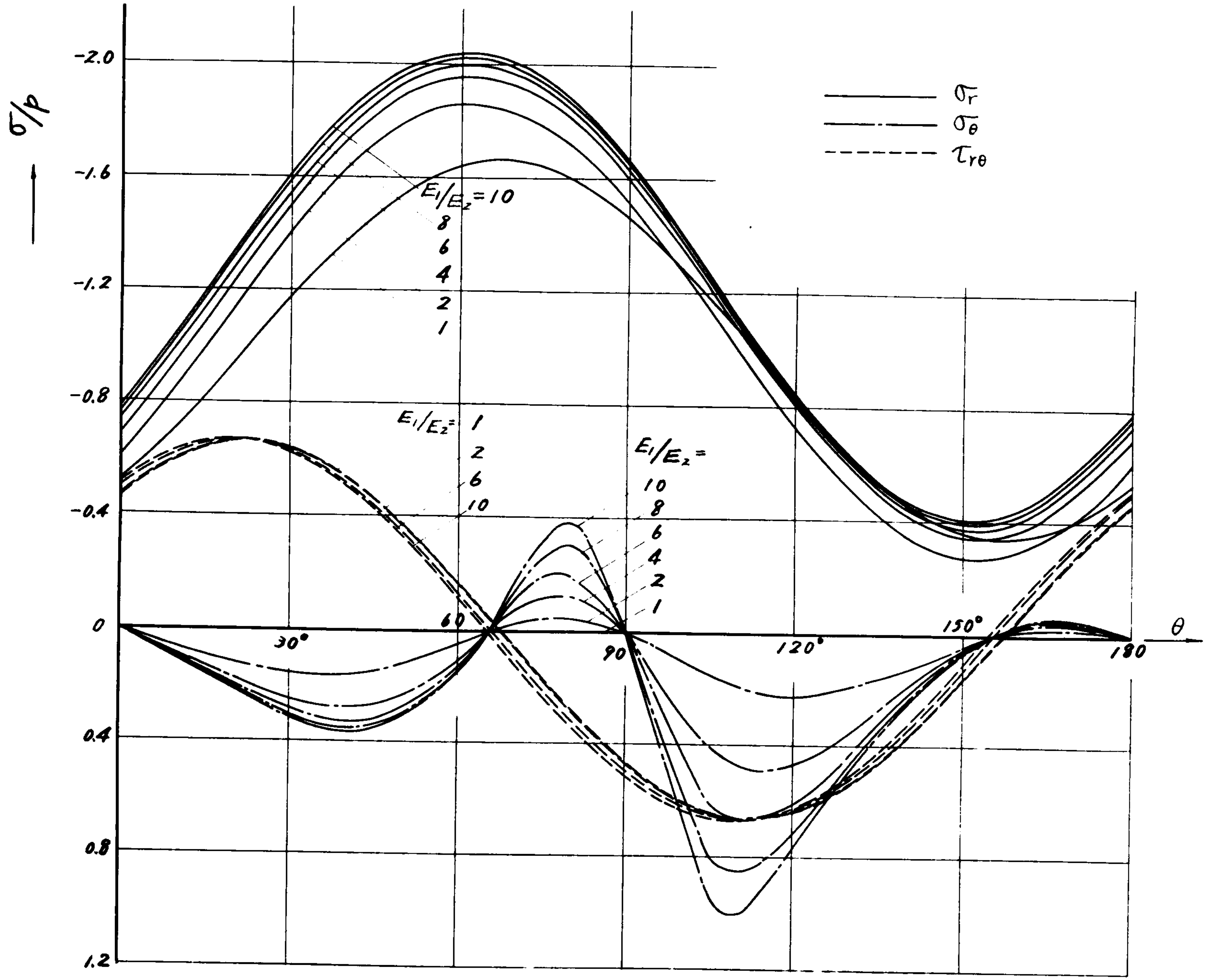


図-2・3・15(d)　$\delta = 67.5°$

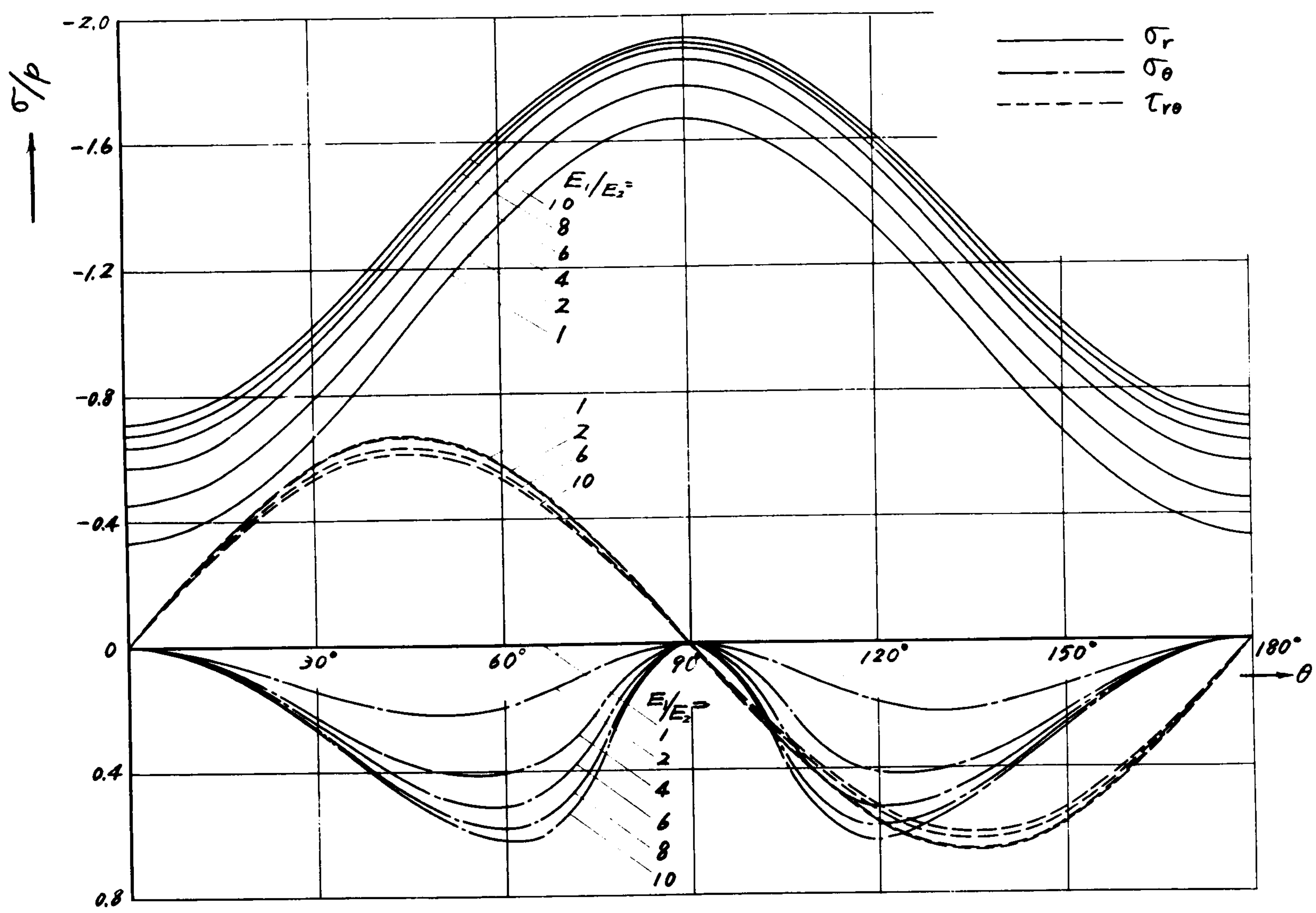


図-2.3.15 (e)　$\delta = 90°$

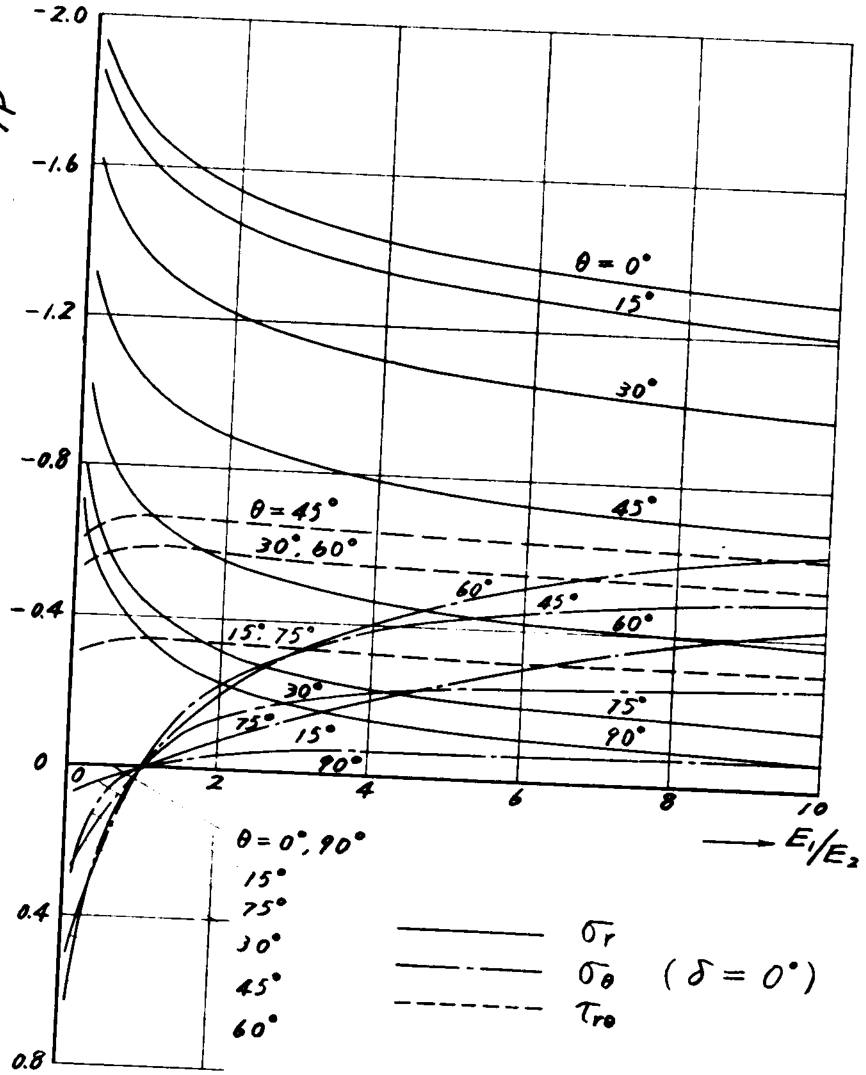

-2.0
σ/p
-1.6
-1.2
-0.8
-0.4
0
0.4
0.8
0
2
4
6
8
10
E1/E2
θ = 0°
15°
30°
45°
θ = 45°
30°, 60°
60°
45°
60°
15°, 75°
30°
75°
90°
75°
15°
90°
θ = 0°, 90°
15°
75°
30°
45°
60°
σr
σθ
τrθ
(δ = 0°)

図 - 2・3・16

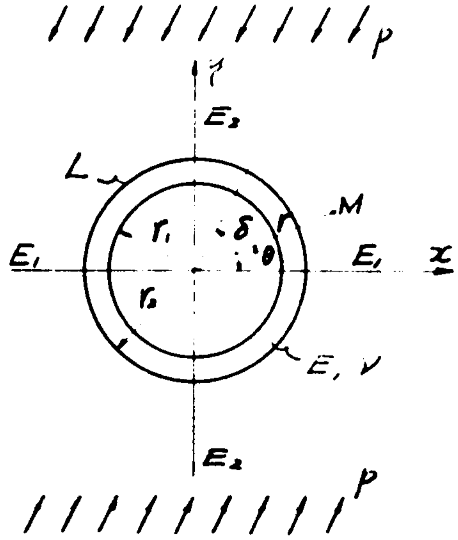


図 - 2・3・17

$$-a_{12}\cos n\theta-\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{(n\beta_1+n\beta_2+1)\cos n\theta\cos^2\theta+(n+\beta_1+\beta_2)\sin n\theta\sin\theta\cos\theta\}]$$

$$+\frac{r_2 C_n}{n^2-1}[a_{11}\{(n\beta_1\beta_2+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta\cos\theta+(n\beta_1+n\beta_2+\beta_1\beta_2)\sin n\theta\sin^2\theta$$

$$+a_{12}\sin n\theta+\frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2}\{-(n+\beta_1+\beta_2)\cos n\theta\sin\theta\cos\theta+(n\beta_1+n\beta_2+1)\sin\theta\cos^2\theta\}]\Big] \quad (2.3.129)$$

円形覆工と円孔との境界線における境界条件のうち$u_r=u_r'$ および$u_\theta=u'_\theta$ を考慮すれば，すなわち（2.3.128）式および（2.3.129）式をそれぞれ（2.3.126）式の才1式および才2式と等置すれば，荷重p（s）およびp（s）中に含まれる係数a_n，b_n，C_n，d_n 等を含む式をうる。それらを解いて係数a_n，b_n，C_n，d_n 等を求めれば荷重p（s），q（s）の形が定まり，さらにいままで導いてきた各式にその値を入れることにより，直交異方性地山および円形覆工内における応力および変位を求めることができるわけである。$u_r=u'_r$ および$u_\theta=u'_\theta$ なる条件は円孔周辺のすべての位置において，言いかえればθの値のいかんにかかわらず成立しなければならないが，（2.3.126）式は$\sin n\theta$, $\cos n\theta$の項にまとまつているが（2.3.128）および（2.3.129）式は簡単に$\sin n\theta$, $\cos n\theta$の項にまとめることは困難であり，したがつてこれらの等式より係数a_n, b_n, C_n, d_n 等を直接に求める式を導くことはむづかしい。しかし近似的に円孔周辺上のいくつかの点において，$u_r=u''_r$，$u_\theta=u'_\theta$ なる条件を満足するように係数を定めることができる。円孔周辺上の位置を定めれば，採りうべき係数の項数が定まるし，逆に荷重式の項数を決定すれば，それに対応するだけの円孔周辺上の位置を定めて境界条件を与えねばならない。

この問題の場合は円孔周辺上において荷重p（s）およびq（s）は$\theta=\theta_1$ と$\theta=\pi+\theta_1$ の位置においては同じ値をとらねばならないから，つぎのように与えられねばならない。

$$p(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}\cos 2n\theta-b_{2n}\sin 2n\theta)$$

$$q(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_{2n}\cos 2n\theta-d_{2n}\sin 2n\theta) \quad (2.3.130)$$

とくに無限遠における等分布荷重pが弾性主軸の方向と一致する場合には，

$$\left.\begin{aligned} p(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos 2n\theta \\ q(s)&=-\sum_{n=1}^{\infty}d_{2n}\sin 2n\theta \end{aligned}\right\} \quad (2.3.131)$$

で与えられる。

第4章　層状弾性地山における水平坑道周辺応力状態

成層状態の地山内に坑道が開削される場合の坑道の直接天盤の応力状態および沈下さらに破壊現象などについては、ふるくから梁理論を用いて説明され、また種々の観測や模型実験が行われてきている。現在においても鉱山現場などでは簡単に梁理論を用いて直接天盤の応力を推定し、支保工に対する資料としている。玉田[38)]は炭鉱の水平坑道における現場実測を行い、天盤の動きおよび曲げ状況を観測し、その結果よりつぎのような理論的取扱いの可能なことを指摘して、天盤，側壁応力を算定している。すなわち坑道開坑時、天盤は自重によつて沈下する部分と、そうでない部分に大別でき、前者は実測によると一応梁と見なしてよいので、この部分は *beam* 圧として側壁に反力およびモーメントを起させ、後者は *dome* として地山中全般に分布する *dome* 圧となると考えている。しかして直接天盤の応力算定は両側壁によつて弾性支持された梁として行われている。平松、岡[29)]はセメントモルタルで作られた成層面のある長壁採炭切羽の模型を用いて、バロダイナミツク実験を行い、天盤の破壊を検討して、直接天盤は単独に自重によつて破壊することを確めている。したがつて長壁切羽の場合には直接天盤は梁理論により、天盤を極端に単純梁および固定梁として計算した最大曲げ応力の中間の間で破壊するわけである。この点については著者が行つたゼラチン模型による実験結果（第3篇で述べられる）と比較考察されるが、こゝでは第1篇で述べたような層状地山の理論的な取扱いに基いて坑道応力を求めることにする。

さきにも述べたように、梁理論による直接天盤の最大曲げ応力は、天盤の梁がいかなる状態で支持されているかによつて異なるがさらに直接天盤とその上の層との成層面における引張強度およびせん断強度にも関係してくる。第1篇でも指摘したように、層状地山の各成層面間の相対的変位の自由度を考慮した厳密な数学的取扱いは容易でないので、成層面における附着が完全で層間の相対的変位を生じない場合と、層間に摩擦の働かない場合の2つの極端な場合を考慮することにするが、実際の成層状態では層間の相対的な移動を生じたり、あるいは硬い岩盤の間にある軟弱な中間層が塑性変形をおこすような状態になつても、完全に層間の摩擦が失われることはないから、2つの極端な場合の中間の状態にあることは明らかである。

つぎのように地山が同一種類の層よりなる場合と2種の性質の層の互層よりなる場合に分けて考えることにする。

4・1　地山が同一種類の層よりなる場合

層間の附着が充分である場合には等方等質の弾性体として地山を取扱うことができる。
層間に摩擦が働かないような極端な場合を考えると、層自身は等方性であるが、層間の連続性が切断されることによつて地山全体としては異方性を呈するようになる。いま図2・4・1に示す

ような水平層よりなる地山中の正方形坑道を考えると、坑道の上盤および下盤の中央Aには引張応力を生ずる。層間摩擦が層の境界になんら変位を生じない程度の場合には$\sigma_A=p$で与えられるが、反対の極端な場合として摩擦が働かないと考えるときには、第1篇第3章、3・2で述べたごとく、梁理論を用いて*G. Sonntag* が導いた式(1・3・38)が用いられる。すなわち坑道断面に対して層の高さが小さいときには、中点Aにおける最大引張応力は層の高さに無関係に、つぎのような限界値

$$\sigma_A=\sqrt{3}\,p \qquad (2\cdot4\cdot1)$$

に近づく。この値はまたほかの断面形に対しても近似的に適用される。なお側壁Bにおける圧縮応力σ_Bは層の高さの減少するにつれて増大するが、このことを理論的につかむことは困難であるので、第3篇で行つた実験により考察することにする。

坑道の開削によつて直接天盤に(2・4・1)式による周辺引張応力を生ずるが、この曲げ引張応力が地山の内部にわたつていかに変化してゆくか、すなわち開坑による応力擾乱がどのように消滅してゆくかを調べるために、*G. Sonntag* 40) は(1・3・33)式〜(1・3・38)式を用いてつぎのような計算を行つている。

図2・4・1において$y\geqq o$なる半無限平面を考え、各層の高さは等くしhであるとする。この半無限平面の縁$y=o$に(1・3・35)式で与えられるような分布荷重

$$\sigma y(y=o)=p_o+p_1\cos\frac{\pi}{l}x \qquad (2\cdot4\cdot2)$$

が作用するものとすれば、層の曲げ応力は(1・3・37)式よりつぎのようにえられる。

$$\sigma x=\pm p_1\sqrt{2}\;e^{-\lambda y}\cos\frac{\pi}{l}x \qquad (2\cdot4\cdot3)$$

$$\text{こゝに}\quad \lambda=\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}\;\frac{h}{l^2}$$

上式より判るごとく、層の高さhが減少すれば、曲げ応力は一層ゆつくりと消失する。
また$h<l$と仮定すれば、$y=o$に対しては(2・4・3)式は層高hに無関係な(2・4・1)式を与える。いま地山の初期荷重として鉛直成分pのみを考える。この地山に幅$2b$の矩形坑道がうがたれた場合には、坑道断面の幅$2b$の水平縁(直接天盤)において鉛直方向の応力が伝達されないようになり、元来の等分布鉛直応力状態pが擾乱される。この場合の坑道周辺の岩盤内の新しい応力状態は、図2・4・2(a)に示すごとく坑道の水平縁に引張応力pを重ね合せることによりえられる。図2・4・2(b)に示す荷重状態は図2・4・2(c)，図2・4・2(d)の2つの状態に分けられ、それぞれの荷重分布を級数で表わすとつぎのようになる。

図(c)に対して、

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\sigma_y}(y=o)=\sum_{m=1,2,3,\cdots}^{\infty}\overline{p_m}\cos\frac{m\pi x}{l}\\&\text{こゝに、}\quad\overline{p_m}=\frac{pl}{\pi l'}\frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi l'}{l}\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot4\cdot4)$$

図(d)に対して

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\overline{\sigma_y}}\ (y=o)=\sum_{m=1,2,3,\cdots}^{\infty}\overline{\overline{p_m}}\cos\frac{m\pi x}{2l}\\&\text{こゝに、}\quad\overline{\overline{p}}_m=\frac{2pl}{\pi l'}\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{m}\left(\cos\frac{m\pi l'}{2l}-\frac{l-l'}{l}\right)\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot4\cdot5)$$

この場合長さ2 b なる縁に沿う荷重 p に対する周辺岩盤内の反力による応力およびその分布状態が問題になるが、上式では簡単に坑道上下盤の隅より内部にわずかな範囲(l')にわたつて等分布するとし、その大きさを p' としているが、G, Sonntag は $l'/l=0.25$ にとつており、したがつて $p'=3p$ となる。

結局坑道天盤から地山内に入るにしたがつて、すなわち坑道からの鉛直距離の増加に伴う最大曲げ応力の変化は、坑道の中央線上($x=o$)において、(2・4・4)式および(2・4・5)式よりつぎのように求められる。

$$\sigma x\,(x=o)=\pm\sqrt{3}\left\{\sum_{m=1,2,3,\cdots}^{\infty}\overline{p}_m\,e^{+\lambda m^2 y}+\sum_{m=1,2,3,\cdots}^{\infty}\overline{\overline{p}}_m\,e^{\frac{-\lambda m^2 y}{4}}\right\}\qquad(2\cdot4\cdot6)$$

上式を用いて行つた数値計算の1例を示せば図2・4・3のようであるが、これによつて層間に摩擦が働かないような極端な場合においては、層の高さの減少あるいは層高に対する坑道巾の比 $2b/h$ の増加に伴う曲げ応力がいかに減少するかゞ判る。

4・2　地山が2種の性質の層よりなる場合

各層間の附着が充分であつたり、または作用する地圧が小さくて層間のせん断抵抗に打克つて層間相互に変位を生ずることのない場合には異方性地山の場合と同様に取扱うことができる。たゞしこの場合地山の異方性を示すところの主弾性係数 E_1 および E_2 は各層の弾性性質および層高によつて定まり、図2・4・4に示すごとく2種の層Ⅰおよび層Ⅱの規則的な互層地山を考えると、(実際には地山全体がこのような状態にあることはまれであるが、坑道を掘削する附近の地山が局部的にこのような状態とみなせる場合が考えられる。)地山全体としての合成主弾性係数 E_1 , E_2 は(1・3・21)式および(1・3・22)式で与えられ、さらに主弾性係数比 E_2/E_1 は(1・3・27)式のように層高比 α と層の弾性係数比 β で与えられる。この合成主弾性係数 E_1 , E_2 を用いれば、層の傾斜のいかんにかゝわらず、円形坑道周辺応力および変位状態は第3章の3・1, 3・2で述べた方法により求められる。

いま図２・４・５のように水平な層状地山内に円形坑道を開削した場合を考え、（２・３・20）式を用いてとくに重要な上下盤Aおよび側壁Bの周辺応力を求めると、つぎのようになる。
なおこの場合も$\nu_1 = 0$と仮定すれば
$1/G = 1/E_1 + 1/E_2$となるから、側壁の圧縮応力は、

$$\sigma B = -p\left[1+\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}-\nu_1\right)+\frac{E_1}{G}}\right] = -p\left(2+\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}\right)$$

$$= -p\left[2+(1+\alpha)\sqrt{\frac{\beta}{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}}\right] \qquad (2\cdot4\cdot7)$$

また上下盤A点の引張応力は層Ⅰおよび層Ⅱに対して、

$$\sigma A_{\mathrm{I}} = p\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \times \frac{E_{\mathrm{I}}}{E_2} = p\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha\beta)\beta}} \qquad (2\cdot4\cdot8)$$

$$\sigma A_{\mathrm{II}} = p\sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \times \frac{E_{\mathrm{II}}}{E_2} = p\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)\beta}{1+\alpha\beta}} \qquad (2\cdot4\cdot9)$$

つぎに図２・４・６のように極端に層が鉛直方向にある場合は、上と同様にして

$$\sigma A = p\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = p(1+\alpha)\sqrt{\frac{\beta}{(1+\alpha\beta)(\alpha+\beta)}} \qquad (2\cdot4\cdot10)$$

$$\sigma B_{\mathrm{I}} = -p\left(2+\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right)\frac{E_{\mathrm{I}}}{E_2}$$

$$= -p\left[\frac{2(1+\alpha)}{1+\alpha\beta}+\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)}{\beta(1+\alpha\beta)}}\right],$$

$$\sigma B_{\mathrm{II}} = -p\left(2+\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right)\frac{E_{\mathrm{II}}}{E_2} \qquad (2\cdot4\cdot11)$$

$$= -p\left[\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+\alpha\beta}+\sqrt{\frac{\beta(\alpha+\beta)}{(1+\alpha\beta)}}\right]$$

つぎに図２・４・４のごとき層状地山において各層間に摩擦が働かないような極端な場合には、４・１の同一種類の層状地山の場合にも述べたように、この場合も層の間の付着の完全な低下の影響を示すところの係数$\sqrt{3}$が入ってくる。図２・４・５のように水平な２種の層Ⅰ、Ⅱを考え層Ⅱが層Ⅰより軟弱と仮定する。
（$E_{\mathrm{I}} > E_{\mathrm{II}}$）．このような場合には硬い方の層Ⅰの曲げ応力はかなり増大すると考えられる。
この場合の上下盤の引張応力はG. $Sonntag$の梁理論による解法ではつぎのように与えられる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma A_{\mathrm{I}} &= \sqrt{3}\; p\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha\beta)\beta}} \\ \sigma A_{\mathrm{II}} &= \sigma A_{\mathrm{I}} \cdot \alpha\beta \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot4\cdot42)$$

いま水平層状地山における円形坑道周辺応力の大きさが、２つの層の弾性係数の比βおよび層高の比αによっていかに影響されるかを知るために、上式を用いて計算を行う。[41]

$\beta = E_{\mathrm{II}}/E_{\mathrm{I}} = 1/10,\ 1/8,\ 1/6,\ 1/4,\ 1/2,\ 1/1$，のそれぞれに対して $\alpha = h_{\mathrm{II}}/h_{\mathrm{I}} = 1/10,\ 1/8,\ 1/6,\ 1/4,\ 1/2,\ 1/1$ なる場合について、2つの極端な場合に対して上下盤と側壁応力を求めた。計算結果を示すと図2・4・7および図2・4・8のようである。

図2・4・7より各層が完全に附着している場合に対してつぎのようなことが考察される。側壁に生ずる圧縮応力 σ_B は β の大きさに対してあまり大きくは変化せず、ほぼ $2.6p \sim 3.0p$ の値をとる。その場合層高比 α が小さくなるほど応力を増大することは明らかであるが、β が0.5以上になると α の値にかゝわらずほとんど等方等質地山の場合の応力 $\sigma_B = 3.0p$ に近い値をとる。つぎに上下盤の引張応力についてみると、この場合には坑道に接する岩盤の層が層Iであるか層IIであるかによつて、その応力値の変化する趣きが大きく変つてくる。すなわち層Iの場合には $\sigma_{A\mathrm{I}}$ で示す曲線より判るように、β の変化に伴う引張応力の変化状態は側壁の応力Bのものとまつたく逆である。そしてこの引張応力は β の減少にしたがつてかなり増大し、とくに α が大きいときにはその傾向が大である。$\alpha < 1/4$ のときにはこの応力集中はあまり増加しないし、とくに $\beta > 1/2$ にもなるとほとんど等方等質の地山の場合の値 $\sigma_A = p$ に近い値をとるようになる。

α の増大および β の減少するにつれて軟かい層の変形が増大しうることは明らかであるから、このような層の上にある硬い層は曲げ応力を増す結果となり、図に示すように引張応力が増大するわけである。$\alpha = 1$ で $\beta = 0.1$ の時には側壁の圧縮応力よりも上下盤の引張応力の方が高くなる。したがつて一般的に言つて積層状の地山内に坑道を開削する場合、硬い層を構成する岩石とその間にはさまつた軟弱層の岩石との弾性係数の差異が大きく、しかも軟弱層の高さが大きいような状態では上下盤に大きい引張応力を発生して危険である。

これに対して坑道に接する層が層IIの場合には、β が大きいほど引張応力を増大し、α の値のいかんにかゝわらず $\sigma_{A\mathrm{II}}$ は β の増加に伴つてほぼ一様に増加する。また $\sigma_{A\mathrm{II}}$ は β が少さい場合には $0 \sim 0.3p$ 程度のかなり小さい値しか示さず、中間層の弾性係数が硬い層のそれに比していちぢるしく小さいときには、地圧はほとんど硬い方の層でうけもたれることが判る。

つぎに各層間に摩擦が働かない場合に対する図2・4・8よりつぎのようなことが判る。上下盤の引張応力の変化する傾向は、層Iに対してはさきと同様であるが、層IIではやゝ趣きを異にする。$\sigma_{A\mathrm{I}}$ はそれぞれの α および β の値に対して図2・4・7の値よりも大きいことは、さきに述べた理論式よりも明らかである。したがつて $\sigma_{A\mathrm{I}}$ は対してはこの場合もさきと同様な考察がなされるわけであるが、さらに一層危険な状態を呈し易いことは容易に考えられる。$\sigma_{A\mathrm{II}}$ の変化を図2・4・7のものと比較すると、層間に摩擦がないと考えた場合には、$\alpha = 1/2 \sim 1.0$ になると β の値のいかんにかゝわらずさきの場合より大きくなり、さらに β の増加に伴う応力増加率が大になる。しかし $\alpha = 1/10 \sim 1/2$ のときにはこの傾向とは逆に引張応力がかなり小さくなり、その β に対する増加率を減少する。

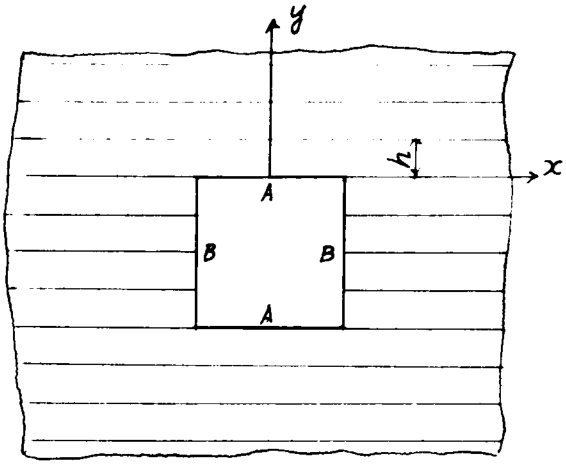


図-2·4·1

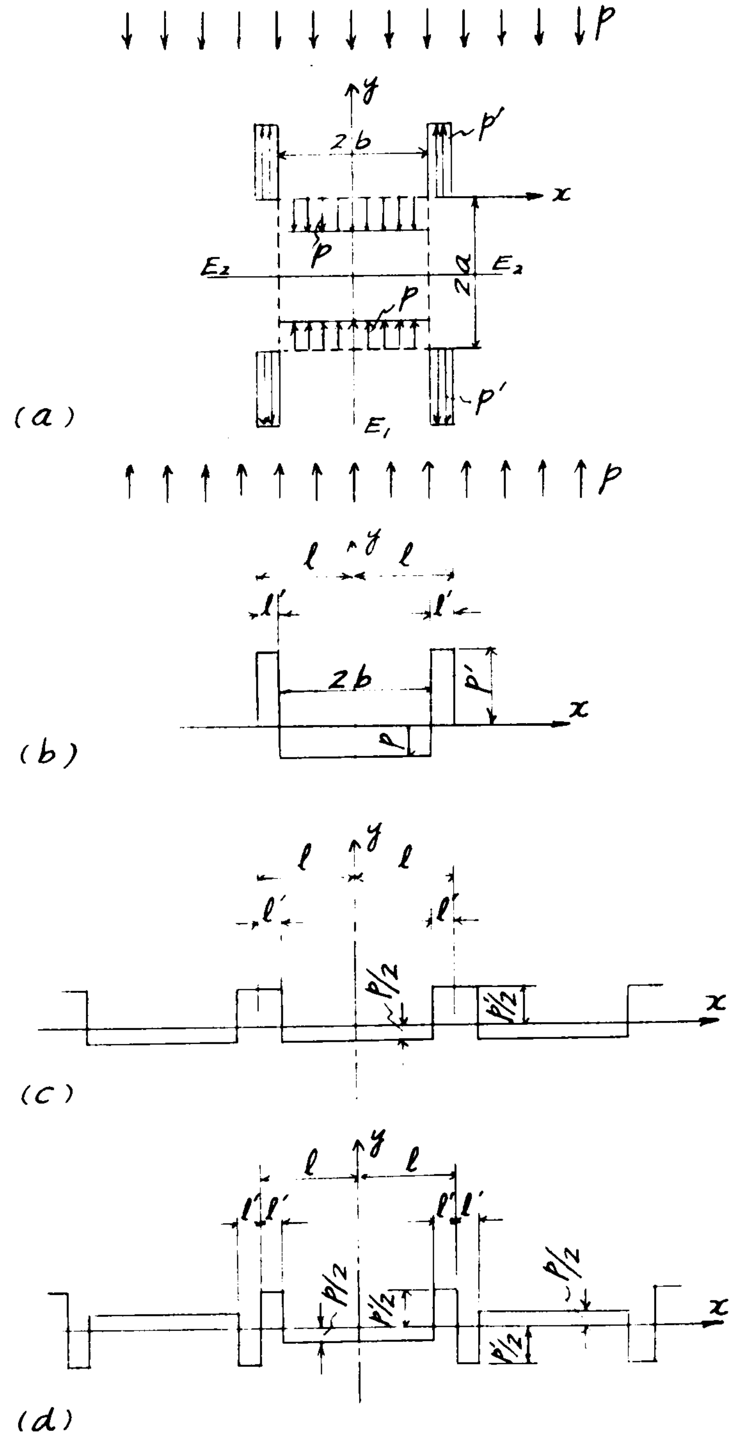
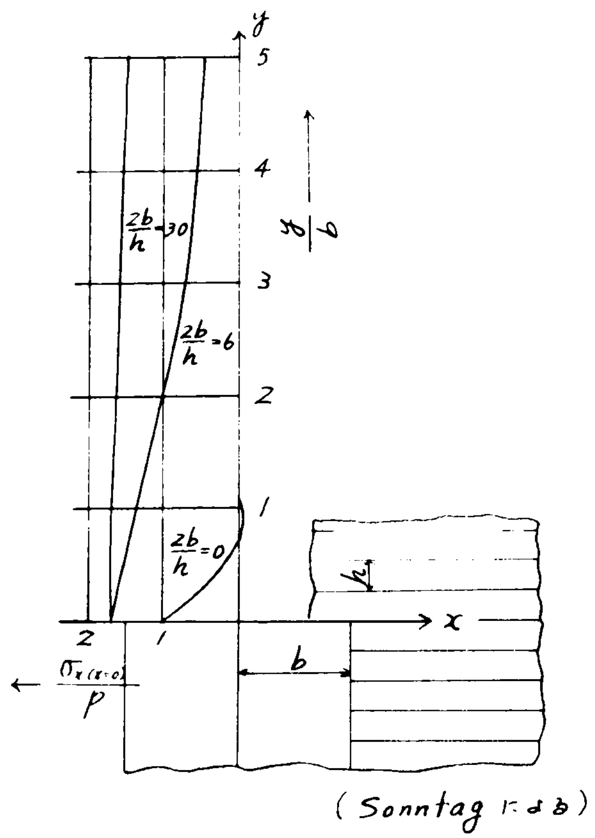


図-2.4.2



(Sonntag による)

図-2.4・3

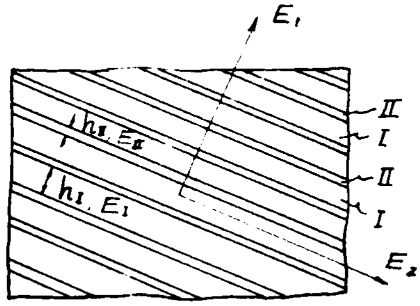


図-2·4·4

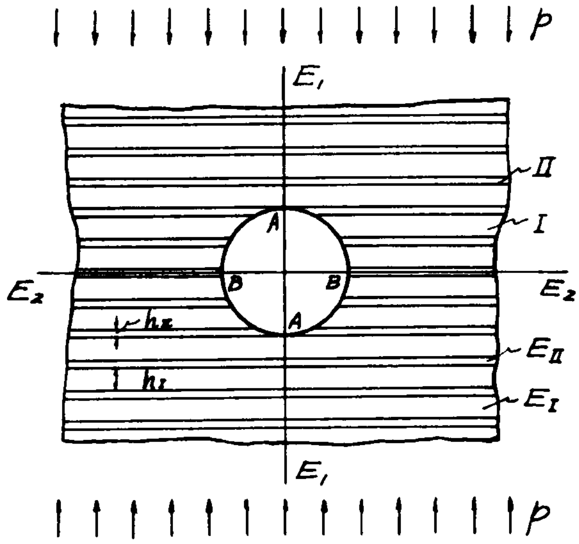


図-2·4·5

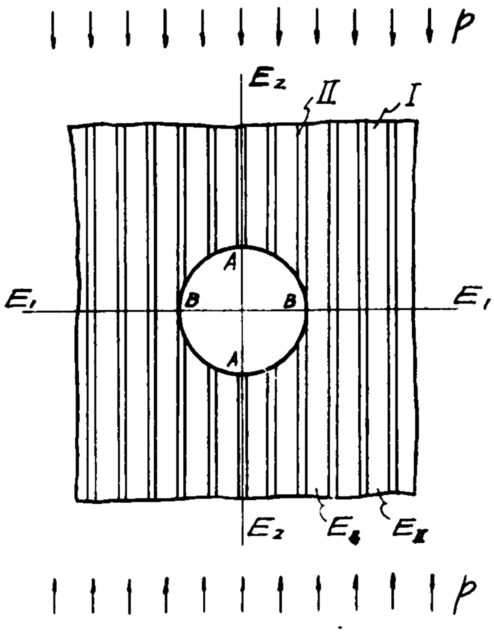


図-2·4·6

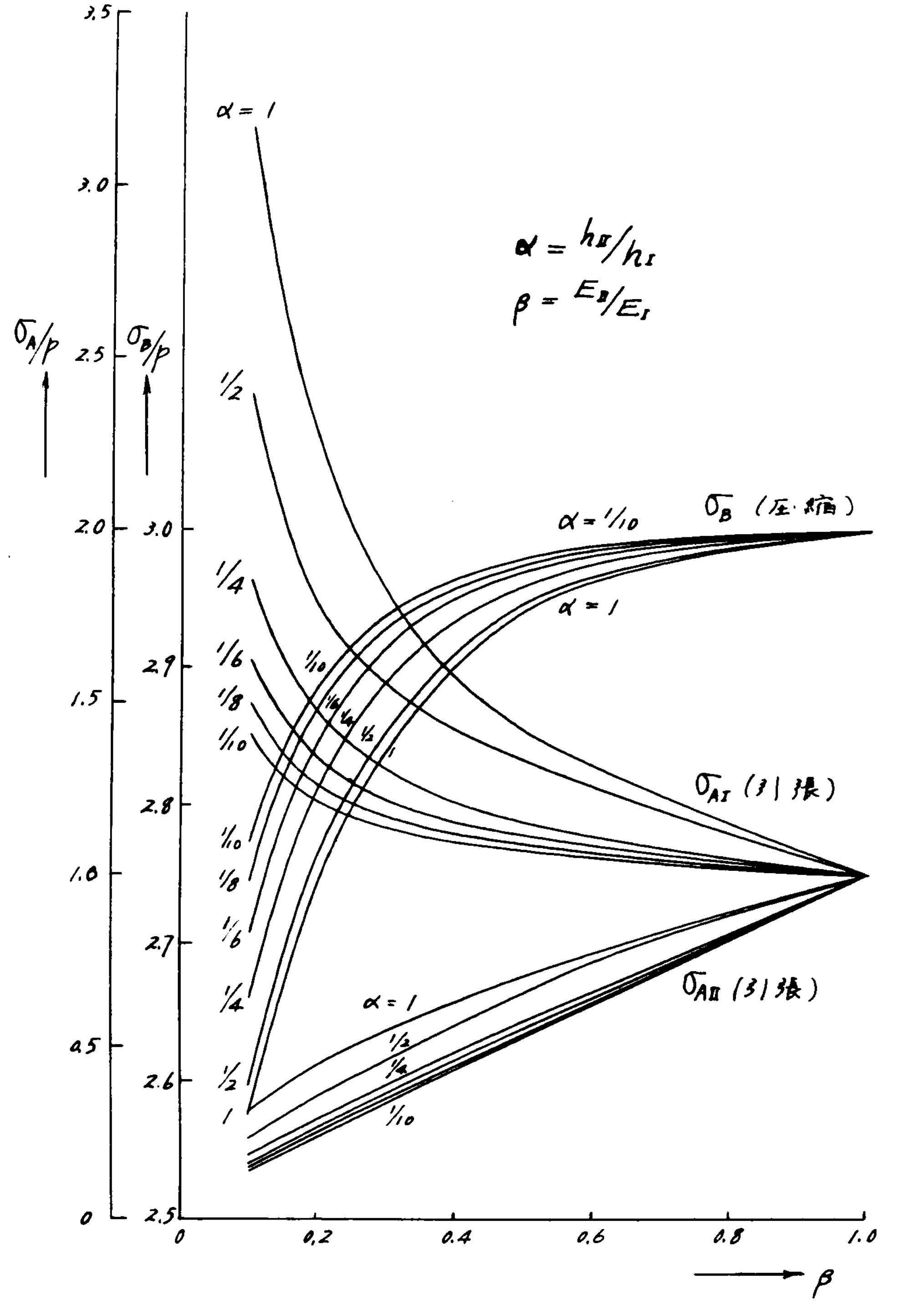


図-2・4・7　　層間が附着している場合

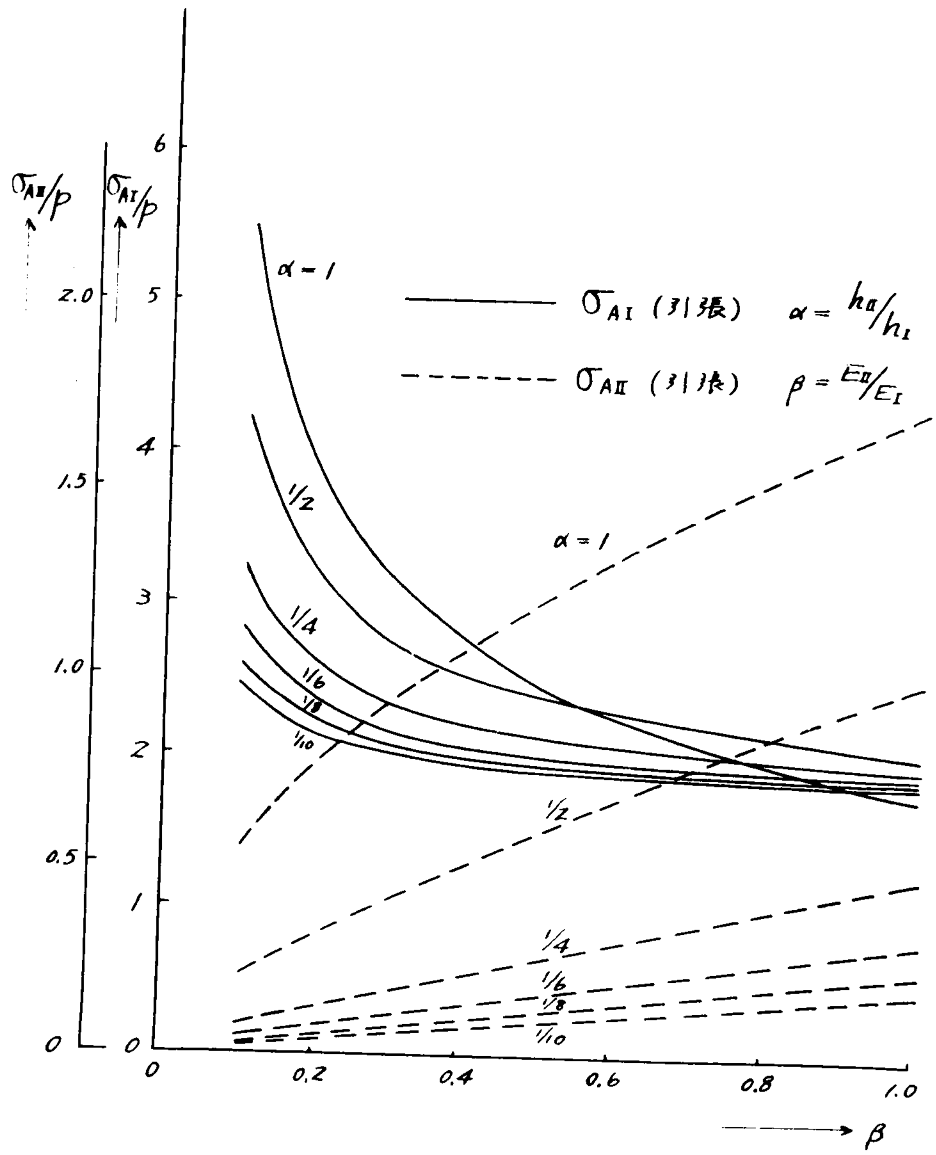


図-2.4.8　層間に摩擦のない場合

才5章　点等方法弾性地山における水平坑道周辺応力状態

5・1　基本式

地山を点等方性の弾性体と仮定した場合の理論的取扱いおよび弾性基礎方程式については、第1篇で述べたとおりである。こゝでは地山材料は各点において等方性であり、ポアッソン比は全領域を通じて一定であるが、弾性係数はある与えられた深さにおいて一定であつて、簡単に地表面からの深さ y の一次関数で与えられる場合を考え、

$$E=k(y+y_0)\quad (y_0:\text{常数}) \tag{2・5・1}$$

とすると、応力関数によつて表わされた適合条件式（1・3・53）式はつぎのようになる。

$$\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)-\frac{2}{y+y_0}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}\right)+\frac{2}{(y+y_0)^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=0 \tag{2・5・2}$$

したがつて境界条件を満足するような（2・5・2）式の解を求めれば、各成分応力がえられることになる。

いま坑道が地表面よりかなり離れた地山中に開削される場合と、地表面の浅いところに開削され、かつ地表面上の載荷重によつて影響をうける場合について考えることにする。

5・2　地表面よりかなり離れた坑道の周辺応力

いままでたびたび述べてきたごとく、坑道が地表面よりある程度離れると地表面の影響が無視されるから、坑道を含む地山を点等方性の無限有孔板と考え、それが無限遠点において坑道開削前のその点の初期応力（鉛直圧：p，水平圧：q）を受けるものと考えて、（2・5・2）式の解を求めればよいわけである。しかし（2・5・2）式の一般解を求めることは数学的に容易なことではない。しかし（2・5・2）式を階差方程式に変形して適用することにより、坑道周辺の応力状態を近似的に求めることができよう。（2・5・2）式を階差方程式で表わすと、*square net* を図2・5・1のようにとれば

$$\begin{aligned}&4(5-\alpha^2+\mu\alpha^2)F_0-2(4+\mu\alpha^2)F_1+2(-4-2\alpha+\alpha^2)F_2\\&-2(4+\mu\alpha^2)F_3+2(-4-2\alpha+\alpha^2)F_4\\&+(2+\alpha)F_5+(2+\alpha)F_6+(2-\alpha)F_7+(2-\alpha)F_8\\&+F_9+(1+\alpha)F_{10}+F_{11}+(1-\alpha)F_{12}=0\end{aligned} \tag{2・5・3}$$

こゝに

$$\alpha = \frac{k}{E} h = \frac{1}{\gamma+\gamma_0} h \qquad (h: square\ net \text{ の網目の大きさ})$$

$$\mu = \frac{\nu}{1-\nu}$$

等方等質の弾性材料に対しては上式で $\alpha=0$ とおけばよい。また（2・5・2）式あるいは（2・5・3）式からもわかるように、坑道の深さがかなり大きくなれば（2・5・2）式の第2，3項は第1項に比して小さくなり、また（2・5・3）式では $\alpha \fallingdotseq 0$ となるから、等方等質の弾性地山における場合と同じ坑道周辺応力が与えられるだろう。

さて実際には有孔無限板全体にわたつて階差方程式を適用することは困難であつて、こゝでは有孔矩形板を考え、矩形板周縁および円孔周辺における境界条件と矩形板を覆う *Square net* の各点における階差方程式（2・5・3）を求める。こうして得られた多元一次連立方程式を解くことによつて *square net* の各点における応力関数 F の値が定められるわけであるが、この場合のように有孔板に4次の偏微分方程式を適用するときには *square net* の大きさを円孔半径に対してかなり小さくとらねばならず、そのため方程式数が非常に多くなつて実際上解くことは電子計算器等を用いなくては困難である。また F の値を求めるために *relaxation method* の適用を試みたが、（2・5・3）式の収斂性が問題になり、その上さきに述べたごとく *square net* をかなり小さくする必要があるため計算は実用上困難であることが判つた。

したがつてこゝでは第3篇で述べるごとき光弾性実験法を適用して、この問題に対する考察を行うこととする。

5・3　等分布荷重をうける地表面下の坑道周辺応力

つぎに坑道が地表面近傍の地山にうがたれ、地表面上の載荷重によつて影響される場合を考える。この場合にたいしては近似的につぎのごとく取扱うことができる。

等方等質の半無限性体の表面に垂直な荷重が作用する場合については良く知られているごとく *Boussinesq* 式が応力計算に用いられる。また点等方性の半無限弾性体において弾性係数が $E = k(\gamma+\gamma_0)^w$ で与えられる場合に対しては、*J, Ohde*[43] によれば *Fröhlich* の式

$$\sigma_r = f \cdot P \cos^{n-2}\theta \cdot r^{-1}$$

$$\text{こゝに } f = 1/\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta \, d\theta\right)$$

は　$n = w+3 = m+1 = 1+1/\nu$　　　　（2・5・4）

なる関係が成立するときに適合条件式（2・5・2）および境界条件が満足されることが明らかにされている。とくに地山の弾性係数が深さとともに直線的に増加するような場合には（2・5・4）式において $w=1$ であるから、*Fröhlich* 式における応力集中係数 $n=4$ でかつ $\nu = 1/3$ なる

ときに相当する。したがつて地山がこのような性質をもつと考えられるときには地表面上の等分布荷重による坑道の周辺応力状態は Fröhlich の式を適用することにより近似的に算定されるよう。

いま地山の弾性係数が $E = ky$ で表わされる場合について平面ヒズミの状態で問題を考えることにする。図２・５・２に示すごとく地表面より h_o なる深さに原点０をもつ素堀円形坑道を考え、地表面上には $x' = l_1 \sim l_2$ にわたつて等分布荷重 p が作用するものとする。以下図に示されている記号を用いて計算を進める。

$E = ky$ の場合適合条件式（２・５・２）（この場合 $y_0 = 0$ である）および境界条件を満足する応力式は集中荷重（平面ヒズミ状態）に対してつぎのように、

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{y'} &= \frac{-3p}{4} \cdot \frac{\cos^4\theta}{r} \\
\sigma_{x'} &= \frac{-3p}{4} \cdot \frac{\cos^2\theta \sin^2\theta}{r} \\
\tau_{x'y'} &= \frac{-3p}{4} \cdot \frac{\cos^3\theta \sin\theta}{r}
\end{aligned}\right\} \qquad (2 \cdot 5 \cdot 5)$$

で与えられ、$\nu = 1/3$ でなければならない。なお（２・５・５）式を用いると地山　材料のポアッソン比が 1/3 なる場合には妥当であるが、それ以外の ν の値に対しては少しく異なつた応力値を与える。この点については Borowicka が $E = ky$ の場合に種々のポアッソン比の値に対する解を与えているが、この解は級数和の形で与えられており一般的なポアッソン比に対しては計算がやや煩雑であるので、こゝでは一応 $\nu = 1/3$ なる場合を取扱うことにする。

集中荷重に対する応力式が（２・５・５）式で与えられるから図のごとく等分布荷重 p が作用するときの応力式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
\sigma_{y'} &= \frac{-3p}{4} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\cos^4\theta}{r} \, dx' \\
&= \frac{-p}{4} \{ \sin\theta_2 (2+\cos^2\theta_2) - \sin\theta_1 (2+\cos^2\theta_1) \} \\
\sigma_{x'} &= \frac{-3p}{4} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\cos^2\theta \sin^2\theta}{r} \, dx' = \frac{-p}{4} (\sin^3\theta_2 - \sin^3\theta_1) \\
\tau_{x'y'} &= \frac{-3p}{4} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\cos^3\theta \sin\theta}{r} \, dx' = + \frac{p}{4} (\cos^3\theta - \cos^3\theta_1)
\end{aligned} \qquad (2 \cdot 5 \cdot 6)$$

（２・５・６）式を円形坑道の中心０に原点をもつ極座標系（ρ，φ）に変換すると、まず σ_x，σ_y，τ_{xy} はつぎのごとく与えられる。

$$\begin{aligned}
y &= f(\rho, \varphi) \\
&= \frac{-P}{4} \Big[(\rho \sin\varphi - l_2) \{ 3(\rho\cos\varphi + h_o)^2 + 2(\rho\sin\varphi - l_2)^2 \}
\end{aligned}$$

$$\times\{(\rho\cos\varphi+h_0)^2+(\rho\sin\varphi-l_2)^2\}^{-\frac{3}{2}}-(\rho\sin\varphi-l_2)$$

$$\times\{3(\rho\cos\varphi+h_0)^2+2(\rho\sin\varphi-l_1)^2\}\{(\rho\cos\varphi+h_0)^2$$

$$+(\rho\sin\varphi-l_1)^2\}^{-\frac{3}{2}}]$$

$$\sigma x=g(\rho,\varphi)$$

$$=\frac{-\rho}{4}[(\rho\sin\varphi-l_2)^3\{(\rho\cos\varphi+h_0)^2+(\rho\sin\varphi-l_2)^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$-(\rho\sin\varphi-l_1)^3\{(\rho\cos\varphi+h_0)^2+(\rho\sin\varphi-l_1)^2\}^{-\frac{3}{2}}]$$

$$\tau xy=h(\rho,\varphi)$$

$$=+\frac{\rho}{4}(\rho\cos\varphi+h_0)^3[\{(\rho\cos\varphi+h_0)^2+(\rho\sin\varphi-l_2)^2\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$-\{(\rho\cos\varphi+h_0)^2+(\rho\sin\varphi-l_1)^2\}^{-\frac{3}{2}}]$$

したがつて極座標による応力成分 σ_ρ, $\sigma\varphi$, $\tau_{\rho\varphi}$ はつぎのごとくなる。

$$\sigma\rho=f(\rho,\varphi)\cos^2\varphi+g(\rho,\varphi)\sin^2\varphi+2h(\rho,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\sigma_\varphi=f(\rho,\varphi)\sin^2\varphi+g(\rho,\varphi)\cos^2\varphi-2h(\rho,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\tau_{\rho\varphi}=h(\rho,\varphi)(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)+\{f(\rho,\varphi)-g(\rho,\varphi)\}\sin\varphi\cos\varphi$$

…(2・5・8)

いま図のように坑道中心より $\rho=b$ だけ離れたところでは坑道開削の影響が及ばないとすれば、半径 $\rho=b$ なる円周上の各点の応力状態は坑道開削後も開削前と同じ状態を保っている。したがつて坑道開削による坑道周辺の応力状態は $\rho=b$ において(2・5・8)式で与えられる応力が外力として作用した場合の円環(内径 a, 外径 b)の問題として近似的に取扱われうる。こゝで b の値をいかに取るかが問題になる。等方等質の弾性体の場合では $b\geqq4a$ になるとほとんど坑開削の影響はうけないが、b としては後で出てくる応力関数 F の取扱いの点からして坑道開削の影響をうけない範囲内でなるべく小さく取ることが望ましい。

原点0なる極座標系において $Airy$ の応力関数を F とすれば、各応力成分はつぎのようになる。

$$\sigma_p=\frac{\partial F}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial^2F}{\rho^2\partial\varphi^2},\quad \sigma\varphi=\frac{\partial^2F}{\partial\rho^2},\quad \tau\rho\varphi=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial F}{\rho\partial\varphi}\right)\qquad(2.5.9)$$

こゝにおいて応力関数 F は $E=ky$ なる点等方性材料に対する適合条件式(2・5・2)式を満

足するものでなければならない。（2・5・2）式の一般解としてFを求めることはさきに述べたごとく数学的に困難であるので、こゝでは一応（2・5・2）式の第一項のみを考え、すなわち$E=const.$なる弾性材料に対する一般解としてFを求めることはさきに述べたごとく数学的に困難であるので、こゝでは一応（2・5・2）式の第一項のみを考え、すなわち$E=const.$なる弾性材料に対する一般解を用いて近似的に応力算定を行つてみる。このような取扱いはトンネルがある程度深くなると、（2・5・2）式の第2，3項の影響は少さくなり、また$\rho=b$における応力状態は同式を満足しているから近似的な応力算定に対して許されるであろう。さて適合条件式の第一項のみを取つた場合の応力関数Fの一般解は（1・2・17）式よりつぎのように与えられる。いま簡単のために地表面に作用する等分布荷重がy軸に対して対称であると考え、$-l_1=l_2=l$とすれば

$$\left.\begin{aligned}F=&a_0\log\rho+b_0\rho^2+(b_1\rho^3+a_1'\rho^{-1})\cos\varphi\\&+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n\rho^n+b_n\rho^{n+2}+a_n'\rho^{-n}+b_n'\rho^{-n+2})\cos n\varphi\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot5\cdot10)$$

こゝにa_0，b_0，b_1，a_1'，a_n，b_n，a_n'，b_n'等は境界条件より決定さるべき未定係数である。

つぎにこの場合の境界条件はつぎのように

$$\left.\begin{aligned}&\rho=a\text{において、}\quad\sigma_\rho=0\qquad\tau_{\rho\varphi}=0\\&\rho=b\text{において、}\quad\sigma_\rho=(\sigma_\rho)_b\quad,\tau_{\rho\varphi}=(\tau_{\rho\varphi})_b\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot5\cdot11)$$

であつて、$(\sigma_\rho)_b$および$(\tau_{\rho\varphi})_b$は（2・5・8）式において$\rho=b$とおいたものである。（2・5・11）式に（2・5・8）式および（2・5・9）式を用いて未定係数を定めれば、坑道周辺の応力状態が求められる。

まず（2・5・11）式の上の2式を用いて、a_n（$n=0，2，3，\cdots$）およびa_n'（$n=1，2，\cdots$）をb_n（$n=0，1，2\cdots$）およびb_n'（$n=2，3，4\cdots$）で表せば

$$\left.\begin{aligned}a_0&=-2b_0\\a_1'&=b_1\\a_n&=-\frac{n+1}{n}b_n-\frac{1}{n}b_n'\\a_n'&=\frac{1}{n}b_n-\frac{n-1}{n}b_n'\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\quad(2\cdot5\cdot12)$$

ゆえに応力成分σ_ρおよび$\tau_{\rho\varphi}$はつぎのように表わされる。

$$\sigma_\rho=2b_0(1-\rho^{-2})+2b_1(\rho-\rho^{-3})\cos\theta$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+1)\{(n-1)\rho^{n-2}-(n-2)\rho^{n}-\rho^{-n-2}\}b_n$$

$$+(n-1)\{\rho^{n-2}+(n+1)\rho^{-n-2}-(n+2)\rho^{-n}\}b'_n\Big]\cos n\varphi$$

$$\tau_{\rho\varphi}=2b_1(\rho-\rho^{-3})\sin\varphi$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[-(n+1)\{(n-1)\rho^{n-2}-n\rho+\rho^{-n-2}\}b_n$$

$$-(n-1)\{\rho^{n-2}-(n+1)\rho^{-n-2}+n\rho^{-n}\}b'_n\Big]\sin n\varphi$$

…．（2・5・13）

一方$\rho=b$における荷重をφに関して$Fourier$展開する。（2・5・8）式において$\rho=b$と置いたものをφについて$Fourier$展開して、σ_ρおよび$\tau_{\rho\varphi}$を$\cos n\varphi$および$\sin n\varphi$の級数和で表わす一般式を求め、（2・5・13）式において$\rho=b$と置いたものと等置することによりφの値の如何にかかわらず成立するところの式より未定数b_n, b'_nさらにa_nおよびa'_n等を求めることができるが、（2・5・8）式を$Fourier$展開して一般式をうることは（2・5・8）式の各項を与えている（2・5・7）式が複雑なため極めて煩雑である。したがつてこゝでは級数の形と

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\rho&=A_0+\sum_{n=2}A_n\cos n\varphi\\ \tau_{\rho\varphi}&=\sum_{n=2}B_n\sin n\varphi\end{aligned}\right\}\quad\cdots(2\cdot5\cdot14)$$

を用い、$\rho=b$の$\varphi=n\pi/i$（$n=0.1,\cdots i$）なる点において（2・5・8）式より得られる$(\tau_\rho)_b$および$(\tau_{\rho\varphi})_d$と（2・5・14）式を等置することにより近似的に係数A_nおよびB_nを求めて（2・5・8）式を$Fourier$展開し、さらにそれと（3・5・13）式を境界条件式（2・5・11）式の下の2式に代入して残りの未定係数b^*_nおよびb'_nを算定する。

5・4　5・3の場合の数値計算結果

計算例としていま円形坑道の半径$a=1$にとり、$b=4a=4$，$b_0=4a=4$，$-l_1=l_2=\sqrt{3a}=1.732$とすれば、$\rho=b$における応力成分の値は（2・5・7）式および（2・5・8）式より表2・5・1のごとくえられる。

つぎに（2・5・14）式の各係数を求めるにあたり、上表に示された$\rho=b$上の9ケの点$\varphi=n\pi/8$（$n=0.1,\cdots 8$）における応力値を用い、そうして導かれた応力成分の$Fourier$展開式（2・5・13）式に用いれば表－2・5・2のごとき未定係数値をうる。

上で求めた各未定係数値を用いて円形坑道の周辺応力を求めると表－2・5・3のようである。さらにこれを図示すれば図2・5・3のようである。また上で行つたと同様の方法で地山の弾性係数が一定な場合について$Boussinesq$式を用いて円形坑道周辺応力を求めればつぎのように

なる。この場合には集中荷重Pに対して

$$\sigma_{y'} = \frac{2P}{\pi}\frac{\cos^3\theta}{r}, \qquad \sigma_{x'} = \frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta.\sin^2\theta}{r},$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{2P}{\pi}\frac{\cos^2\theta\ \sin\theta}{r}$$

が最初に用いられる。上と同様の円形坑道および荷重状態について計算すると、各成分応力を与える応力関数F中の未定係数は表2・5・4に示す値をとる。

さらに坑道周辺応力を算出すれば、次表のとおりである。

なお上表の値を図示すれば図2・5・3の点線のようである。

以上において点等方性弾性地山内における坑道周辺応力状態に対する理論的考察ならびに計算例を示したのであるが、これに対して第3篇において実験的な考察を行い、計算結果と実験結果との比較を行うとともに、点等方性弾性地山内の坑道周辺応力状態について述べることとする。

表－2・5・1　$\rho = b$における　σ_ρ, σ_φ, $\tau_{\rho\varphi}$　の値

φ	σ_ρ/p	σ_φ/p	$\tau_{\rho\varphi}/p$
0°	−0.313	−0.005	0
22.5°	−0.294	−0.018	−0.062
45°	−0.246	−0.052	−0.107
67.5°	−0.178	−0.096	−0.127
90°	−0.112	−0.159	−0.116
112.5°	−0.050	−0.166	−0.087
135°	−0.014	−0.200	−0.041
157.5°	−0.652	−0.471	0.295
180°	−1.000	−0.500	0

表－2・5・2　　未定係数の値　（$E = ky$）

n	a_n/p	a'_n/p	b_n/p	b'_n/p
0	-2.066×10^{-1}	--	1.033×10^{-1}	−
2	-1.683×10^{-1}	-1.491×10^{-1}	9.564×10^{-3}	3.078×10^{-1}
3	2.276×10^{-2}	4.281×10^{-2}	-9.012×10^{-4}	-6.467×10^{-2}
4	-3.429×10^{-3}	-9.714×10^{-3}	1.433×10^{-4}	1.300×10^{-2}
5	3.384×10^{-4}	1.284×10^{-3}	-1.382×10^{-5}	-1.609×10^{-3}
6	-1.064×10^{-5}	4.845×10^{-5}	-7.924×10^{-7}	-5.829×10^{-5}
7	-1.415×10^{-5}	-7.989×10^{-5}	7.139×10^{-7}	9.332×10^{-5}
8	1.986×10^{-6}	1.310×10^{-5}	-1.005×10^{-7}	-1.498×10^{-5}

表－２・５・３　円形坑道周辺応力　（$E=k\gamma$，　$\nu=1/3$）

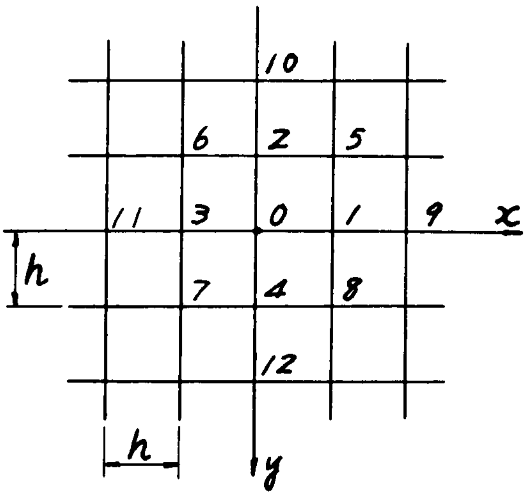
φ	0°	22.5°	45°	67.5°	90°	112.5°	135°	157.5°	180°
σ_φ/p	0.328	0.192	−0.192	−0.763	−1.376	−1.643	−0942	0562	1.381

表－２・５・４　未定係数の値　（$E=const.$）

n	a_n/p	a'_n/p	b_n/p	b'_n/p
0	-2.000×10^{-1}	−	1.000×10^{-1}	−
2	-1.514×10^{-1}	-1.337×10^{-1}	8.893×10^{-3}	2.761×10^{-1}
3	2.426×10^{-2}	4.555×10^{-2}	-9.918×10^{-4}	-6.882×10^{-2}
4	-3.564×10^{-3}	-1.009×10^{-2}	1.486×10^{-4}	1.351×10^{-2}
5	-3.592×10^{-4}	1.366×10^{-3}	-1.415×10^{-5}	-1.711×10^{-3}
6	1.418×10^{-5}	6.437×10^{-5}	-1.084×10^{-6}	-7.747×10^{-4}
7	-1.587×10^{-5}	-8.952×10^{-5}	8.119×10^{-7}	1.046×10^{-4}
8	2.567×10^{-6}	1.688×10^{-5}	-1.357×10^{-7}	-1.931×10^{-5}

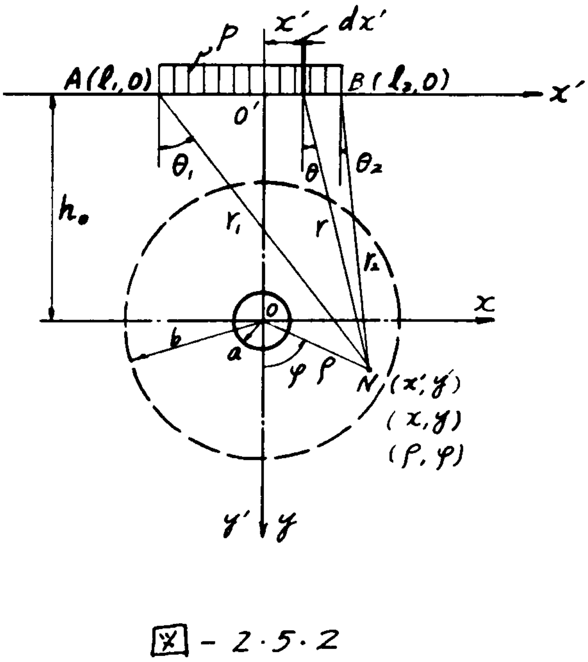
表－２・５・５　円形坑道周辺応力　（$E=const.$，　$\nu=1/3$）

φ	0°	22.5°	45°	67.5°	90°	112.5°	135°	157.5°	180°
σ_φ/p	0.196	0.111	−0161	−0.639	−1.239	−1.575	−0.959	0.504	1.315



10
6
2
5
11
3
0
1
9
x
h
7
4
8
12
h
y

図-2·5·1



P
x'
dx'
A(l₁,0)
B(l₂,0)
x'
O'
θ₁
θ
θ₂
h₀
r₁
r
r₂
O
x
b
a
φ
ρ
N
(x',y')
(x,y)
(ρ,φ)
y'
y

図-2·5·2

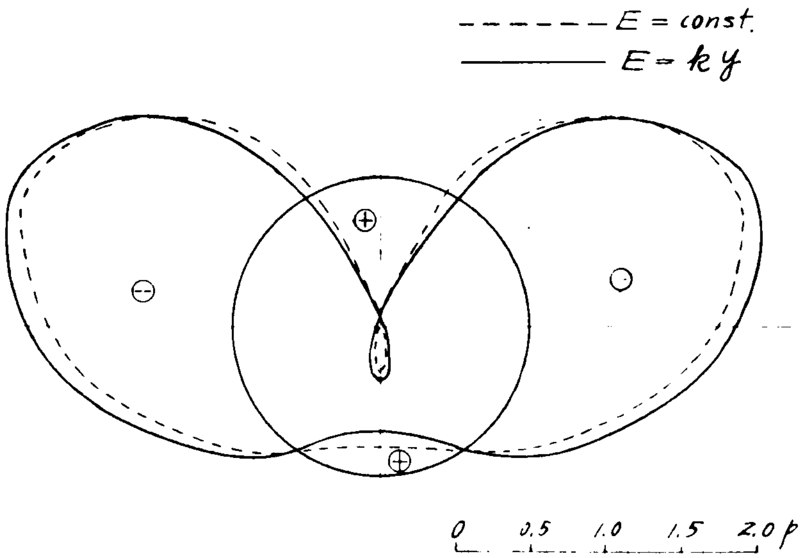


図 - 2・5・3

才 6 章　　水平坑道周辺の弾塑性応力状態

地山の初期応力状態は弾性地山に対しては（1・4・4）式のように与えられるから、このような状態の地山中に坑道が開削されると坑道周辺の地山中の圧力分布は攪乱され、とくに坑道周辺において応力集中が最大となる。この場合この応力集中のための局所応力 $\sigma\theta$ が地山の弾性限界 σel より大きくなれば、地山岩石は塑性変形を起し、坑道周囲に塑性領域を生じ、さらに $\sigma max-\sigma min$ が岩石の破壊強度より大きくなれば塑性流動をおこして塑性領域が増大して行くと考えられている[44]。しかし坑道周辺に塑性領域を生じ、いわゆる弾塑性応力状態を呈するようになることについては、地山の強度に対する応力分布の状態が関係してくるだろう。地山の弾性応力状態に対する理論的な取扱いについては第1篇第4章で述べたとおりであるが、こゝでは降伏条件として *Von Mises* の条件式を用いて、水平坑道周辺の弾塑性応力を計算することにする。

6・1　円形坑道周辺の弾塑性応力式

初期応力状態としていわゆる静水圧的な状態を考えた場合については、後に述べる立坑の場合と同様に取扱うことができるが、こゝでは一般的な地山の初期応力状態の場合について述べる。図2・6・1に示すごとく円形坑道が水平な地表面よりかなり深いところにあり、地表面の影響を受けないと考えられる場合には、坑道位置における地山の初期応力状態は、鉛直方向に $P=-\gamma h$ ，水平方向に $q=-\lambda\gamma h$ で与えられる。このような状態のもとにおける円形坑道周辺の弾塑性応力状態について、*L. A. Galin*[45] によつて最初に与えられた方法を用いて考察してみる。

いま図のごとく坑道中心を原点として鉛直方向に y 軸，水平方向に x 軸をとる。前章でも述べたように、地山中に坑道を開削した場合一般に孔の周囲に応力集中を惹起する領域ができるが、この応力集中が地山材料にたいして特性づけられたある大きさに達するとき、坑道周辺の地山材料に弾性的でなくなり塑性状態に移行する。このような状態が坑道の近傍のある領域において生ずるものと仮定すれば、一般的につぎのように弾性および塑性領域における応力を解くことができる。

弾性領域における応力関数 U_2 （x，y）は衆知のごとくつぎの重調和方程式：

$$\frac{\partial^4 U_2}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 U_2}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 U_2}{\partial y^4}=0 \qquad (2\cdot6\cdot1)$$

を満足しなければならない。いま孔の周辺に垂直方向力および接線方向力：

$$\sigma_n=f_1\ (s)\quad,\quad \tau_{nt}=f_1\ (s) \qquad (2\cdot6\cdot2)$$

が作用し、無限遠において応力状態が次式で与えられているものとする。

$$\sigma_x^{(\infty)} = P_1(x, y), \quad \sigma_y^{(\infty)} = P_2(x, y), \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = P_3(x, y) \qquad (2\cdot6\cdot3)$$

塑性領域においては応力関数U_1はいわゆる塑性条件を満足しなければならないが、この塑性条件は一般につぎのように双曲線型の式で与えられる。

$$F_1\left(x, y, \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}, \cdots\cdots \frac{\partial U_1}{\partial x}, \frac{\partial U_1}{\partial y}\right) = 0 \qquad (2\cdot6\cdot4)$$

結局問題はある未知の境界L（いわゆる弾塑性境界）の上で弾性領域と塑性領域との各応力成分が等しいという関係，すなわちつぎのような関係

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} \qquad (2\cdot6\cdot5)$$

を満足するような条件のもとで、孔をとりまいているこの未知の境界Lの外部で重調和関数U_2（x，y）を求めることである。なおこの場合$x \to \infty$，$y \to \infty$に対して、

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = P_2(x, y), \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = P_1(x, y), \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} = P_3(x, y) \qquad (2\cdot6\cdot6)$$

でなければならない。こゝで問題になるのは弾性および塑性領域の境界Lの決定であつて、この境界が判れば、この境界L上および無限遠において既知の条件がある場合の、孔Lをもつた平面に対する弾性問題の解として関数U_2（x，y）が求められる。しかし塑性領域における応力成分

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \sigma_x^{(1)}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \sigma_y^{(1)}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy}^{(1)}$$

が知られれば比較的簡単な方法で解を求めることができる。

さて図に示すごとく半径r_0なる円形坑道の周辺に支保による反力σ_{r_0}が一様に作用するものとする。支保反力は一般には円孔周辺における変形状態、したがつて支保を考慮した場合の坑道周辺応力状態等によつてその分布が変化するものであるが、こゝでは簡単のために支保反力が円孔周辺にわたつて一様に分布するものと仮定する。

坑道周辺の塑性領域において満足さるべき塑性条件（2・6・4）式は（1・4・12）式および（1・4・13）式よりつぎのような形で与えられる。

$$\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right) + 4\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4k^2 \qquad (2\cdot6\cdot7)$$

こゝにkは地山材料の単純せん断時の降伏限度であり、この場合$k<0$である。

つぎにこの場合の境界条件はつぎのように与えられる。

$r=r_0$ において、 $\sigma_r=-\sigma_{r_0}$, $\tau_{r\theta}=0$ (2・6・8)

無限遠において、 $\sigma_x^{(\infty)}=-\lambda\gamma h$ $\sigma_y^{(\infty)}=-\gamma h$ (2・6・9)

(2・6・8)式のごとき境界条件のときの(2・6・7)式の解はL．A，Galinによってつぎのごとき形で与えられている。

$$U_1(x,y)=kr^2\ln\frac{r}{r_0}-\frac{\sigma_{r_0}+k}{2}r^2 \tag{2・6・10}$$

(2・6・10)式のように塑性領域における応力関数が判ると、それより塑性領域での応力成分と等しく、かつ境界条件(2・6・9)式を満足するように問題を解けばよいわけである。

すなわちつぎのような境界条件

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}=\begin{cases}2k-2\sigma_{r_0}+2k\ln\dfrac{z\bar{z}}{r_0} & (\text{弾塑性境界}L\text{において})\\ -(\lambda\gamma h+\gamma h) & (z\to\infty\text{に対して})\end{cases} \tag{2・6・11}$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}-2i\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\begin{cases}2k\dfrac{\bar{z}}{z} & (L\text{上において})\\ -(\gamma h-\lambda\gamma h) & (z\to\infty\text{に対して})\end{cases} \tag{2・6・12}$$

から境界 L および応力関数 $U_2(x,y)$ を求めることにある。

境界 L の外部において正則な2つの解析関数 $\Phi(z)$ および $\Psi(z)$ を用いれば(1・2・42)式より応力関数 $U_2(x,y)$ との関係がつぎのように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}=2\left[\Phi_2(z)+\overline{\Phi_2(z)}\right]\\&\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}-2i\frac{\partial^2 U_2}{\partial x\,\partial y}=2\left[\bar{z}\Phi_2'(z)+\Psi_2(z)\right]\end{aligned}\right\} \tag{2・6・13}$$

いまつぎのような関数

$$z=\omega(\xi)=c\xi+\frac{c_1}{\xi}+\frac{c_2}{\xi^2} \tag{2・6・14}$$

を用いて境界 L の外部を ξ ー平面の単位円 γ の外部に写像するものとし、$\Phi_2[\omega(\xi)]=\Phi_2(\xi)$, $\Psi_2[\omega(\xi)]=\Psi_2(\xi)$ とおけば、条件式(2・6・11)式および(2・6・12)式はつぎのようになる。

$$4\,\mathrm{Re}\,\Phi_2(\xi)=\begin{cases}2k-2\sigma_{r_0}+2k\ln\dfrac{\omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}}{r^2} & (\gamma\text{上において})\\ -\gamma h(1+\lambda) & (\xi\to\infty\text{において})\end{cases} \tag{2・6・15}$$

$$2\,\frac{\overline{\omega(\xi)}}{\omega'(\xi)}\,\Phi_2(\xi)+\Psi_2(\xi)=\begin{cases}2k\,\dfrac{\overline{\omega(\xi)}}{\omega(\xi)} & (\gamma\text{上において})\\[2mm] -\gamma h(1-\lambda) & (\xi\to\infty\text{において})\end{cases}\qquad (2\cdot6\cdot16)$$

単位円γの上では$\xi=\sigma$, $\bar{\xi}=\bar{\sigma}=\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\xi}$ であるから、(2・6・16)式の最初の式はつぎのように書かれる。

$$2\left[\frac{\omega(\frac{1}{\sigma})}{\omega'(\sigma)}\Phi_2'(\sigma)+\Psi(\sigma)\right]=2k\,\frac{\overline{\omega}(\frac{1}{\sigma})}{\omega(\sigma)}\qquad (2\cdot6\cdot17)$$

上式の$\omega(\sigma)$ 等に(2・6・14)式の関係を代入し、両辺に $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\sigma}{\sigma-\xi}$ (このξはγの内部の一点である)を乗じて、γ上で積分すればつぎの関係をうる。

$$c_2=0,\qquad c_1=\frac{-\gamma h(1-\lambda)}{2k}c=c\beta$$

こゝに $\beta=\dfrac{-\gamma h(1-\lambda)}{2k}$ である。

したがって(2・6・14)式で示される関数$\omega(\xi)$はつぎのような形となる。

$$z=\omega(\xi)=c\left(\xi+\frac{\beta}{\xi}\right)$$

こゝにcは未定の係数であり、(2・6・15)式の条件式より決定される。

境界条件(2・6・15)式の第一式は $\Phi_2(\xi)$ がつぎの形をとるときに満足される。

$$\Phi_2(\xi)=k\ln\frac{\omega(\xi)}{r_0}+\frac{k-\sigma r_0}{2}-k\ln\xi$$
$$=k\ln c-k\ln r_0+k\ln\left(\xi+\frac{\beta}{\xi}\right)+\frac{k-\sigma r_0}{2}-k\ln\xi\qquad (2\cdot6\cdot19)$$

これに対して第2式よりつぎの関係,

$$4\left(k\ln c-k\ln r_0+\frac{k-\sigma r_0}{2}\right)=-\gamma h(1+\lambda)$$

が得られ、これよりcがつぎのように求められる。

$$c=r_0\,e^{\frac{1}{2k}\left\{\frac{-\gamma h}{2}(1+\lambda)+\sigma r_0-k\right\}}\qquad (2\cdot6\cdot20)$$

したがって(2・6・18)式は

$$z=\omega(\xi)=r_0\,e^{\frac{1}{2k}\left\{\frac{-\gamma h}{2}(1+\lambda)+\sigma r_0-k\right\}}\left(\xi+\frac{\beta}{\xi}\right)\qquad (2\cdot6\cdot21)$$

となり、また(2・6・19)式より $\Phi_2(\xi)$ はつぎのようになる。

$$\Phi_2(\xi)=k\ln\left(1+\frac{\beta}{\xi^2}\right)-\frac{\gamma h(1+\lambda)}{4}\qquad (2\cdot6\cdot22)$$

関数 $\Psi_2(\xi)$は（2・6・16）式の第一式よりつぎのように求められる。

$$\Psi_2(\xi) = k\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\omega'(\xi)}\frac{1}{\xi} = k\frac{1+\beta\xi^2}{\xi^2-\beta} \qquad (2\cdot6\cdot23)$$

上で求められた $\Phi_2(\xi)$および $\Psi_2(\xi)$を用いて弾性領域における各応力成分を算出すればつぎのようである。まず（2・6・22）および（2・6・23）式の変数ξに（2・6・18）式の関数、すなわち

$$\xi = \frac{z+\sqrt{z^2-4c^2\beta}}{2c}$$

を用いて $\Phi_2(z)$および $\Psi_2(z)$を求めれば

$$\Phi_2(z) = k\ ln\left\{1+\frac{4c^2\beta}{(z+\sqrt{z^2-4c^2\beta})^2}\right\} - \frac{\gamma h(1+\lambda)}{4}$$

$$\Psi_2(z) = k\frac{\left\{4c^2+\beta(z+\sqrt{z^2-4c^2\beta})^2\right\}}{\left\{(z+\sqrt{z^2-4c^2\beta})^2-4c^2\beta\right\}} \qquad (2\cdot6\cdot24)$$

したがって応力成分は次式より求められる。

$$\sigma_x+\sigma_y = 4Re[\Phi_2(z)] = 4Re[k\ ln 2z -$$

$$k\ ln(z+\sqrt{z^2-4c^2\beta})] - \gamma h(1+\lambda) \qquad (2\cdot6\cdot25)$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi_2'(z)+\Psi_2(z)]$$

$$=2k\left[\frac{\bar{z}\sqrt{z^2-4c^2\beta}}{z^2-4c^2\beta} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{4c^2+\beta(z+\sqrt{z^2-4c^2\beta})^2}{(z+\sqrt{z^2-4c^2\beta})^2}\right] \qquad (2\cdot6\cdot26)$$

塑性領域の境界Lはつぎのような長短軸をもった楕円である。

$$a = c(1+\beta)\ ,\qquad b = c(1-\beta) \qquad (2\cdot6\cdot27)$$

こゝでcは（2・6・20）式で与えられるものであり、また$k<0$であるから、$\beta>0$の値をとる。この境界Lの上の点はつぎのような座標で与えられるから、

$$\left.\begin{aligned} x &= c(c+\beta)\cos\theta \\ y &= c(c-\beta)\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot6\cdot28)$$

次式のような関係が境界L上で成立する。

$$\sqrt{z^2-4c^2\beta} = ic\left\{(1+\beta)\sin\theta - i(1-\beta)\cos\theta\right\} \qquad (2\cdot6\cdot29)$$

したがって上式の関係を（2・6・25）式および（2・6・26）式に用いれば、弾塑性境界上での応力成分を求める式がつぎのように得られる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= k\Big[\, ln\left\{2\beta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+(1+\beta^2)\right\} \\
&\quad -\frac{(1+\beta^2)(\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\beta)}{(1+\beta^2)+2\beta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\Big]-\frac{1}{2}\gamma h(1+\lambda) \\
\sigma_y &= k\Big[\, ln\left\{2\beta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+(1+\beta^2)\right\} \\
&\quad +\frac{(1+\beta^2)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\beta}{(1+\beta^2)+2\beta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\Big]-\frac{1}{2}\gamma h(1+\lambda) \\
\tau_{xy} &= 2k\Big[\frac{2\beta^2}{(1+\beta^2)-2\beta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)} \\
&\quad -\frac{(1-\beta^2)}{(1+\beta^2)+2\beta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\Big]\sin\theta\ \cos\theta
\end{aligned}
\right\}
\quad (2\cdot6\cdot30)
$$

つぎに x 軸に沿っての応力成分は、x 軸では $y=0$ とおいて $z=x$, $\bar{z}=x$ であるから、(2・6・25)式および(2・6・26)式より

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= k\Big[\,2\,ln\frac{2x}{x+\sqrt{x^2-4c^2\beta}}+\frac{x}{\sqrt{x^2-4c^2\beta}} \\
&\quad -\frac{2c^2(1+\beta^2)}{\sqrt{x^2-4c^2\beta}\ (x+\sqrt{x^2+4c^2\beta})}\Big]-(1+\beta)\Big] \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma h(1+\lambda) \\
\sigma_y &= k\ \ 2\,ln\frac{2x}{x+\sqrt{x^2-4c^2\beta}}-\frac{x}{\sqrt{x^2-4c^2\beta}} \\
&\quad +\frac{2c^2(1+\beta^2)}{\sqrt{x^2-4c^2\beta}\,(x+\sqrt{x^2-4c^2\beta})} \\
&\quad +(1+\beta)\Big]-\frac{1}{2}\gamma h(1+\lambda) \\
\tau_{xy} &= 0
\end{aligned}
$$

また y 軸に沿っての応力成分は、y 軸上では $z=iy$, $\bar{z}=-iy$ であるから、つぎのようになる。

$$
\begin{aligned}
\sigma x &= k\Big[\,2\,ln\frac{2y}{y+\sqrt{y^2+4c^2\beta}}-\frac{y}{\sqrt{y^2+4c^2\beta}} \\
&\quad +\frac{2c^2(1+\beta^2)}{\sqrt{y^2+4c^2\beta}\,(y+\sqrt{y^2+4c^2\beta})}+(1-\beta)\Big] \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma\ h(1+\lambda) \\
\sigma_y &= k\Big[\,2\,ln\frac{2y}{y+\sqrt{y^2+4c^2\beta}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+4c^2\beta}} \\
&\quad -\frac{2c^2(1+\beta^2)}{\sqrt{y^2+4c^2\beta}\ (y+\sqrt{y^2+4c^2\beta})}-(1-\beta)\Big] \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma\ h\ (1+\lambda)
\end{aligned}
\qquad (2\cdot6\cdot32)
$$

$\tau_{xy} = 0$

特別な場合として地山材料のポアッソン比$\nu = 0.5$と仮定したときには$\lambda = 1$となり、$p = q = -\gamma h$となつて弾塑性境界は半径$a = 0$なる円となる。この場合の弾塑性境界上x軸上およびy軸上の応力成分はそれぞれ(2・6・30)〜(2・6・32)式において$\lambda = 1$として得られる。なおこの場合には0は

$$0 = r_0 \, e^{\frac{1}{2k}(-\gamma h + \sigma_{r_0} - k)} \qquad (2 \cdot 6 \cdot 33)$$

となる。またさらに$p = q = -\gamma h$なる状態で、円孔の内側よりの荷重σ_{r_0}がない場合には、性領域は半径が、

$$0 = r_0 \cdot e^{-\frac{1}{2k}(\gamma h + k)} \qquad (2 \cdot 6 \cdot 34)$$

なる円となる。この場合に対してもさきと同様に応力成分が計算される。

6・2　塑性領域が円形坑道周辺に生ずるための条件

弾塑性境界は(2・6・28)式で与えられ、定数0は(2・6・20)式に示されるとおりである。図に示されるような応力状態で最初に円孔周辺に塑性領域を生ずるのはA点であつて、その条件は次式のようになる。

$$a = r_0 \qquad \therefore 0(1+\beta) = r_0$$

$$-\frac{1}{2k}\left\{\frac{\gamma h(1+\lambda)}{2} + k - \sigma_{r_0}\right\} + \log\left\{1 - \frac{\gamma h(1-\lambda)}{2k}\right\} = 0$$

(2・6・35)

また円孔周辺全体が塑性状態になり始める場合はつぎのごとき条件を生ずる。

$$b = r_0 \qquad \therefore 0(1-\beta) = r_0 \qquad (2 \cdot 6 \cdot 36)$$

$$-\frac{1}{2k}\left\{\frac{h(1+\lambda)}{2} + k - r_0 + \log 1 + \frac{h(1-\lambda)}{2k}\right\} = 0$$

つぎに特別な場合として地山材料の$\nu = 0.5$の場合、塑性領域(弾塑性境界は半径$a = 0$の円)が円孔周辺に生ずる条件は上式より

$$h - r_0 = -k \qquad (2 \cdot 6 \cdot 37)$$

また円孔内辺に外力がなく、$\lambda = 1$の場合、すなわち$\sigma_{r_0} = 0$、$p = q = -\gamma h$のときは

$0 = r_0 \, e^{\frac{-1}{2k}(\gamma h + k)}$　($k < 0$)となり、

$$h=-\frac{k}{r} \qquad (2\cdot6\cdot38)$$

となり。地山材料の破壊強度に対する円孔周辺に塑性領域を生ずる坑道深さ h の関係が与えられる。

6・3　塑性領域における成分応力

塑性領域においては応力関数は（2・6・10）式で与えられるから、それより各成分応力を求めればつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} x^{(1)}+\ y^{(1)}&=2k(1+ln\frac{zz}{r_0})-2^{\sigma}r_0 \\ y^{(1)}-\ x^{(1)}+2i\ \ xy&=2k\ \frac{z}{z} \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot6\cdot39)$$

円孔周辺においては　$z=x+iy=r_0$　であるから、この関係を用いれば

$$\left.\begin{aligned} \sigma x^{(1)}&=k(1-\cos 2\theta)-\ r_0 \\ \sigma y^{(1)}&=k(1+\cos 2\theta)-\ r_0 \\ \tau xy^{(1)}&=-k\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot6\cdot40)$$

また x 軸に沿っては、

$$\begin{aligned} \sigma x^{(1)}&=2k\ \ ln\ \frac{x}{r_0}-r_0 \\ \sigma y^{(1)}&=2k(1+ln\ \frac{x}{r_0})-r_0 \\ \tau xy^{(1)}&=0 \end{aligned} \qquad (2\cdot6\cdot41)$$

y 軸に沿っては、

$$\begin{aligned} \sigma x^{(1)}&=2k(1+ln\ \frac{y}{r_0})-{}^{\sigma}r_0 \\ \sigma y^{(1)}&=2k\ \ ln\ \frac{y}{r_0}-\sigma r_0 \\ \tau xy^{(1)}&=0 \end{aligned} \qquad (2\cdot6\cdot42)$$

で与えられる。

6・4　数値計算結果とその考察

いま $\alpha=-\gamma h/2k$　（$k<0$ であるから $\alpha>0$ である）とおき、円形坑道の半径 $r_0=3\,m$、

地山の単位体積重量 $\gamma = 2.4\ t/m^3$ として、$\alpha = 0.5 \sim 5.0$ のときの弾塑性境界を与える楕円形の長軸 a および短軸 b の値を求める。この場合坑道は素堀と考え、したがって $r_o = 0$ で、地山材料のポアッソン比が $= 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ のそれぞれの場合について考える。まず(2・6・20)式より c を求め、その値を(2・6・27)式に用いて表－2・6・1のような値をうる。これらの値を片対数の方眼紙に図示し、$\log a$ あるいは $\log b$ と α との関係を ν をパラメーターとして示すと図－2・6・2のようになる。

この図より明らかなように弾塑性境界の半径は α の増加にしたがって増大するが、$\log a$ と α との関係は $\nu > 0.3$ の場合にはほとんど直線的である。a の値は $\alpha < 2.0$ では ν の値によって($\nu < 0.4$ において)はとんど影響をうけないと考えられるが、$\alpha > 2.0$ の場合には $\nu = 0.4$ までは ν の値の増加によって a は増大し、$0.4 < \nu < 0.5$ の範囲でまた少し減少する。つぎに y 軸上の弾塑性領域の半径 b については α が $0.5 \sim 5.0$ の範囲では、$\nu = 0.4$ の場合に $1.5 < \alpha < 2.5$ でわずかに $b > 3.00\ m$ となつて坑道周辺に塑性領域を生ずることを示している。しかし $\nu = 0.5$ の場合ではいかなる α の値にたいしても $b > 3.00\ m$ となり、かつその大きさは a とまつたく同一になつて a と同様の変化を示す。したがつて $0 < \alpha < 5.0$ の範囲で塑性領域が坑道周辺をとりまくような場合は ν が0.4と0.5の間にある場合を考えられる。

つぎに塑性領域が坑道の周辺を取り巻いて生ずるような場合の応力分布について考察するため、2つの例について計算してみる。素堀坑道の中心深さを $h = 125\ m$，地山材料の単位体積重量を $\gamma = 2.4\ t/m^3$，ポアッソン比 $\nu = 0.4$ とし、地山材料の単純せん断時の破壊限界を(i)，$k = -10\ kg/cm^2$ (ii) $k = -7.5\ kg/cm^2$ と仮定する。

以上の諸値を用いて弾塑性限界を定める a および b の大きさおよび応力計算に必要な諸常数を求めるとつぎのようになる。

(i) $a = 953\ cm$，$b = 318\ cm$，$c = 635$

$\alpha = -1.5$，$\beta = 0.5$

(ii) $a = 1606\ cm$，$b = 321\ cm$，$c = 963$

$\alpha = -2.0$，$\beta = 0.667$

上の各数値を用いて(2・6・30)式より弾塑性境界上の応力成分(σ_x，σ_y，τ_{xy})を(2・6・31)式および(2・6・41)式より x 軸に沿う弾性領域および塑性領域における3応力成分を、また(2・6・32)式および(2・6・42)式より y 軸に沿うそれらを求め、応力分布を図示すれば、それぞれ図－2・6・3，2・6・4，2・6・5 のようになる。図－2・6・4および2・6・5には比較のために坑道周辺がなお弾性状態を保つている場合の応力分布も同時に書かれている。

まず坑道中心を通る水平断面上(x 軸上)の応力分布について考察してみる。この場合は地山

の初期応力は鉛直方向に$P_v = -\gamma h = -30\ kg/cm2$，水平方面に$P_h = -\lambda\gamma h = -20\ kg/cm2$，であるから地山材料の破壊強度が高くて坑道周辺が弾性状態を保つている場合には坑道周辺における緑応力（σy）は$\sigma y = -70\ kg/cm2$となる。そしてこの応力σyはσxと同様に地山の内部に入るにしたがつて急速に初期応力値に近づき，坑道開削による坑道周辺の応力攪乱（応力集中）は$x/r_0 < 4$のごく坑道側壁の近傍にかぎられる。しかし地山材料の破壊強度が低い場合には坑道周辺に塑性領域を生じ，応力の分布状態がいちじるしく変化してくる。すなわちσyについて見れば，坑道側壁における緑応力は$\sigma y = -78\ kg/cm2$からそれぞれ破壊強度の(1) $\sigma y = -20\ kg/cm2$ (11) $\sigma y = -15\ kg/cm2$まで減少し，応力集中が緩和される傾向にあるが，塑性領域では地山内部に入るほどの応力σyを増加し，弾塑性境界において最大となり，弾塑性領域に入つて減少して初期応力値に近づく。この場合弾塑性境界は地山材料の破壊強度が低いほど地山内部に移行し，その位置におけるσyの最大値は減少してくるが，応力の攪乱範囲は増大することになる。つぎにσxについて見れば，この応力の大きさも弾塑性状態の場合よりも弾塑性状態の場合の方が坑道のごく近傍において減少し，破壊強度の低いほどその減少度は大きいが，逆に弾塑性境界の近傍ではその値は大きくなり，地山の初期応力以上になる。

xの最大値も弾塑性境界の近傍であるが，破壊強度が大きい場合にはその境界よりもむしろ弾性領域側において最大応力を示し，かつ応力の変化がゆるやかであるのに反し，破壊強度の小さい場合は境界上に応力のピークがあり，その分布も急峻になつてくる傾向がある。

つぎに坑道中心を通る鉛直断面上（y軸上）の応力分布を見れば，この場合も坑道上盤の緑応力（σx）は$-30\ kg/cm2$よりそれぞれ(1) $-20\ kg/cm2$，(11) $-15\ kg/cm2$，に減少するが，塑性領域は坑道壁のごく近傍だけであり，坑道周辺の$y/r_0 < 3$の範囲を除いてσxの分布にはほとんど影響が及ぼされない。これに対してσyは破壊強度の低下につれて地山内部のかなり遠いところまで応力値を減少することが認められる。

表−2・6・1

α	$\nu = 0$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.2$		$\nu = 0.3$		$\nu = 0.4$		$\nu = 0.5$	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
	m		m		m		m		m		m	m
0. 5	3.50	−	3.47	−	3.42	−	3.34	−	3.22	−	3.00	3.00
1. 0	6.00	−	5.99	−	5.95	−	5.84	−	5.58	−	4.95	4.95
1. 5	9.63	−	9.77	−	9.87	−	9.87	−	9.53	3.18	8.15	8.15
2. 0	14.84	−	15.35	−	15.88	−	17.03	−	16.06	3.21	13.45	13.45
2. 5	22.23	−	23.51	−	24.96	−	26.36	−	26.79	−	22.17	22.17
3. 0	32.62	−	35.33	−	38.56	−	42.10	−	44.33	−	36.55	36.55
4. 0	67.23	−	76.49	−	88.67	−	104.07	−	119.01	−	99.35	99.35
5. 0	133.00	−	159.34	−	196.72	−	249.64	−	312.99	−	270.05	270.05

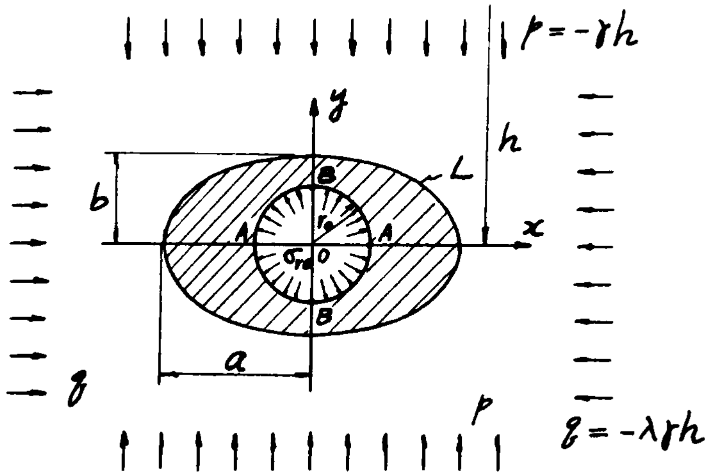


图-2·6·1

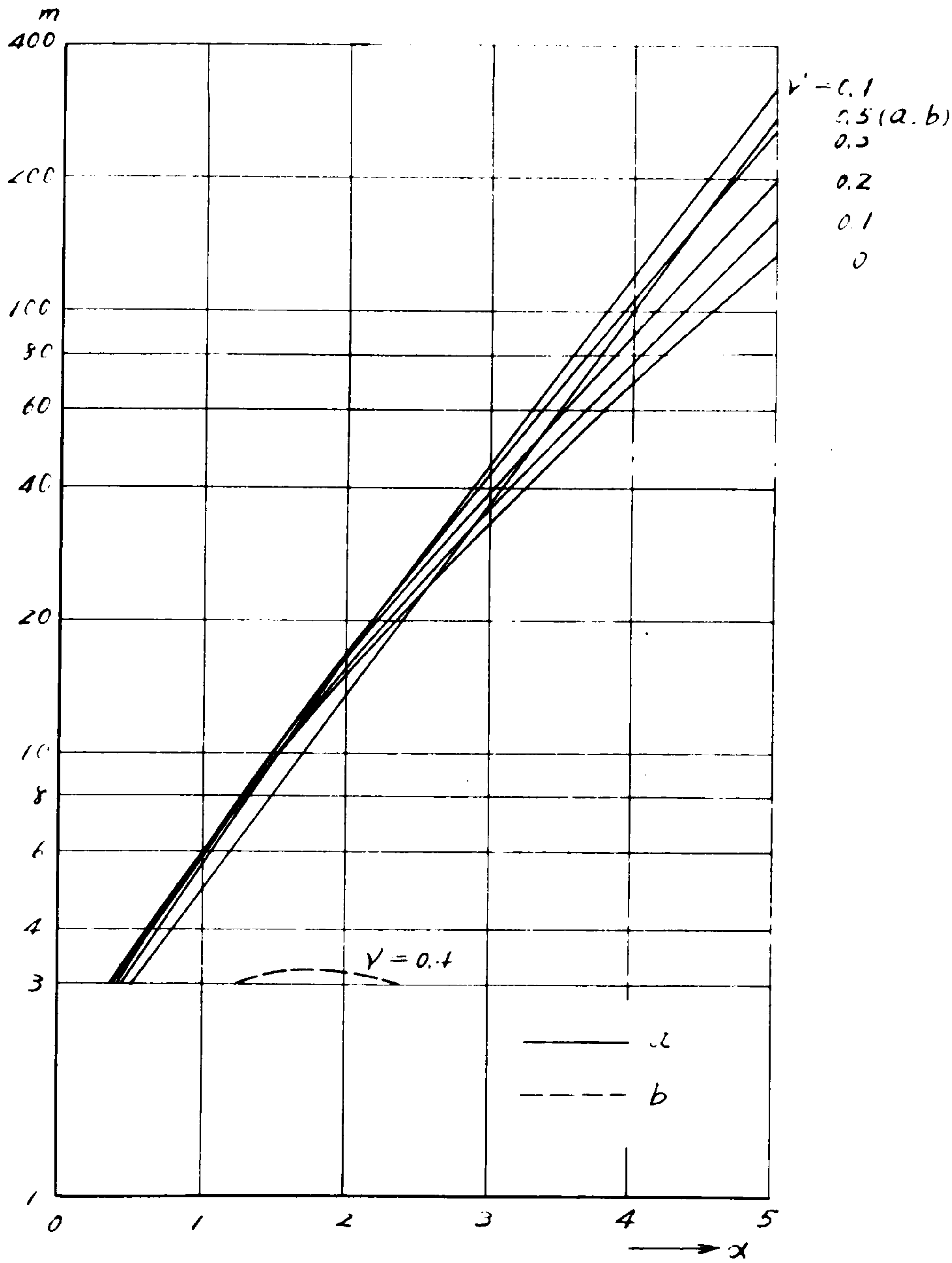

m
400
200
100
80
60
40
20
10
8
6
4
3
1
0
1
2
3
4
5
x
γ = 0.4
0.5 (a. b)
0.3
0.2
0.1
0
γ = 0.4
a
b

図-2·6·

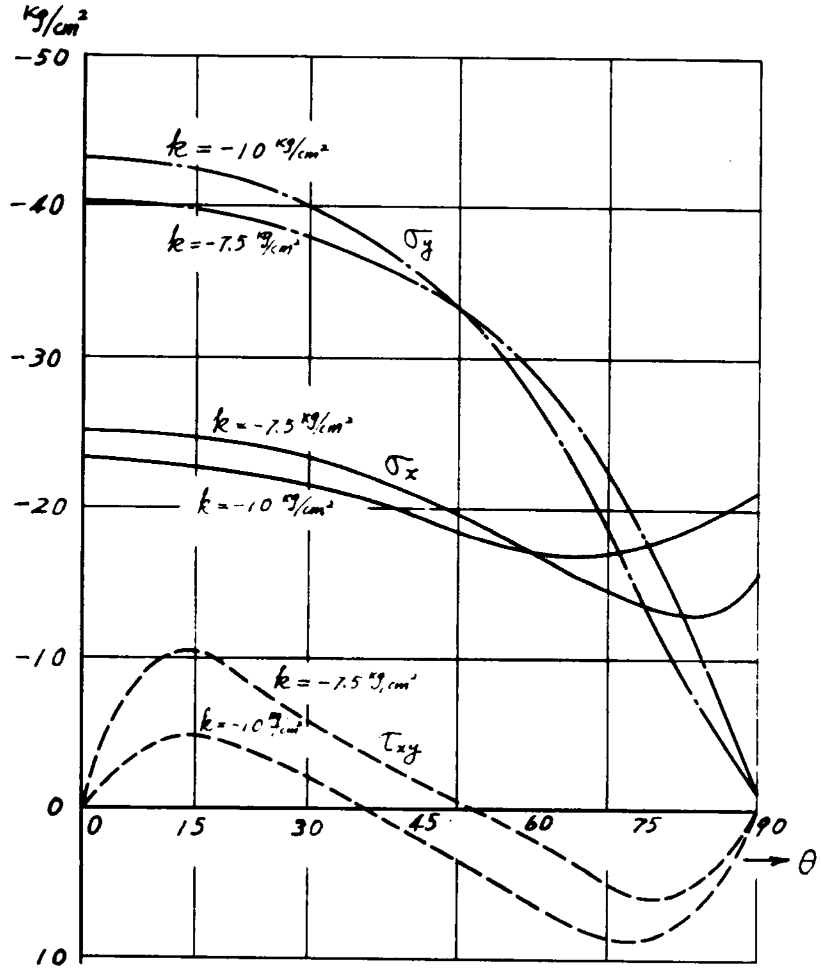


図-2・6・3　弾塑性境界上の応力分布
($h = 125m$)

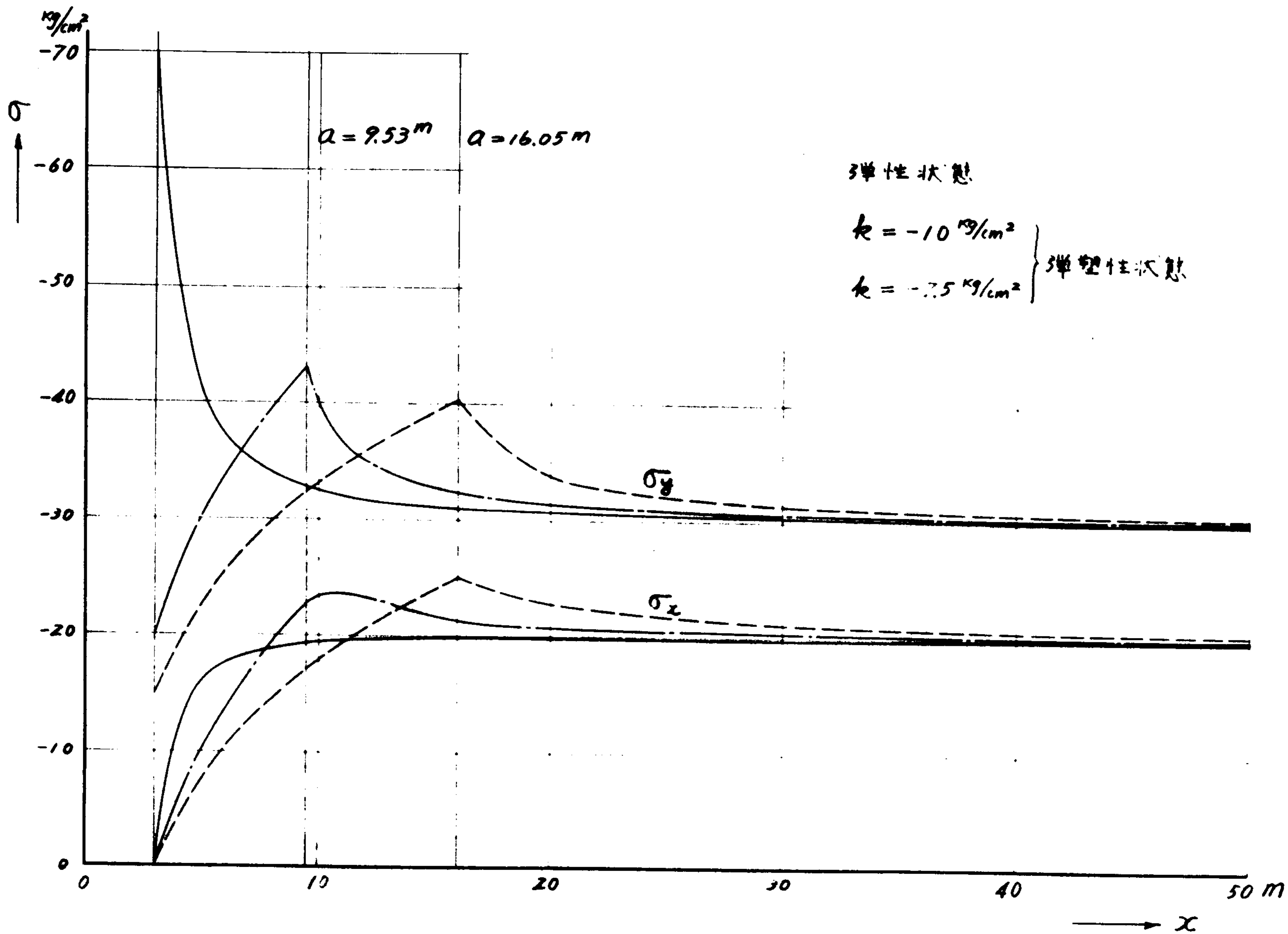


図-2·6·4 水平軸（x 軸）上の応力分布 （$h = 125\,m$）

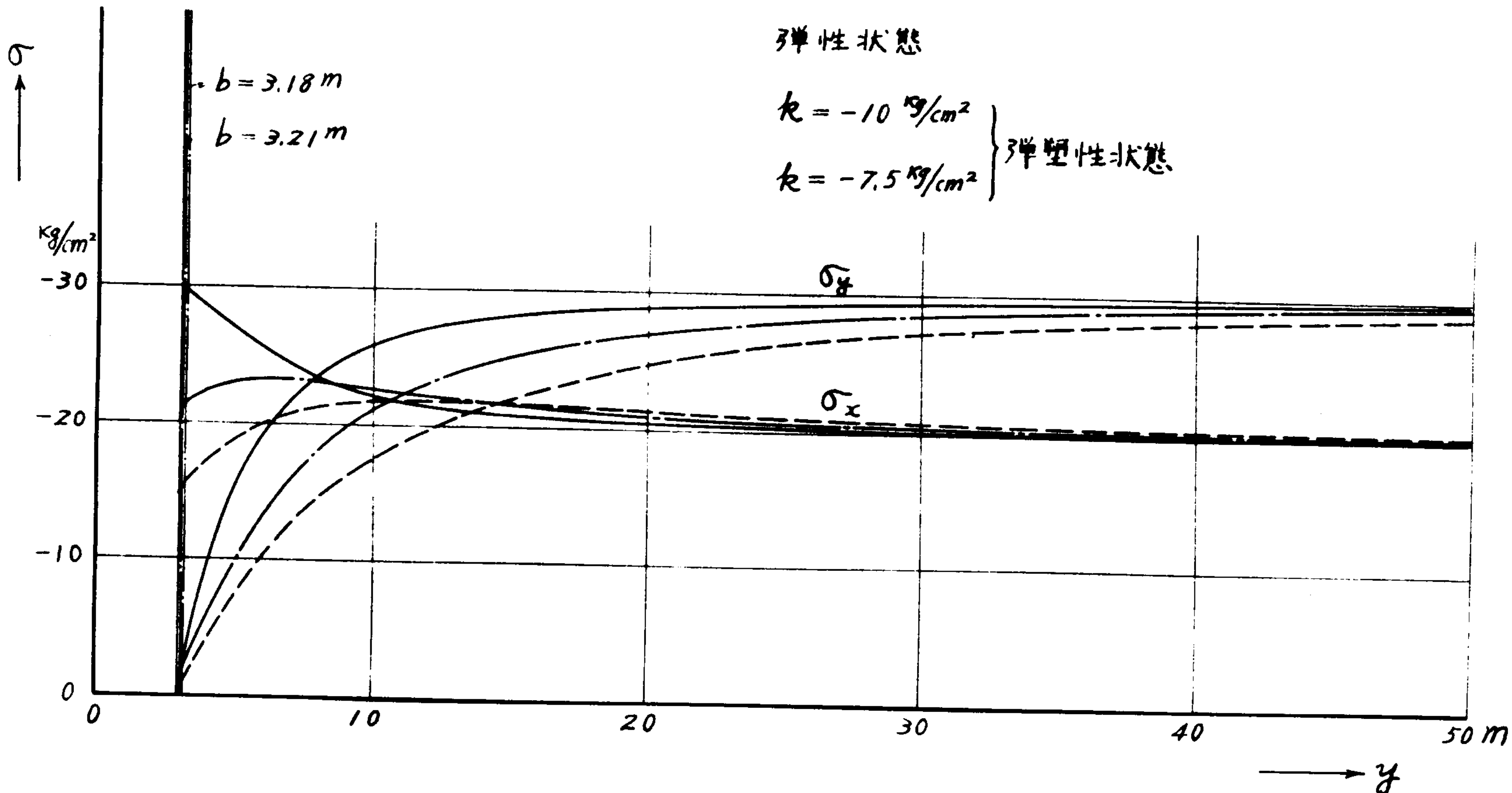


図-2・6・5　鉛直軸（y軸）上の応力分布　（$h = 125\,m$）

才 7 章　塑性地山における水平坑道周辺応力状態

塑性地山に対する理論的な取扱い方法については第1篇第4章で述べたとおりである。いま問題を2次元的に取扱い、この塑性地山の内部摩擦角をϕとして、粘着力のない場合を考えると、地山内の応力状態は、最大主応力をσ_1，最小主応力をσ_2とすれば一般に(1・4・6)式で与えられる。しかし坑道が開削されて地山の初期応力状態の平衡が破られ、坑道周辺に応力集中がおこる場合、応力状態(1・4・6)式で右辺が左辺よりも大きい状態になるとせん断破壊をなし、σ_1/σ_2の値が$(m-1)$より$(1+\sin\phi)/(1-\sin\phi)$になるまで地山は滑り面に沿つて運動する。すなわち坑道周囲の地山は坑道空間に向つて流動をおこす。しかして(1・4・5)式で与えられる状態，

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \qquad (2・7・1)$$

すなわちMohrの流動限界条件を満足する状態になつてはじめて塑性釣合状態を生ずるようになる。このような考えのもとで従来種々の研究がなされてきており、とくにR．Fenner[46]の式はしばしば引用されている。さらに平松，岡[47]は同様の応力式を導くとともに、塑性流動と支保との関係について言及している。しかしこの両者の研究はいづれも静水圧的な初期応力状態の場合に対して行われており、水平坑道に対して地山の内部摩擦角ϕが非常に小さいとき、あるいは開坑以前の地山が弾性体とみなされる場合には、そのポアツソン数mが2に近い値をとるときにのみ近似的に応力式を用いることができる。なお立坑に対しては、坑軸方向(鉛直方向)応力が塑性流動に関係してくるから、厳密には適用できないが、従来より近似的に用いられている。

そのほか塑性地山中の水平坑道応力の研究としては伊藤[48]小田[49][50]の研究がある。伊藤は砂層中に掘つた導坑の坑頂が地圧を受けて沈下するときの坑頂圧を求める式を導き、その坑頂圧の最小限界値は砂層の高さに無関係であることを確かめ、さらに計算に用いられるところの坑頂の上部にできる崩壊面の高さは、実験によつて求められた坑頂の幅の約1.3倍なる値を用いても大過ないことを述べている。また小田は弾性体の地山中に塑性体とみなされる水平層が介在している場合を考え、その塑性層中に坑道を開削した場合の応力を理論的に求め、その結果つぎのように結論している。坑道の近くでは塑性流動するために、各成分応力は坑道に近くなるほど小となる。坑道より塑性流動限界まで応力は増し、ここで主応力の平均値が水平層の初期応力と等しくなつて、それより外方では塑性流動は起きない。水平塑性層はその中央に近い物質ほど坑道中心に向い塑性流動をなし、上下の境界面に近づくほど各成分応力を増大する。なお小田の結果は炭層中に設けられた沿層坑道に対して適用できるものと思われる。

つぎにR．Fennerの式を示し，その数値計算結果より塑性地山中の坑道周辺応力状態につてて考察することにする。図－２・７・１のように地山の初期応力状態が $\sigma r = \sigma\theta = P$ なる 性地山に，半径 a なる円形坑道が堀削された場合を考える。この場合 $\sigma\theta$，σr はそれぞれ最大最小主応力となり，塑性釣合状態においては（２・７・１）式より両者の間につぎのような関係式が成立つ。

$$\sigma_\theta = (K-1)\,\sigma_r \qquad (2\cdot7\cdot2)$$

ここに

$$K = \frac{2}{1-\sin\phi}$$

さらに応力成分 σr，$\sigma\theta$ はつぎに示す釣合条件式をも満足しなければならない。

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad (2\cdot7\cdot3)$$

（２・７・２）式を（２・７・３）式に代入して解けば，塑性釣合状態にある領域での主応力式はつぎのように求まる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\sigma_{ra}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2}\\ \sigma_\theta &= -(K-1)\,\sigma_{ra}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2}\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot7\cdot4)$$

上式では σ_{ra} は坑道壁面の反力を示すものである。さらに塑性釣合状態にある領域外の部分，すなわち弾性釣合状態にある領域での応力式は，その両域の境界において両領域の応力 σr，σ_θ $\tau_{r\theta}$ がそれぞれ等しく，かつ無限遠において坑道開削前の初期応力 $\sigma_r = \sigma_\theta = P$ に等しいことより，つぎのように導かれる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -P\left\{1-\frac{b^2}{r^2}\left(1-\frac{2}{K}\right)\right\}\\ \sigma_\theta &= -P\left\{1+\frac{b^2}{r^2}\left(1-\frac{2}{K}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (2\cdot7\cdot5)$$

上式では b は両領域の境界を示す値であつて，次式より計算される。

$$b = a\left(\frac{2P}{K\sigma_{ra}}\right)^{\frac{1}{K-2}} \qquad (2\cdot7\cdot6)$$

R．Fennerの行った計算結果を示せば図－2.7.2のごとくであり，P が６０ kg/cm2，８０ kg/cm2，１２０ kg/cm2，の３つの場合に対する坑道周囲の応力分布を示している。なおこの場合いずれも $\sigma_{ra} = 1$ kg/cm2 にとっている。これらの図より判るように塑性釣合状態にあ

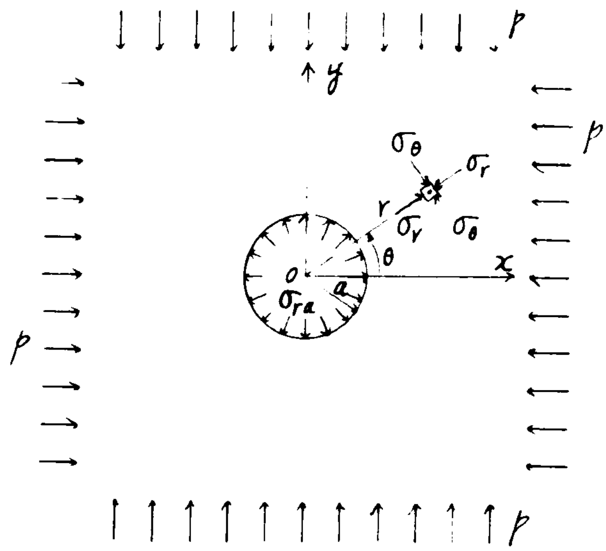
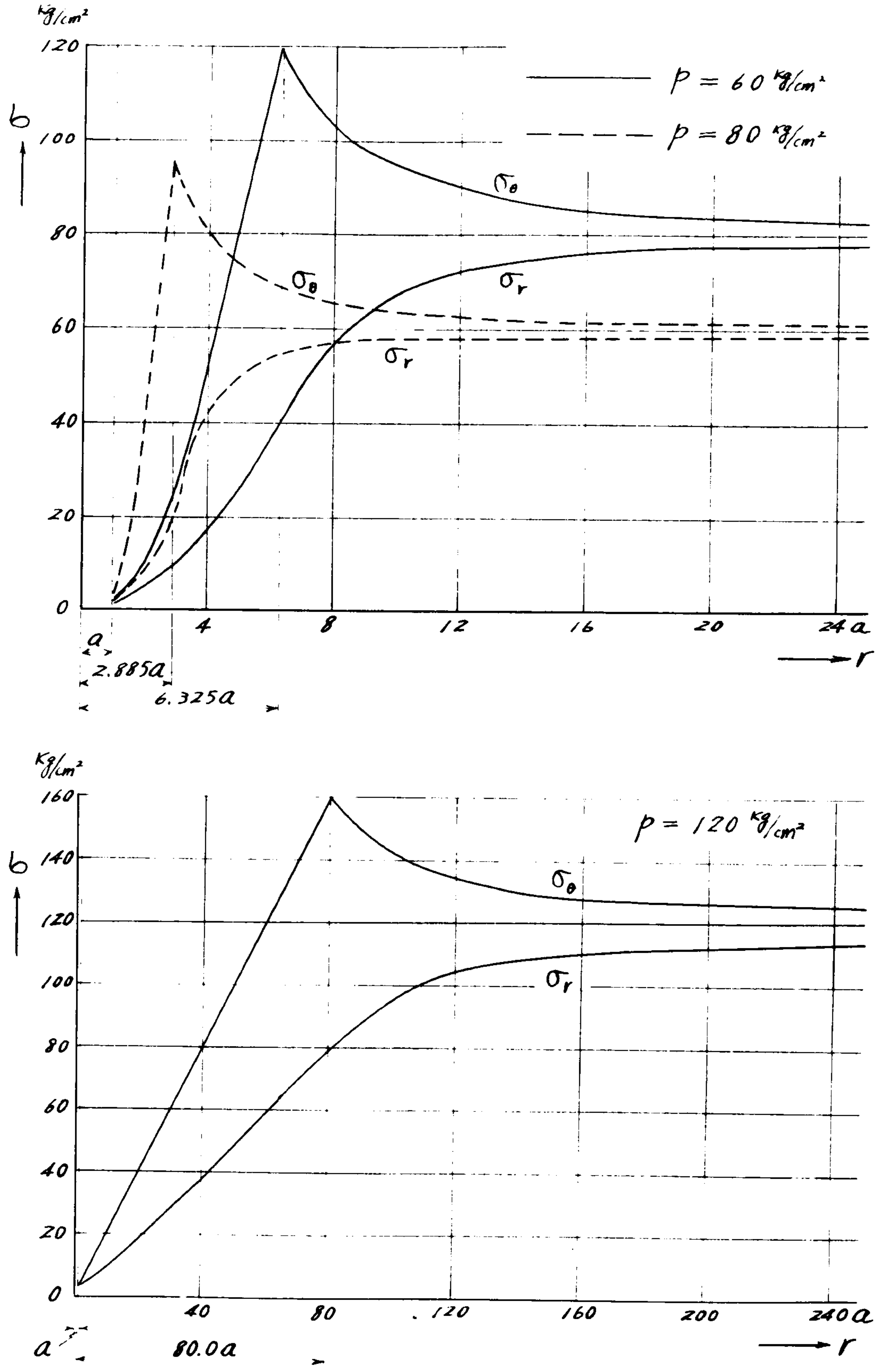


図-2·7·1



(Fenner による)

図 - 2・7・2

る領域は初期応力Pが増大するほど坑道周囲に大きく拡がり，その領域内では坑道壁に近づくほどかなり応力を減少する。なお著者も水平坑道に対しては静水圧的な初期応力状態の場合に相当する近似解を求めているが，後出の立坑周辺の応力状態に対する研究のところで述べることにする。

才 8 章　粘弾性地山における水平坑道の変形挙動

粘弾性体に対する理論的取扱いについては第1篇第5章に詳述したとおりであり、地山の粘弾性的性質について種々のレオロジー的模型を仮定して、その変形挙動を説明している。粘弾性体と考えられる地山に坑道が開削された場合には、坑道周辺に惹起された応力集中によつて生ずる坑道周囲地山の変位は、開削後ただちに生ずるのでわなくて、時間とともに増大するのが認められている。したがつて現場的に言えば支保にかかる″荷″は時間的に増大してくることになり、坑道の変形挙動は支保の時期あるいは支保方法に大いに影響を及ぼすことになるだろう。

地山を構成する土壌や岩石の粘弾性的性質に対する研究については、さきにも述べたとおりであるが、レオロジー的な取扱いを適用した粘弾性体としての地山中の坑道の変形挙動については小田の研究[51]を見るのみである。その結果粘弾性地山内に設けられた坑道の変形挙動を考える場合には、地山材料の特性よりもつとも適した力学的模型を仮定し、それらの各要素の定数の値を実験的に求めることによつてヒズミと時間との関係がえられるから、その後は弾性体に対する解を求めて、それに時間に関する *operation* を施せば変形―時間関係式がえられる。しかし 開坑後の時間がある程度たてば（厳密には $t\to\infty$ であるが）坑道周辺の変位状態は弾性体としての地山内の坑道に対する変位と等しくなると考えられる。なおこのような坑道周辺の変形挙動は、支保の″荷″を合理的に抑制するために利用することができる性質のものであると思われる。

才 9 章　立坑周辺の応力状態

9.1 弾性的応力状態に対する近似解法

円形立坑の周辺応力状態に対する計算としては、杉原52）、鈴木53）等の行つたものがあるが、その後の平松、岡両の研究によれば、前二氏の3次元問題として求めた応力式より算出したある深さ(h)における応力成分$(\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta)$は、その深さにおける水平な微小厚さの截片に対する2次元問題として近似的に求めた結果とほとんど差異のないことが確められている。それでここにおいてもつぎのようにある深さの位置における平面ヒズミの問題として求めた近似解法を述べることにする。

(1) 応力状態

( ) 素掘坑道の場合

いま図－2・9・1のように円形立坑を考え、その軸をz軸とし円筒座標系r, θ, zを使用する。立坑が掘られる場合、立坑からかなり距離のはなれた所においては、その掘削の影響を受けないだろう。攪乱されていない地山中の鉛直応力、すなわち地圧強度が地表面からの深さzに比例するものとすれば、それは

$$\sigma_z^\circ = -\gamma z \qquad (2 \cdot 9 \cdot 1)$$

γ：地山の単位体積重量

であり、またフックの法則により水平面内の半径方向応力σ_r°、切線方向応力σ_θ°は

$$\sigma_r^\circ = \sigma_\theta^\circ = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z^\circ = -\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z \qquad (2 \cdot 9 \cdot 2)$$

ν：岩盤のポアソン比

である。結局立坑の掘削によってその附近に応力の変化が惹起されるわけであるが、その応力状態は無遠限において（2・9・2）なる力をうける有孔無限体として近似的に求められるであろう。

いま図－2・9・1 におけるごとく地表面からzなる深さにおいて水平な微小厚さの部分を考えて、その部分に作用するせん断応力は無視しうるものと見做せば、問題は軸対称となり、かつ応力成分σ_r、σ_zは主応力となる。そしてこれら応力成分の間に満足されなければならないただ一つの釣合方程式は、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad (2 \cdot 9 \cdot 3)$$

となる。応力関数ϕを用いれば、この場合ϕはrのみの関数となるから適合条件式は、

$$\frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\phi}{dr} = 0 \qquad (2 \cdot 9 \cdot 4)$$

これの一般解として次式をうる。

$$\phi = A\log r + Br^2\log r + Cr^2 + D \qquad (2 \cdot 9 \cdot 5)$$

ここでA、B、C、Dはそれぞれ積分常数であり、境界条件より決定されるべきものである。さらにこの応力関数より各成分応力を求めれば、

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1+2\log r)+2C \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3+2\log r)+2C \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(2.9.6)$$

この場合Bは変位の方から考えて0にならねばならず、結局(2・9・6)はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(2.9.7)$$

いま素掘立坑の半径をaとすれば境界条件はつぎのように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&r = a \text{において、} \sigma_r = 0 \\ &r = \infty \text{において、} \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 \\ &= -\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z\end{aligned}\right\}\qquad(2.9.8)$$

(2・9・7)、(2・9・8)より常数AおよびCを求めれば、

$$A = -\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z a^2$$

$$C = -\frac{\nu}{2(1-\nu)}\gamma z$$

となる。ここで鉛直方向応力σ_zは変化をうけないものと仮定すれば、深さHなる岩盤内の応力は次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -WH(1-R^2) \\ \sigma_\theta &= -WH(1+R^2) \\ \sigma_z &= -\gamma H\end{aligned}\right\}\qquad(2.9.9)$$

ここで、$W = \frac{\nu}{1-\nu}\gamma$、$R = a/r$

(ii) 巻立立坑の場合

この場合立坑の自重を無視するものとする。まえと同様立坑の軸をz軸とする円筒座標を用いれば、軸対称の問題と考えられ、応力関数も同様のものがとられうる。図-2・9・2のように覆工の内径をb、外径をaとする。覆工に対しては、すなわち$b \leqq r \leqq a$において応力関数は、

$$\phi' = A' \log r + C' r^2 \qquad(2.9.10)$$

が考えられ、これより各成分応力は、

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r' &= A'/r^2 + 2C' \\ \sigma_\theta' &= -A/r^2 + 2C'\end{aligned}\right.\qquad(2.9.11)$$

$\tau_{r\theta}' = 0$

また変位は次式で与えられる。

$$u' = \frac{1+\nu'}{E'}\left\{-\frac{1}{r}A' + 2(1-2\nu')C'r\right\}$$
$$v' = 0 \qquad (2.9.12)$$

E'：覆工の弾性係数

ν'：覆工のポアソン比

また地山に対しては、すなわち $a \leqq r$ においては応力関数および各成分応力は（2．9．5）式および（2．9．7）式で与えられる。地山中の変位は、

$$u = \frac{1+\nu}{E}\left\{-\frac{1}{r}A + 2(1-2\nu)Cr\right\} \qquad (2.9.13)$$
$$v = 0$$

この場合地山と覆工とはその境界面で完全に結合しているものとすれば、境界条件はつぎのようになる。

$r = b$ において $\sigma_r' = 0$、$\tau_{r\theta}' = 0$

$r = a$ において $\sigma_r' = \sigma_{sr}$、$u' = u \qquad (2.9.14)$

$v' = v$

$r = \infty$ において $\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z$

（2．9．11）、（2．9．12）、（2．9．7）、（2．9．13）、を（2．9．14）に代入すればつぎのように4つの条件式をうる。

$A' + 2C' b^2 = 0$

$A' + 2C' a^2 = A + 2Ca^2 - A'$

$+ 2(1-2\nu')C' a^2 =$

$E_o\left\{-A + 2(1-2\nu)Ca^2\right\}\frac{1+\nu}{1+\nu'}$

$C = -\frac{\nu}{2(1-\nu)}\gamma z$

ただし　$E_o = E'/E$

これらより未定係数 A'、C'、A、C を求めれば、

$$A' = \frac{2(1-\nu)E_o b^2 W_z}{D}$$

$$C' = -\frac{(1-\nu)E_o W_z}{D}$$

$$A = \frac{\left\{D - 2(1-\nu)(1-k^2)E_o\right\}a^2 W_z}{D}$$

$$C = -\frac{1}{2}W_z$$

ここに $k = b/a$、$D = \frac{1+\nu'}{1+\nu}(1-2\nu'+k^2) + (1-k^2)E_o$

（2．9．15）

したがつて、いま

$$
\left.
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{2(1-\nu)E_o}{D} \\
K_2 &= \frac{D-2(1-\nu)(1-k^2)E_o}{D} \\
R' &= b/r \quad R=a/r
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.9.16)
$$

と置けば、深さ $z=H$ における各成分応力はつぎのようになる。

覆工（$b \leqq r \leqq a$）にたいして

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_r' &= -WHK_1(1-R'^2) \\
\sigma_\theta' &= -WHK_1(1+R'^2)
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.9.17)
$$

地山（$a \leqq r$）にたいして

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_r &= -WH(1-K_2 R^2) \\
\sigma_\theta &= -WH(1+K_2 R^2) \\
\sigma_z &= -\gamma H
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.9.18)
$$

(2) ヒズミおよび変位

つぎに地山および覆工の変位およびヒズミを求める。本問題は軸対称のものであるから一般に弾性体中の一点の変位とヒズミ、ヒズミと応力との間にはそれぞれつぎのような関係がある。

$$
\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r},\ \epsilon_\theta = \frac{u}{r},\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2.9.19)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\epsilon_r &= \frac{1}{E}\ \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) \\
\epsilon_\theta &= \frac{1}{E}\ \sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z) \\
\epsilon_z &= \frac{1}{E}\ \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.9.20)
$$

上式において u、w は半径方向および軸方向の変位成分、ϵ_r、ϵ_θ、ϵ_z はそれぞれ半径、切線、軸の各方向のヒズミ成分を表わす。

素掘立坑の場合には（2．3．9，）を（2．9．20）に代入し、さらに $r=\infty$ で $u=0$ なることを考慮して（2．9．19）を用いれば、地山中の一点の変位は次式で与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
u &= -\frac{1}{E}WH(1+\nu)a^2/r \\
w &= -\frac{W}{2E}\ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}H^2 + C
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.9.21)
$$

ここに C は地表面の初期条件に関した常数である。したがつて（2．9，19）、（2．9．21）より地山中のヒズミは次式のごとくなる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\epsilon_r &= \nu AHR^2 \\
\epsilon_\theta &= -\nu AHR^2
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.9.22)
$$

$$\varepsilon_z = -A(1-2\nu)H$$

ただし　$A = \dfrac{(1+\nu)\gamma}{(1-\nu)E}$

つぎに覆工を有する立坑においては、(2.9.17)〜(2.9.20)を用いてつぎのように変位が求められる。

覆工($b \leq r \leq a$)にたいして

$$u' = -\frac{WHK_1}{E}(1+\nu')\left\{-(1-2\nu')r + \frac{b^2}{r}\right\} \qquad (2.9.23)$$

地山($a \leq \nu$)にたいして

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{WH}{E}(1+\nu)\left\{-(1-2\nu')r + K_2\frac{a^2}{r}\right\} \\ w &= -\frac{W}{2E}\,\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}H^2 + C \end{aligned}\right\} \qquad (2.9.24)$$

したがってこの場合のヒズミ成分は上式および(2.9.19)より

覆工($b \leq r \leq a$)にたいして

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \nu' AHK_1 R^2 + AHK_1(1-2\nu') \\ \varepsilon_\theta &= -\nu' AHK_1 R^2 + AHK_1(1-2\nu') \end{aligned}\right\} \qquad (2.9.25)$$

地山($a \leq r$)にたいして

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \nu AHK_2 R^2 + AH(1-2\nu) \\ \varepsilon_\theta &= -\nu AHK_2 R^2 + AH(1-2\nu) \\ \varepsilon_z &= -A(1-2\nu)H \end{aligned}\right\} \qquad (2.9.26)$$

(3)　数値計算例およびその考察

上において求めた解に対してつぎのような例につき計算を行った。立坑の素掘面の半径 $a=2{,}9$ m、覆工内壁半径 $b=2{,}5$ m、地山岩盤の弾性係数 $E=1{,}5\times10^5$ Kg/cm²、ポアッソン比 $\nu=0{,}2$、覆工のコンクリートに対して $E'=2{,}0\times10^5$ Kg/cm²、$\nu'=0{,}15$、地山岩盤の単位体積重量 $\gamma=2{,}4$ t/m³とする。しかるときは計算式内の各係数は次のような値をとる。

$W=600$ Kg/cm²　　$Eo = E'/E = 1{,}3333$　　$k = b/a = 0{,}8621$

$D=1{,}5633$　　$K_1=1{,}3646$　　$K_2=0{,}6494$

これらの係数を用い、いま $H=300$ m の水平面における応力分布を計算すれば、それぞれつぎのような図を得る。図−2・9・3は弾性地山に対するもので実線は素掘立坑、点線は覆工を有する立坑の半径及び切線方向応力分布である。この図よりわかるように、弾性岩盤での立坑は覆工を施すことによって、立坑壁面に反力を生じ立坑周辺で素掘の場合に比して半径方向応力 σ_r を増大し、切線方向応力 σ_θ を減少しているが、この例の場合には $r=15$ m 程度立坑から離れると両者の応力には、殆んど差異がないようである。

9．2　弾．塑性応力状態に対する近似解法[54)]

才1篇において述べたように降伏条件式としては3主応力を考慮に入れたものをとるべきであつてNadai[55)]や星埜[56)]の示しているごとく，正8面体せん断応力が正8面体垂直応力の既知関数となつたときに降伏することから立てられた式を採用するのが適当と思われる。しかしここにおいては比較的簡単な数学形式をとるMisesの降伏条件を用い，最初に平面ヒズミの状態で地山材料を非圧縮性と仮定した場合の近似的な解を求め，つぎに鉛直圧力をも降伏条件式に考慮し，Nadai[57)]また伊藤[58)]の解法と同じ手順により解を得，立坑周辺の弾．塑性応力状態について考察を行つた。

本論文には降伏条件としてMisesの降伏条件を用いたのであるが，従来土壌地山にたいしては破壊条件として普通のCoulomb実験公式が用いられている。しかしこの式で用いられる粘着力および内部摩擦角は実験的な常数であり，一つの土についても固有な常数ではなく種々の条件によつていちじるしく変るものであつて，その降伏条件の扱いもいちじるしく困難となる。しかるにもし地山の土壌が飽和軟粘土のごとく内部摩擦角が0と見なせるようなものであり，しかも近似的に平面ヒズミの状態と考えられる場合にはMisesの降伏条件が用いられるだろう。また地山が岩盤の場合においても岩盤が等方弾性状態から完全塑性状態に移行する理想的な過程を仮定することによりMisesの条件式を用いて弾．塑性応力状態を求めることができる。このようにMisesの降伏条件を実際の地山に適用する場合には種々制約をうけるが，この条件式の数学的取扱いが簡単なるがゆえに上のごとき状態にたいして適用することにより実際の場合にたいする近似的な解を求めることができる。

(1)　地山材料を非圧縮性と考えた場合の近似解

水平な表面をもつた地山内に半径a（覆工を有する場合にはその内壁の半径b）なる円形の立坑を鉛直に堀つたものとし，図－2.9.4に示すように地表面に原点を持ち立坑の軸をZ軸とする円筒座標系（r，θ，Z）を使用する。いま深さZにおける水平な微小厚さの部分を考え，軸方向のヒズミε_zがないものと仮定すれば平面ヒズミの問題となり，さらに軸対称であるから任意点における主応力は$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$となる。したがつて釣合方程式はつぎの一つとなる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad (2.9.27)$$

半径方間の変位の成分をuで表わせば，

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \qquad (2.9.28)$$

であり，uは地山内の位置と地山の弾．塑性状態によつて定められるものと考えられるから，弾

塑状境界の半径をρとすれば，uはrとρの関数$u=u(r,\rho)$で表わされる。また$\varepsilon_z=0$であるから平均垂直ヒズミは，

$$e=\frac{1}{3}(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right) \qquad (2.9.29)$$

いま地山を圧縮性と考えると$e\neq 0$となり，塑性領域における解を直接に求めることが困難となり，階差方程式等の助けをかりねばならない。しかし地山が弾性，塑性両領域において非圧縮性であると仮定することによつて問題を簡単に解くことができる。この仮定において地山材料の弾性的な圧縮性をも無視することになるが，しばしば完全非圧縮性の仮定は応力解析の結果にいちじるしくは影響をおよぼさないで問題を簡単に処理しうることが示されており，ここにおいてもこの仮定のもとにおける結果が後述の解法によるものと比較される。なお地山材料のポアッソン比が0.5に近いときにはこの仮定はかなり妥当であると思われる。また　ここにおいては問題を平面ヒズミの状態で取扱うため，従来の地山の鉛直圧力が降伏条件に関係しないことになるが，この点に関してもポアッソン比が0.5に近い場合にたいしては妥当である。

さてこの場合，$e=0$となり（2.9.29）式より

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}=0 \qquad (2.9.30)$$

となる。（2.9.30）式を積分すれば応力分布と無関係に弾性塑性両領域において

$$u(r,\rho)=-\frac{D(\rho)}{r} \qquad (2.9.31)$$

をうる。この場合弾塑性境界はZ軸を中心とする円形となることは明らかである。$D(\rho)$はρのみの関数である。したがつて各ヒズミ成分は次式で与えられる。

$$\varepsilon_r=\frac{D}{r^2} \qquad \varepsilon_\theta=-\frac{D}{r^2} \qquad \varepsilon_z=0 \qquad (2.9.32)$$

(i)　弾性領域における応力

フックの法則を用い（2.9.32）式より弾性領域内の偏差応力の主成分は次式のようになる。

$$s_r=2G\frac{D}{r^2} \qquad s_\theta=-2G\frac{D}{r^2} \qquad s_z=0 \qquad (2.9.33)$$

ここにG：地山材料のせん断弾性係数

平均垂直応力をsとすれば，弾性領域において各成分応力は；

$$\sigma_r=s+2G\frac{D}{r^2} \qquad \sigma_\theta=s-2G\frac{D}{r^2}$$

$$\sigma_z=s \qquad (2.9.34)$$

（2.9.34）式を釣合方程式（2.9.27）に代入すれば，Dはrに無関係であるから次式をうる。

$$\frac{\partial s}{\partial r}=0 \qquad (2.9.35)$$

すなわち弾性領域の平均垂直応力は r に無関係であることがわかる。この場合弾，塑性境界 $r=\rho$ において降伏条件を満さねばならぬ。降伏条件はMisesによれば，

$$J_2=\frac{1}{2}(S_r^2+S_\theta^2+S_Z^2)=S_r^2+S_rS_\theta+S_\theta^2=k^2$$

k =単純せん断の時の降伏限度　　　　(2.9.36)

で与えられる。また $r=\infty$ においては地山の応力は立坑の開さくによる影響をうけないと考えられるから，

$$\sigma_r=\sigma_\theta=q=-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma\cdot Z \qquad (2.9.37)$$

ν ；地山材料のポアッソン比

γ ；地山材料の単位体積重量

ととることができる。これらの境界条件からD（ρ）およびsを定めることができ，弾性領域にたいする解はつぎのようになる。

$$u=-\frac{k\rho^2}{2Gr}$$

$$\sigma_r=-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z+\frac{k\rho^2}{\gamma^2}, \quad \sigma_\theta=-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z-\frac{k\rho^2}{r^2}$$

(ii) 塑性領域における応力

この場合にもuはやはり（2.9.31）式の形をとり，弾，塑性境界における連続性を考慮すれば（2.9.38）の才1式は塑性領域においても有効である。また塑性領域の一点において偏差応力成分の間にはつぎのような関係が存在する。59)

$$s_r : s_\theta : s_Z = 1 : -1 : 0 \qquad (2.9.39)$$

（2.9.36）式および（2.9.39）式より塑性領域（$r\leqq\rho$）においてMises の降伏条件は s_r および s_θ の絶対値がkであることを示す。したがつて結局塑性領域における応力はつぎのようになる。

$$\sigma_r=s+k, \ \sigma_\theta=s-k, \quad \sigma_Z=s \qquad (2.9.40)$$

上式を釣合方程式に代入すれば $r\leqq\rho$ において，

$$\frac{\partial s}{\partial r}=-\frac{2R}{\gamma} \qquad (2.9.41)$$

これより次式が得られる。

$$S=-2k\log r+f(\rho) \qquad (2.9.42)$$

ここに$f(\rho)$はρのみの関数である。上式のsの値は弾塑性境界$r=\rho$において弾性領域におけるsの値と一致すべきであるから，

$$f(\rho)=2k\log\rho-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z$$

となり，塑性領域における応力は次式のようになる。

$$\sigma_r=k(1-2\log\frac{r}{\rho})-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z$$
$$\sigma_\theta=-k(1+2\log\frac{r}{\rho})-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z \qquad (2.9.43)$$

(iii) 弾，塑性境界および弾性限界の深さ

a) 素堀立坑

素堀りの立坑壁には外力が作用しないから$r=a$で$\sigma_r=0$である。したがつて（2.9.43）のオ1式よりつぎの関係式を得る。

$$k(1-2\log\frac{a}{\rho})-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z=0 \cdots\cdots (2.9.44)$$

すなわち（2.9.44）式を解くことにより弾塑性境界ρを求めうる。いま立坑周壁で降伏を起こすときの深さ，すなわち弾性限界深さは上式において$\rho=a$とおきつぎのようになる。

$$z_L=\frac{(1-\nu)}{\nu}\cdot\frac{k}{\gamma} \qquad (2.9.45)$$

また立坑のある深さにおける応力状態は，zのある値にたいして（2.9.44）式よりρを求め，その値を$a\leqq r\leqq\rho$（塑性領域）にたいしては（2.9.43）式に$r\geqq\rho$（弾性領域）にたいしては（2－9.38）式に用いることによつて得られる。

b) 覆工を有する立坑

この場合には（2－9.43）式のσ_rは$r=a$において零にならず，覆工による反力に等しくならねばならない。いま図－2.4.9に示すごとき覆工（$b\leqq r\leqq a$）中における応力状態を求めるため，問題の軸対称性を考慮してつぎのような応力関数を与える。

$$\phi=A\log r+Cr^2 \qquad (2.9.46)$$

しかるときは各成分応力は

$$\sigma_r=Ar^{-2}+2C\cdot\ \sigma_\theta=-Ar^{-2}+2C\quad \tau_{r\theta}=0 \qquad (2.9.47)$$

覆工と地山との境界においては半径方向応力は釣合うべきであるから，未定係数AおよびCはつぎの境界条件より決定される。

$r=b$において，$\sigma_r=0$，$\tau_{r\theta}=0$

$r=a$において，$\sigma_r=k(1-2\log\frac{a}{\rho})-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z$ （2.9.48）

$\tau_{r\theta}=0$

したがつて覆工中の応力成分は次式で与えられる。

$$\sigma_r=\frac{a^2}{a^2-b^2}\{k(1-2\log\frac{a}{\rho})-\frac{\nu}{1-\nu}rz\}(1-\frac{b^2}{r^2})\quad\cdot \qquad (2.9.4\,9)$$
$$\sigma_\theta=\frac{a^2}{a^2-b^2}\{k(1-2\log\frac{a}{\rho})-\frac{\nu}{1-\nu}rz\}(1+\frac{b^2}{r^2})$$

つぎに塑性領域での覆工との境界面における半径方向変位は(2.9.3 8)式よりつぎのようになる

$$u_a=-\frac{k\rho^2}{2Ga} \qquad (2.9.5\,0)$$

一方境界面における覆工の変位は(2.9.4 9)式を用いて次式のように求められる。

$$u_a'=\frac{1+\nu'}{E'}\cdot\frac{a_2}{a^2-b^2}\{k(1-2\log\frac{a}{\rho})-\frac{\nu}{1-\nu}\gamma z\}\{\frac{b^2}{a}+(1-2\nu')a\}\cdots\cdots\cdots(2.9.5\,1)$$

ここに E' :覆工の弾性係数

ν' :覆工のポアソン比

いま覆工と地山とはその境界面において半径方向に等しい変位をするものとすれば $u_a=u_a'$ であるから,(1.9.5 0)および(2.9.5 1)式よりつぎのように弾,塑性境界の半径 ρ にたいする関係式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&M\rho^2+\log\rho-F=0\\&\text{ここに}\\&M=\frac{a^2-b^2}{2a^2}\cdot\frac{1}{\{b^2+(1-2\nu')a^2\}}\cdot\frac{(1+\nu)E'}{(1+\nu')E}\\&F=\log a-\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2(1-\nu)}\frac{\gamma z}{k}\end{aligned}\right\}\qquad(2.9.5\,2)$$

上式より ρ が求まれば素掘立坑の場合と同様にして弾,塑性両領域における応力を計算することができる。

(2) Nadai の方法による解法

Nadai の行つた解法と同じ手順で伊藤は正8面体せん断応力と正8面体垂直応力とによる降伏条件式を用い,条件式中の地山材料によつて定まる常数を3軸圧縮試験の結果から得て解を求めている。ここにおいては前に述べたごとく von *Mises* の降伏条件より出発して,Nadai または伊藤と同様の手法によつて解法を進めた。

(1)においては弾塑性両領域において地山材料が非圧縮性であると仮定し,さらに平面ヒズミの状態を考えたため,地山中の鉛直応力は降伏条件式には考慮されなかつた。それでいま同一水平面内の弾塑性両領域において一定の鉛直圧力が作用しているものと考え,3主応力による降伏条件より弾塑性応力状態を求める。

(i) 弾性領域内の応力

弾性領域における応力は2の場合と同様厚肉円管にたいする式を用いて,つぎのように与えられ

る。

$$\sigma_r=\alpha\cdot r^{-2}+q,\quad \sigma_\theta=\alpha\cdot\gamma^{-2}+q;\quad \sigma_z=p=-\gamma z \qquad (2.9.5\,3)$$

ここに，$q=\dfrac{\nu}{1-\nu}p$，　α：常数

（2.9.5 3）式中のαは立坑周辺の地山がすべて弾性状態にあるならば，立坑壁の状態によつて定まる。すなわち素堀立坑にたいしては，

$$\alpha=-a^2q \qquad (2.9.5\,4)$$

であり，覆工を有する立坑では才2章で求めたと同様につぎのように与えられる。

$$\alpha=-Ka^2q$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} K&=\frac{D-2(1-\nu)(1-\beta^2)E_o}{D}\\ D&=\frac{1+\nu'}{1+\nu}(1-2\nu'+\beta^2)+(1-\beta^2)E_o\\ \beta&=b/a,\qquad E_o=E'/E \end{aligned}\right\} \qquad (2.9.5\,4')$$

この場合地山中の最大応力は立坑周壁$\gamma=a$において生じそれぞれつぎのようになる。

素堀：$\sigma_r=o$，　$\sigma_\theta=2q$，　$\sigma_z=p$　　　　(2.9.5 5)

巻立：$\sigma_r=(1-K)q$，　$\sigma_\theta=(1+K)q$，　$\sigma_z=p$　　　　(2.9.5 5′)

なお（2.9.5 3）式は地山が弾，塑性状態になつた場合にもその弾性領域で成立つが，その場合常数αは地山の状態，すなわち塑性領域の範囲の大きさなどによつて変化することは明らかである。

(ii)　降伏条件式および弾性限界深さ

降伏条件は(i) の場合と同様にvon.Mises の降伏条件式で与えられる。偏差応力は，$s_r=\sigma_r-s$，$s_\theta=\sigma_\theta-s$，$s_z=\sigma_z-s$，$s=(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z)/3$ で与えられるから，成分応力による条件式

$$(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_r)^2=6k^2 \qquad (2.9.5\,6)$$

をうる。

つぎに立坑周壁が降伏をおこして塑性状態に入る深さ，すなわち弾性限界深さはつぎのようにして求められる。

一般に立坑周壁が覆工による反力をうけている場合を考えると，降伏条件式（2.9.5 6）に弾性状態における周壁の応力成分σ_{ra}，$\sigma_{\theta a}$ および$\sigma_z=p_1$ を代入し，それをp_1 について解けば弾性限界深さz_1 は

$$z_1=\frac{-p_1}{n\gamma}=\frac{\sqrt{3}\,(1-\nu)}{\sqrt{3\nu^2K^2+(1-2\nu)^2}}\cdot\frac{k}{\gamma} \qquad (2.9.5\,7)$$

なお素掘りの場合にはK＝1とおけばよい。

(iii) 塑性領域内の応力

塑性領域内においてもσ_z がp＝−γzに等しくrに無関係と考えているから，この領域ではつぎの関係式が成立たねばならない。

$$(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-p)^2+(p-\sigma_r)^2=6k^2 \qquad (2.9.58)$$

したがつて立坑周壁r＝aにおける応力は，素堀立坑にたいして，$(\sigma_r)_{r=a}=0$ 巻立立坑にたいして$(\sigma_r)_{r=a}=\sigma_{ra}$なることよりつぎのごとく得られる。

素堀：$\sigma_\theta^2-p\sigma_\theta+p^2-3k^2=0 \qquad (2.9.59)$

巻立：$\sigma_\theta^2-(\sigma_{ra}+p)\sigma_\theta\sigma_{ra}^2-p\sigma_{ra}+p^2-3k^2=0 \qquad (2.9.59')$

（2.9.5 9）式または（2.9.5 9）式はいづれも実根を有すべきであつて，つぎの条件式を満足すべきである。

$$p^2-4k^2 \leqq 0 \qquad (2.9.60)$$

または

$$(\sigma_{ra}+p)^2-4(\sigma_{ra}^2-p\sigma_{ra}+p^2-3k^2) \geqq 0 \qquad (2.9.60')$$

(2.9.6 0) 式または（2−9.6 0′）式において等号をとれば立坑周辺の塑性領域が安定を保ちうる最大の深さ，すなわち塑性限界深さz_2をうる。素堀にたいしては，

$$z_2=\frac{p^2}{r}=2\frac{k}{r} \qquad (2.9.61)$$

巻立立坑にたいしては

$$z_2=\frac{p_2}{r}=\frac{\sigma_{ra}+2k}{r}$$

上式で覆工の反力σ_{ra}は覆工の構造的強度によつて限定されることは明らかである。

（2.9.5 8）式において

$$\sigma_r=p+(\sigma-\sigma')\sqrt{2},\quad \sigma_\theta=p+(\sigma+\sigma')/\sqrt{2} \qquad (2.9.62)$$

とおいて応力成分をσ,σ'に変換すると，

（2.9.5 8）式はつぎのようになる。

$$\sigma^2+3\sigma'^2=6k^2 \qquad (2-9.63)$$

（2.9.6 3）式はσ, σ'を座標軸とする楕円を表わすから，θなるパラメーターを用いてσ, σ'を表わせば

$$\sigma=-\sqrt{6}k\ \sin\theta \qquad \sigma'=-\sqrt{2}k\ \cos\theta \qquad (2.9.64)$$

ここにおいてθの値は0〜−π／2の範囲内にある。この場合応力の釣合方程式は（2.9.2 7）式

と同様に与えられるから，これと（2.9.6 2）式よりつぎの関係式をうる。

$$r\frac{d\sigma}{dr}=r\frac{d\sigma'}{dr}+2\sigma' \qquad (2.9.6\,5)$$

上式に（2.9.6 4）式を代入してrとθとの関係を求めると，

$$\frac{d^2}{r^2}=e^{-\sqrt{3}\theta}\cos\theta,\quad d：積分常数 \qquad (2.9.6\,6)$$

積分常数dはr＝aで$\sigma_r=0$または$\sigma_r=\sigma_{ra}$なる境界条件から得られるところのつぎの関係式から求められる。

$$p-k\,(\sqrt{3}\sin\theta_a-\cos\theta_a)=0$$

または

$$p-\sigma_{ra}-k\,(\sqrt{3}\sin\theta_a-\cos\theta_a)=0 \qquad (2.9.6\,7)$$

このようにして（2.9.6 7）式または（2－9.6 7$'$）式よりθ_aを求め，その値を（2.9.6 6）式に代入すれば常数dが決定されるから，（2－9.6 6）式によつてrとθとの関係が得られる。したがつてそのθの値から（2－9.6 4）式によりσ, σ'をさらに（2－9.6 2）式を用いて塑性領域における応力成分σ_r, σ_θを得ることができる。

(iv) 弾，塑性境界および弾性領域における常数αの決定

この場合塑性領域では，はじめに弾性範囲以上のヒズミを受けたことのない完全塑性材料におこる塑性変形のはじめの状態を考えて降伏条件を与えているから，弾塑性境界$r=\rho$では塑性領域のσ_rおよびσ_θが弾性領域のそれらと等しくなるべきことよりつぎのような条件式をうる。

$$p-k\,(\sqrt{3}\sin\theta\rho\mp\cos\theta\rho)=\pm\alpha\rho^{-2}+q \qquad (2.9.6\,8)$$

上の2式を連立的に解くことにより

$$\sin\theta\rho=\frac{1}{\sqrt{3}R}\cdot\frac{1-2\nu}{1-\nu}p \qquad (2.9.6\,9)$$

これより$\theta\rho$を得，したがつて（2.9.6 6）によりαを求めることができる。また

$$\alpha=k\rho^2\cos\theta \qquad (2.9.7\,0)$$

上式よりαが求まれば（2.9.5 3）式によつて弾性領域内の応力分布を計算することができる。

(3) 数値計算およびその考察

まず(1)の近似解法を用いて数値計算結果を示すとつぎのようである。いま立坑壁の半径a＝2.9mとし，地山材料として$E=15\times10^5$ Kg/cm²，$\nu=0.3$，$k=25$ Kg/cm²，$\gamma=2.4$ t/m³ の岩盤を考える。

さらに覆工を施した場合にはその内壁の半径b＝2.5mとし，覆工にたいしては$E'=2.0\times10$

^{5}Kg/cm²、ν' =0.15をとるものとして，いまz＝５００mの水平面における応力分布を求める。しかるときは弾．塑性境界半径ρは素堀立坑にたいしてρ＝4.９１m，巻立立坑にたいしてρ＝3.９１mをうる。したがつて図－2.9.5のごとき弾，塑性応力分布をうる。
図－2.9.5より判るように弾塑性応力分布は塑性領域でσ_r,σ_θ ともかなり応力を減少しており，最大圧縮応力の生ずる位置が弾性地山の場合の坑壁よりある距離だけ地山内に入つた弾，塑性境界にまで移動している。この場合巻立立坑は素堀立坑より全般にσ_r を増加し，σ_θ を弾性領域では減少，塑性領域では増加させる傾向を示している。上述のように最大圧縮応力が塑性領域の生成によつて地山内に移動させられることは軟弱地盤におけるかなり深い立坑でも長期間安定を保ちうることを説明している。地山を弾性的あるいは弾塑性的に考えた場合の応力分布の相異についても図から明らかである。この場合の計算例では同一水平面の弾性領域においてσ_r は前者の方が，σ_θ は後者の方が大きいが，r＝１５m位になるとσ_r,σ_θ ともほとんど同じ程度の値をうるようになる。
一般に弾性変形の場合には覆工を施すことによつてσ_r は増加し，θ_θ は減少するが，弾．塑性変形の場合には覆工の存在により弾性領域のσ_θ を除いたほかはすべての応力は増加される。

つぎに(2) の解法による結果と(1)の解法によるものとを比較するため素堀立坑にたいしてつぎのような条件で計算を行つた。$a=3{,}0\ m$、$k=10$Kg/cm²、$\nu=0{,}4$および0,5，$\gamma=2{,}4\ t/m^3$、$z=80\ m$
$\nu=0{,}4$のとき(1)の解法では$z_1=62{,}5\ m$　$p=3{,}45\ m$、(2)の解法では$z_1=60{,}0\ m$、$z_2=83{,}3\ m$、$p=3{,}67\ m$となる。また$\nu=0{,}5$のとき(1)の解法では$z_1=41{,}65\ m$、$p=4{,}68\ m$(2)の解法では$z_1=41{,}65\ m$、$z_2=83{,}3\ m$、$p=4{,}94\ m$となる。　これらの値よりそれぞれ応力分布を求め図示すると図－2.9.6のごとくなる。いずれの解法においても立坑壁のごとく近傍においてはσ_r, σ_θ とも地山材料のポアツソン比に影響されないようであるが，弾塑性境界半径はかなり影響をうける。(1)の結果と(2)の結果とを比較すると，一般に後者において弾塑性境界半径が大きく，塑性領域におけるσ_θ をかなり減少しているが，弾性領域においてはσ_r,σ_θ とも両者の結果にあまり差異をみない。この塑性領域におけるσ_θ の減少は前者が平面ヒズミの状態を考えているのに対して，後者では鉛直応力$\sigma_z=\gamma z$ を降伏条件式に考慮しているためである。またν＝0.5の場合には弾塑性境界において生ずる最大応力は両者で等しくなるが，νが小さくなるほど前者が後者より大きくなることが判る。

以上で円形立坑の周辺地山の弾，塑性応力状態をまず地山材料の非圧縮性を仮定して，平面ヒズミの問題として近似解を得，さらに同一深さにおいて一様に分布する鉛直圧力を考慮することによつて，Nadai または伊藤と同様の手法で解を求めた。いづれの解においても素堀の場合と覆工を有する場合にたいして，弾，塑性境界半径と地山内の応力分布を求め，さらに弾性地山にたいする応力分布と比較した。これらより弾性状態にたいする弾．塑性状態の応力分布がいちじるしく変化すること，覆工を施すことによつて応力状態が変ること，さらに(1)の近似解による結果では(2)の解によるものよりも塑性領域が狭くなり，σ_θ は塑性領域では大きく弾性領域で小さくなり，σ_r は弾塑性両領域において大きくなること，しかし塑性領域のσ_r 弾．塑性領域のσ_r,σ_θには大差がない

ことなどが明らかになつた。

これらの結果からも判るように，弾塑性応力状態の場合には立坑周囲の塑性領域で弾性状態のときよりも応力を減じ，したがつて最大応力の生ずる位置が坑壁より地山内部に移動し，素堀の立坑がかなり深い位置においても長期間安定を保ちうることを説明することができる。

9．3　塑性地山における立坑周辺応力状態

(i)　塑性変形領域における応力式

地山を塑性体とみなして，それが静水圧的な初期応力状態にある場合に，開削された水平坑道の周辺応力に対する *R*．Fenner の式は才７章で述べたとおりであるが，この応力式は塑性地山における円形立坑に対してもそのまま用いられるだろう。つぎに著者は弾性地山における立坑周辺応力式を用いて，地山の塑性変形領域における応力状態に対する近似解を求めよう。

一般に能動変形の際は物体の塑性状態を示す方程式（すなわち応力，ヒズミ，変位およびそれらの間の関係）は同一の応力－ヒズミダイヤグラムをもつ非線型弾性体を表示する方程式となんら異なるところがないことが明らかにされている。このような考えから塑性・変形領域内においては，弾性領域内の弾性係数Eの代りに応力－ヒズミダイヤグラムの各点ごとに（すなわち物体の塑性変形の瞬間ごとに）固有な意義をもつE_pと置くことによつて，弾性変形の場合と同様な関係式が成立する。したがつて地山が弾性限界を超えたときの変形状態に対して，偏差応力が偏差ヒズミに比例するごとき次の方程式を提案することができる。[60]

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r-\sigma_m&=2G_p(\varepsilon_r-\varepsilon_m)\\ \sigma_\theta-\sigma_m&=2G_p(\varepsilon_\theta-\varepsilon_m)\\ \sigma_z-\sigma_m&=2G_p(\varepsilon_z-\varepsilon_m)\end{aligned}\right\}\quad(2.9.71)$$

ただし　$G_p={}^{E}p/2(1+\nu_p)$

上式において添字のpは塑性変形領域内での地山の性質を示すものに対して用いられている。しかるるにこの領域内では地山の容積が変らないものと考えれば，$\nu_p=0.5$ととることができるから，$G_p=1/3E_p$であり，（2.9.71）はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r-\sigma_m&=2/3E_p(\varepsilon_r-\varepsilon_m)\\ \sigma_\theta-\sigma_m&={}^2/3E_p(\varepsilon_\theta-\varepsilon_m)\\ \sigma_z-\sigma_m&={}^2/3E_p(\varepsilon_z-\varepsilon_m)\end{aligned}\right\}\quad(2.9.72)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}\sigma_m&={}^1/3(\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z)\\ \varepsilon_m&={}^1/3(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)\end{aligned}\right\}\quad(2.9.72)$$

$$E_p=\sigma_i/\epsilon_i$$

σ_i, ϵ_iは地山に対する応力ーヒズミ曲線の塑性変形領域の一点に対応し，従つてE_pは他の方法で求められた当該地山に対する応力ーヒズミ曲線より定められる。

さて（2.9.72）より塑性変形領域における地山内の応力成分およびヒズミ成分の相互関係が判るわけであるが，これらからのみではその個々の応力成分を算出し得ない。そこでここにおいて平均垂直応力σ_mおよび偏差ヒズミに対して先に求めた弾性変形での値を用いれば，容易に近似的な解が求められるだろう。

素堀立坑に対しては（2.9.9）および（2.9.22）を（2.9.72）に代入すれば

$$\sigma_r=-\frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)}\gamma H\{1+2\nu(1-m-R^2)\,{}^{E_p}/_{E}$$

$$\sigma_\theta=-\frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)}\gamma H\{1+2\nu(1-m+R^2)\,{}^{E_p}/_{E}\}$$

$$\sigma_z=-\frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)}\gamma H\{1-4\nu(1-m)\,{}^{E_p}/_{E}\}$$

$$\text{ただし}\quad m=\frac{1+\nu}{3\nu} \qquad (2.9.73)$$

また覆工を有する立坑に対しては（2.9.18），（2.9.26）および（2.9.72）より塑性変形における地山内の応力状態は次式によつて与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\gamma H\{1+2\nu(1-m-K_2R^2)\,{}^{E_p}/_{E}\}\\ \sigma_\theta&=-\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\gamma H\{1+2\nu(1-m+K_2R^2)\,{}^{E_p}/_{E}\}\\ \sigma_z&=-\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\gamma H\{1-4\nu(1-m)\,{}^{E_p}/_{E}\}\end{aligned}\right\} \qquad (12.9.74)$$

(ii) 数値計算例およびその考察

上において求めた解に対してつぎのような例につき計算を行つた。立坑の素堀面の半径a＝2.9 m，覆工の内半径b＝2.5 m，岩盤の弾性係数E＝1.5×10^5 Kg/cm²，ポアソン比$\nu=0.2$，覆工のコンクリートに対して$E'=2.0\times10^5$ Kg/cm²，$\nu'=0.15$，岩盤の単位体積重量2.4 t/m³とする。しかるときは計算式内の各定数はつぎのような値をとる。

$W=600$ Kg/m²，　$E_0={}^{E'}/_{E}=1.333$　　$k={}^{b}/_{a}=0.862$

$D=1.563$　　　$K_1=1.365$　　　$K_2=0.649$

これらの定数を用い，いまH＝300 mの水平面における応力分布を計算すれば，それぞれつぎのような図を得る。地山の塑性変形領域における覆工を有する立坑周辺の応力分布を図示すれば，図ー2.9.7のようである。この場合，塑性変形の程度を種々変化させ，すなわち${}^{E_p}/_{E}$を0.6～1.0に変化させた場合につき応力分布を求めた図ー（2.9.7）より明らかなように地山が弾性限度

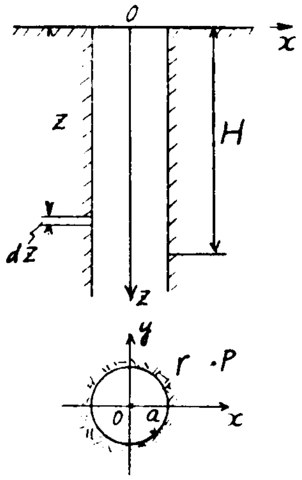


図-2·9·1

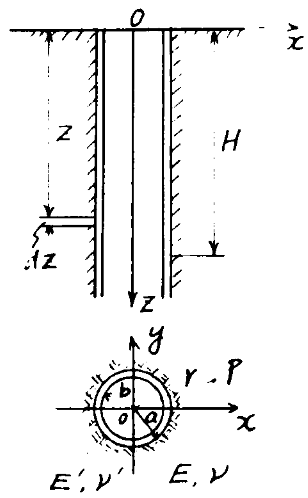


図-2·9·2

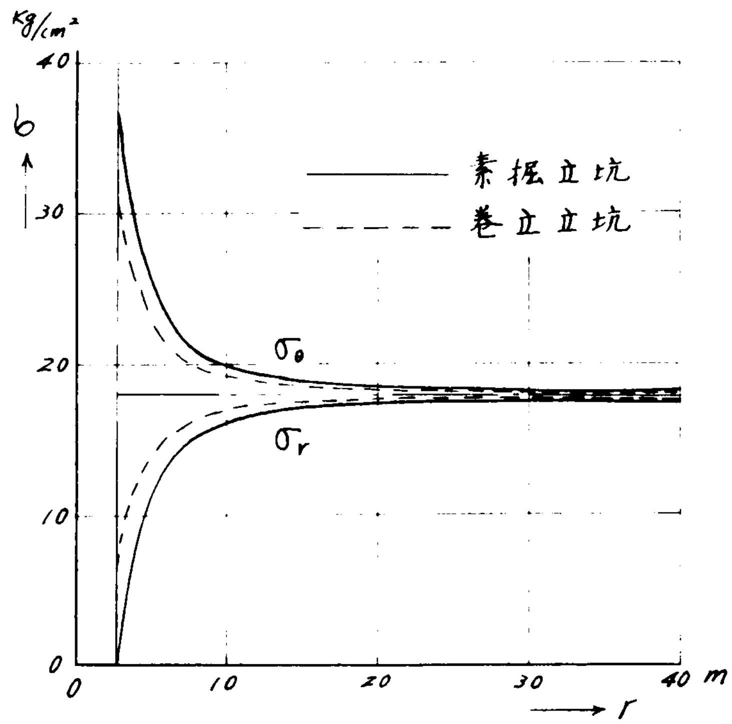


図-2·9·3

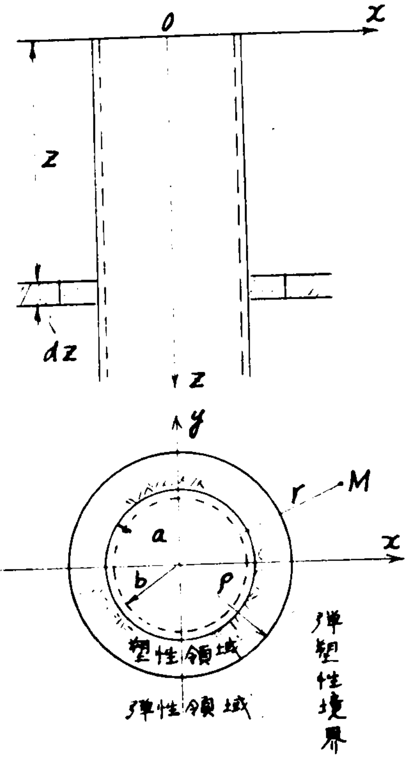


図-2・9・4

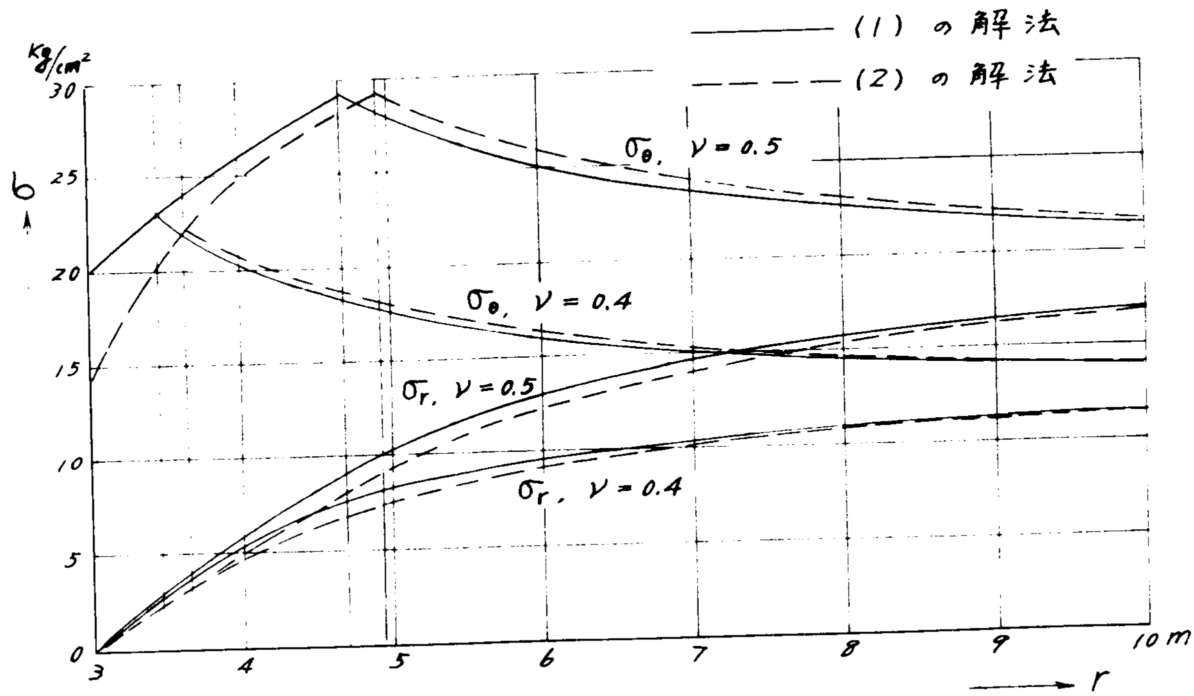


図-2・9・6 (1)および(2)の解法による弾塑性応力分布の比較
($z = 80^m$, $k = 10\ ^{kg}/_{cm^2}$)

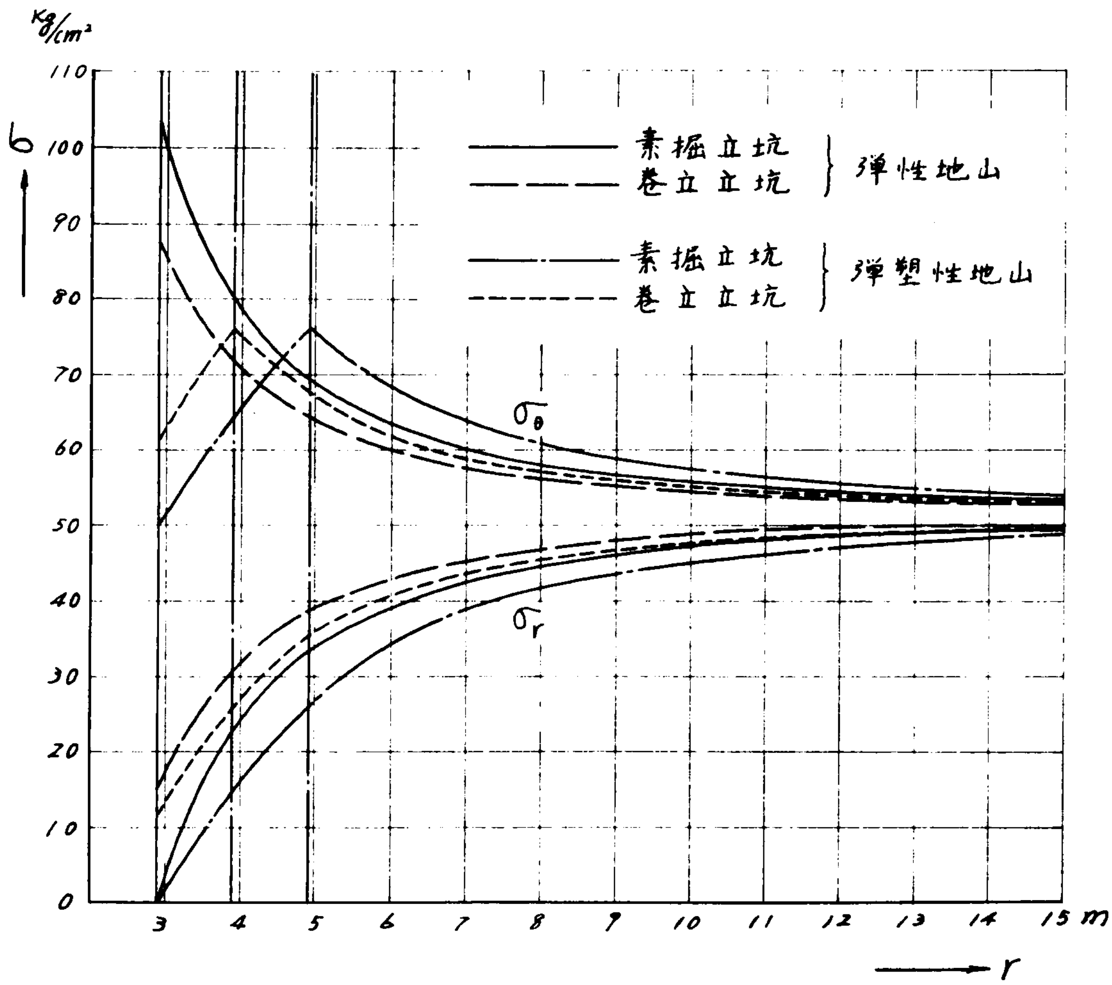


図-2・9・5　(1)の解法による弾塑性応力分布と弾性応力分布
($Z = 500m$, $k = 25$ Kg/cm²)

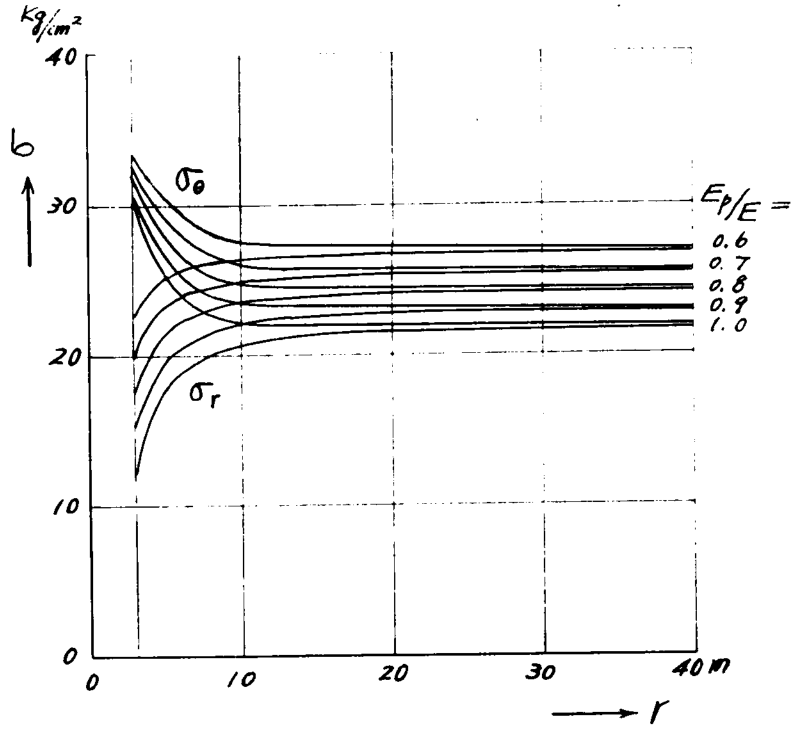


図-2·9·7

を超えて塑性変形状態になつた場合，E_p の減少にしたがつて，すなわち塑性流動が進むにしたががつて地山内の応力分布は全般にわたつて増加し，とくに立坑覆工壁の半径方向応力 σ_r の増加率は大であり，覆工壁は地山の塑性流動につれて強い力を受けることになる。したがつて覆工内部の応力もそれに従い増大することになる。図－2.9.7において $E_p/E = 1.0$ なる場合は地山が弾性変形領域にある場合を意味するものであり，さきに計算した弾性地山に対する応力分布と異つているが，これは弾性岩盤に対し，$\nu = 0.2$ ととつているのに対して（2.9.73）および（2.9.74）式を算出するにあたつて（2.9.71）において塑性変形領域内での地山のポアソン比を $\nu_p = 0.5$ ととつていることに原因している。

以上において素堀立坑および巻立立坑に対してその周辺地山が塑性岩盤である場合の応力状態について計算を行い，その応力分布を明かにした。地山が弾性限界を超えて，塑性変形領域に入つた状態における応力－ヒズミ関係を非線型弾性体に対するものと同様に考えることにより，偏差応力が偏差ヒズミに比例するような方程式から出発している。したがつてその比例定数となる弾性領域内の弾性係数に代るものとして，当該岩盤の応力－ヒズミダイヤグラムを用いて求めねばならず実際問題として現場地山の塑性状態の程度，すなわち現場岩盤が応力－ヒズミ曲線のどの点にあるかを知ることは困難であり，この点についてさらに研究しなければならないと思われる。しかし本計算のように弾性領域内での坑道の応力式を用いることにより，近似的に塑性変形領域での応力状態を容易に算出することが出来る。

才10章 結 語

以上において第1篇で示した種々の状態の地山における素掘抗道、巻立抗道および立坑等の周辺応力を理論的に求め、抗道応力状態およびそれに及ぼす地山状態の影響についてつぎのごとく種々の考察を行つた。

第2章では完全弾性地山中の水平抗道の周辺応力に対する種々の解法を示し、数値計算を行つて応力状態について考察を行つた。すなわちまず地表面の影響を考察した場合の円形および楕円形の抗道に対する解法を示した。一般抗道がかなり深いときでも山腹を通過したり、抗道の入口等では地形の影響を考慮した3次元的な取扱いが必要であるが、*H.Schmid* が示したようなある係数を導入することによつて平面問題として取扱いうることを述べた。その後双極座標を用いた *Mindlin* および安蔵の解を示し、重力場での平面ヒズミ状態の問題として *Airy* の応力関数を用い、地表面および抗道周辺における境界条件を満足するためにいくつかの補助関数を導入して問題を解く方法について説明した。さらに両者の数値計算結果の考察を行い、とくに安蔵の結果を、地表面の条件を無視したいわゆる有孔無限板に対する近似解を用いてえた応力値と比較して、抗道の深さが抗道半径の10倍以上になれば、近似解法で実用上充分な結果がえられることを明らかにした。つぎに楕円形抗道に対する石田の解法について述べ、楕円形の形状と周辺応力との関係について説明した。

つぎに地表面の影響を無視した近似計算法として、(i)地山の初期応力状態に対する応力関数、抗道開削によつて除かれた土塊の力に対する応力関数および抗道周辺において垂直応力、せん断応力を打消し、かつ無限遠において応力を与えない応力関数等を求めて加え合せ、完全な応力関数をうる方法、(ii)抗道の開削位置における地山の初期応力が、抗道を有する無限地山の無限遠に作用するものとして、いわゆる有孔無限板の理論を適用する方法の2つの方法について説明し、それぞれの方法の例として前者に対しては山口の解法を、後者に対しては *Schmid* の導入した係数を含むところの地形を考えた一般的な初期応力状態に対する解を示した。なお後者に対する数値計算の結果抗道の入口(坑門)とそれからかなり地山の奥に入つた位置との間における周辺応力状態の変化する様子について考察を行つたが、その変化は地山のポアッソン比によつてかなり影響されることが明らかにされた。さらに素掘の楕円形抗道が任意方向より初期荷重をうける場合の応力式を *Muschelishvili* の複素変数の方法によつて求め、初期荷重の方向および楕円形の半径比と周辺応力との関係を示した。

つぎに巻立円形抗道に対して、地山と覆工との接触面における状態より2つの条件の場合の近似解を求め、地山の弾性係数比および覆工厚の抗道周辺応力(地山と覆工との接触面における応力)に及ぼす影響について考察し、つぎのようなことが明らかになつた。

(1)条件(I)(地山と覆工との附着が完全)の場合には、覆工外壁に作用する地圧に相当するところの σ_r は、覆工厚の大きいほど全周にわたつて等分布化してくるが、一般には初期荷重の方向にお

けるよりも垂直方向の位置において大きい。なお覆工厚が小さくなると荷重方向の位置で引張応力を生じる。

(2) σ_θ は坑道頂部で引張応力となり、覆工厚が小さいほどその値は大きく、また地山と覆工との弾性係数比 E/E が大きいほど引張応力を生じる範囲を増大する。側壁部では圧縮応力となり、覆工厚が小さいほど、また E/E が大きいほど応力は増大する。

(3) $\tau_{r\theta}$ はいづれの場合も $\theta=45°$ の位置で最大値をとり、覆工厚が小さいほど、また E/E が小さいほど大きくなる。

(4)全体的にみて地山の弾性係数が小さい場合ほど覆工外壁に作用する地圧とせん断応力を増大する。

(5)条件(ii)(地山と覆工との間に摩擦が働かない)の場合には、σ_θ は荷重方向でいくぶん大きいが、$E/E>0,5$ になると覆工外壁全体にわたつてほゞ一様になり、その値もかなり小さくなる。

(6) σ_θ の分布は地山の弾性係数が覆工のそれに比べて大きい場合には、その変化にほとんど影響されないが、E/E が小さくなると頂部で引張応力を増大し、側壁部の圧縮応力を減少する。このことは条件(i)の場合と異なるところで、覆工が地山に充分に附着していない場合には頂部の引張応力がかなり大きくなつて危険である。

つぎに楕円形の巻立坑道に対して、その覆工が固定環、弾性環と考えられる場合の *Sawin* の示した応力状態について述べ、それらの応力分布を無巻立の場合とともに比較考察した。最後に多角形断面および一般的な馬蹄形断面の坑道に対する近似計算として *Muschelichvili* の複素変数による弾性式を適用した2,3の研究について述べ、正方形断面および馬蹄形断面の場合の周辺応力状態について考察した。

第3章においては *G.N.Sawin* の示している直交異方性弾性体に対する2次元弾性基礎方程式をを用いて、地山の弾性主軸と任意の傾きをなす方向から一軸的な初期荷重が作用するような一般的な場合に対して、円形水平坑道の周辺応力式および変位式を算出し、種々の地山の主弾性係数比および初期荷重の方向に対して数値計算を行つて、坑道の周辺応力分布および変位の状態に及ぼす地山の異方特性や初期応力状態の影響について考察した。また特別な場合として地山の初期荷重が主弾性係数の方向に2軸的に作用する場合の坑道の変形量を算出する式を求めた。それらの結果つぎのようなことが明らかになつた。いま初期荷重の方向(鉛直方向とする)が小さい方の主弾性係数の方向となす角を δ とすると、

(1)地山の弾性性質の異方性(したがつて主弾性係数比)が大きいほど、弾性係数の小さい方向における周辺応力の集中度が高くなり、この部分が危険な状態になると考えられる。

(2) $\delta=0°$ のときには上下盤の引張応力、$\delta=45°$ のときには上下盤と側壁との中間部分の応力、$\delta=90°$ のときには側壁部の圧縮応力がいちぢるしく大きくなるから、注意しなければならない。

(3)最大応力の生ずる位置は δ および主弾性係数比 E_1/E_2 によつて変化するが、大体 δ が $30°\sim45°$ の場合には最大圧縮応力の位置が、また δ が $45°\sim60°$ の場合には最大引張応力の位置が荷重方向からもつとも大きく偏移する。

(4)偏移する角度は、主弾性係数比E_1/E_2が大きいほど大きく、また$\delta=45°$のときには最大圧縮および引張を生ずる位置はともに同じだけ偏移し、それらはかなり接近した位置に生じて、応力分布としては複雑な危険な状態を呈するようになる。

坑道周辺における変位状態に対しては、

(5)一軸的な初期荷重の作用のもとでは、荷重の方向と垂直な位置における周辺の半径方向変位u_rはδに無関係に一定であり、たゞE_1/E_2によつてのみ変化する。

(6)上下盤における坑道空間への変位(u_r)は、δが大きいほど、またE_1/E_2が大きいほど急激に大きくなる。

(7)坑道周辺の切線方向変位u_θは$\theta=45°$、$135°$(θは水平方向を$0°$として測られる)付近でもつとも大きく、それらの値はE_1/E_2およびδの増加によつてかなり増大する。また側壁のu_θはδのどの値においても上下盤におけるu_θと同じ大きさ(反対符号)の値を示す。さらにその値は$\delta=45°$の場合に最大となる。

(8)弾性主軸が鉛直、水平方向にあり、両方向に地山荷重が作用するとき、鉛直方向主弾性係数が水平方向のそれよりも大きいほど、上下盤の変形量に対して側壁の変形量は大きく、この状態でとくに水平荷重が増大すれば側壁の坑道空間への移動は極度に大きくなる。

つぎに異方性地山中の楕円巻立坑道に対して、地山と覆工とは完全に附着し、かつ覆工を固定環と仮定して周辺応力を求める式を導き、特別な場合として円形坑道に対して地山の異方性および荷重方向の種々の条件のもとで数値計算を行つて、地山と覆工との接触面における応力分布状態に及ぼす地山の異方性の影響を明らかにした。すなわち

(1)覆工外壁に垂直に作用するσ_θは初期荷重の方向にかゝわらずその方向において最大となり、その方向と垂直の位置で最小となる。

(2)荷重が地山の弾性係数の大きい方向から作用する場合には、σ_θはE_1/E_2が大きくなるほど一様に減少するが、逆に小さい方向から作用するときにはE_1/E_2の増大にしたがつてσ_θは増加する。

(3)σ_θはいかなる荷重状態の場合も弾性主軸が円孔と交わる位置において零となる。

(4)荷重が大きい主弾性係数の方向から作用する場合にはσ_θは周辺全体にわたつて圧縮応力となり、荷重が小さい主弾性係数の方向に作用する場合にはσ_θは引張応力となる。

(5)$\tau_{r\theta}$はつねに荷重方向とそれに垂直な方向に対して対称的に分布し、δおよびE_1 E_2の値に対してほとんど影響されない。

最後に円形巻立坑道に対して、覆工が弾性的に変形する場合の解法を示した。

第4章では地山が層状の弾性体とみなされる場合を考え、同種あるいは異種の層の場合に対して、層間に摩擦の作用しない場合と完全に附着している場合の極端な2つの場合を仮定し、そのような状態の地山中に開きくされた水平坑道の周辺応力状態について理論的考察を行つた。そして2種の互層よりなる地山において、各層の高さおよび弾性係数の差異が坑道応力状態にいかなる影響を及ぼすかを明らかにするために種々の条件のもとで、上下盤および側壁における応力を計算して、つぎのような結果をえた。いま硬い層をⅠ、その中間にはさまれた軟かい層をⅡとし、両者の弾性係

数比を$\beta=E_{\rm II}/E_{\rm I}$、層高比を$\alpha=h_{\rm II}/h_{\rm I}$とすれば、まず各層間の附着が完全な場合には（図－2－4－7参照）、

(1)側壁に生ずる圧縮応力はβの値に対して大きくは影響されず、ほゞ2,6 p～3,0 pである。なお$\beta>0,5$になるとαの値のいかんにかかわらずほとんど等方等質の弾性地山の場合の値3,0 pに近い値をとる。

(2)上下盤における引張応力は、坑道に接する層の種類によつて異なり、層Ⅰの場合はβの減少に伴つて引張応力はかなり増大し、その傾向はαが大きいほど大である。層Ⅱの場合はβの増加に伴つて引張応力はほゞ一様に増加するが、βが小さいときには引張応力はきわめて小さく、地圧はほとんど硬い方の層でうけもたれる。

(3)一般的に言つて硬い層を構成する岩石とその間にはさまれる軟弱層の岩石との弾性係数の差異が大きく、しかも軟弱層の高さが大きい状態では、上下盤にきわめて大きい引張応力を生じて危険である。

つぎに各層間に摩擦が働かない場合には（図－2－4－8参照）、

(4)層間の附着が完全な場合よりも全体に周辺応力が増加する。

(5)上下盤に生ずる引張応力がβおよびαによつて変化する傾向は、層Ⅰではさきの場合と同様であるが、層Ⅱではその趣きを異にする。いずれもこの場合は層間が完全に附着している場合よりもさらに危険な状態を呈し易い。

第5章では点等方性地山中の坑道の周辺応力状態を明らかにするため、地表面よりかなり離れた位置における坑道と、等分布荷重をうける地表面下の坑道に対する近似的な解法を示した。前者に対しては第1編で示した弾性基礎方程式を階差法の適用のもとで解くことについて述べたが、有孔板に4次の偏微分方程式を適用するときには *sguare net* の大きさを円孔半径に対してかなり小さくとらねばならず、そのため方程式数が非常に多くなつて実際問題として解くことは電子計算器を用いなくては困難であることが判つた。後者に対してはある関係のもとで*Fröhlich*の式が適合条件式および境界条件を満足することから、この式を等分布荷重の場合に適用して坑道周辺応力に対する近似解を求め、数値計算を行つて等分等質の地山の場合と比較考察した。その結果点等方性地山中の坑道では側壁部および底部で応力が大きくなる傾向を有することが判つた。

第6章では初期応力状態として鉛直および水平方向に2軸的に荷重が作用する場合における水平円形坑道周辺の弾塑性応力式を導いた。すなわち弾塑性境界を楕円形と仮定して、その境界上で弾性領域および塑性領域での各成分応力が等しいという関係を満足するような条件のもとで、坑道をとりまいている未知の弾塑性境界の外部で適合条件式の解を求め、その後塑性領域における応力式や弾塑性境界を示す楕円の半径等を求めた。この場合塑性領域における降伏条件としては*Mises*の条件式を用い、その解として*Gal in* が最初に与えたものを用いた。さらに塑性領域が坑道周辺に生ずるための条件を示した。つぎに地山材料のせん断破壊限度を種々の値にとり、ポアツソン比が$\nu=0$～0,5の場合に対して、弾塑性境界の形を求め、またせん断破壊限度として2つの値（$k=-10\,{\rm Kg/cm^2}$、$k=-7{,}5\,{\rm Kg/cm^2}$）をとつて、地表面から$h=125\,{\rm m}$の位置における坑道の周辺の弾塑

性応力分布を求めた。その結果を坑道周辺が弾性状態である場合の応力分布と比較して、塑性領域における応力緩和の傾向や、地山材料のせん断破壊強度の大小による塑性領域の範囲あるいは最大応力の生ずる位置および応力の攪乱される範囲とその減少状態等について考察した。

第7章では塑性地山中の水平坑道の周辺応力状態に対する解として*Fenner*の導いた式およびそれより計算された応力分布について示し、その状態について考察した。しかしこの解は地山の初期応力状態がいわゆる静水圧的に作用する場合の解であつて、地山の内部摩擦角が非常に小さいときあるいは開坑以前の地山が弾性体とみなされ、そのポアッソン比が0,5に近い値をとるときには近似的に用いられるし、また立坑に対しては降伏条件において坑軸方向(鉛直方向)の応力を無視した場合に近似的に用いられるだろう。

第8章では粘弾性地山中の坑道の変形挙動に対する理論的な取扱いについて説明した。結局この場合の変形挙動を考える場合には、地山材料の特性にもつとも適した力学的模型を仮定し、それらの各要素の定数を実験的に求めることによつてヒズミ一時間関係がえられるから、その後は弾性体に対する解を求めて、それに時間に関する*operation*を施せば変形一時間関係式がえられる。

第9章では地山が弾性、弾塑性および塑性状態にある場合の円形立坑の周辺応力に対する近似解を求め、立坑周囲の地山内における応力分布について理論的考察を行つた。応力式はいずれも素掘立坑および巻立立坑に対して求められた。

弾性状態に対する計算結果では、立坑は覆工を施すことによつて素掘の場合に比して半径方向応力σ_rを増大し、切線方向応力σ_θを減少するが、立坑からある程度(立坑半径の5倍程度)離れると両者の応力にはほとんど差異がないことが明らかになつた。

弾塑性応力状態に対する近似解法を、(i)地山材料を非圧縮性と考え、平面ヒズミの状態を仮定した場合、(ii)同一水平断面内の弾性、塑性両領域において一定の鉛直応力が作用しているものと考えそれを含めた3主応力による降伏条件を考慮した場合に対して示した。なおこれらの場合はいずれも降伏条件として*Mises*の条件式を適用し、素掘の場合と覆工を有する場合に対して、弾塑性境界半径と地山内の応力分布を求め、さらに弾性地山に対する応力分布と比較した。その結果から弾性状態に対して弾塑性状態の応力分布がいちぢるしく変化すること、覆工を施すことによつて弾塑性境界および応力状態が変ること、さらに(i)の近似解による結果では(ii)の近似解によるものよりも塑性領域が狭くなり、σ_θは塑性領域では大きく弾性領域で小さくなり、σ_rは弾性、塑性両領域において大きくなること、しかし塑性領域のσ_r、弾性、塑性領域のσ_r、σ_θには大差ないことなどが明らかになつた。また弾塑性応力状態の場合には立坑周囲の塑性領域で、弾性状態のときよりも応力を減じ、最大応力の生ずる位置が坑壁より地山内部に移動し、素掘の立坑がかなり深い位置においても長期間安定を保ちうることを説明した。

つぎに地山が塑性状態にある場合に対しては、物体の塑性状態を示す方程式が同一の応力ーヒズミ曲線をもつ非線型弾性体を表示するところの方程式となんら異なるところがないという考えから、立坑周囲の地山の塑性変形領域における応力を近似的に求め、その分布状態について考察した。この解法では弾性領域内における応力式を用いることにより、近似的に塑性変形領域での応力状態を

容易に算出することができるが，弾性領域内の弾性係数にかわるものを，当該地山材料の応力ーヒズミ曲線を用いて求めねばならず，現場地山の塑性状態の程度，すなわち現場における地山材料がその応力ーヒズミ曲線のどの点にあるかを推定することが困難であり，この点についてさらに研究しなければならないと考える。

第 3 篇　水平坑道周辺応力分布に関する実験的考察

才 / 章　概　説

坑道応力および坑道の変形状態に関する実験的研究としては、大別して現場観測によるものと、実験室における模型実験によるものとが考えられる。現場においては、坑道天盤の沈下、下盤の盤膨れ、支保、覆工にかかる地圧、坑道の変形状態等が実測され、あるいは坑道の破壊状態が観測されて、それらの結果より地圧現象ならびに地圧統制についての研究が行われている。古くはもつぱら坑道天盤に生ずる割目の状態や坑道の変形、破壊状況から坑道応力を推定していたが、[1] 逐次実測に計測器を用いるようになつて、坑内支柱にかゝる荷重や、天盤沈下の測定が広く行われるようになつた。最近では坑内地圧の測定に対していろいろな測定方法が適用され、それとともに各種の地圧計、ヒズミ計等が改良されたり、新しく考案されて、坑道の変形状態、坑道周囲壁の応力、坑道覆工および支保の応力、周囲地山内の応力状態等の実測がさかんに行われている。[2] これら最近の計測器による応力あるいは変形の測定はいずれも長期間にわたつての継続測定を目指しており、今日ではかなり安定した長期測定方法が発表されている。[3]
著者も下部炭層の採掘が及ぼす上部坑道の応力変化の状態を調べるために、坑道支保 TH 型枠に抵抗線ヒズミゲージを貼付し、長期測定が可能なように処置を施して、枠の変形状態を実測し、その結果から坑道支保にかかる応力変化について考察を行つている。国鉄においてはかなり以前より多くの変形ずい道について調査を行い、[4] また組織的な現場実測を行つて、地山状態と土圧との関係、ならびにその坑道の変形あるいに破壊に及ぼす影響について考察するとともに、変形ずい道の補修工事あるいは膨張性地山におけるずい道の施工法について研究を行つている。[5]

以上述べたような地圧現象における実測は、測定計器の発達に伴いさかんに行われているようになつてきたが、実際現場における地山状態が複雑であり、坑道の応力や変形に影響を及ぼす因子が多いことや、実測が行われるようになつてから年月が経つていないために、系統的な実測資料が充分でないような現状である。したがつて実測の行われている地点における種々の地山要素をすべて含めた状態の及ぼす坑道の応力および変形への影響については実測資料が有効に用いられるだろうが、それらの資料をさらに多く集めて比較検討しなければ、一般に実測結果をほかの地山状態における坑道に適用することは困難である。

これに対して模型実験においては地山の種々の状態を理想化し、坑道の応力および変形に影響を及ぼす種々の要素を取出して実験を行うことにより、ある程度系統的に坑道応力状態あるいは変形状態について考察することができる。従来よりよく行われてきている実験は、地山を完全な弾性体

と仮定しているが、そのほか地山模型として砂あるいは粘土を用い、塑性体あるいは粘弾性体としての地山を対象にした実験も行われている。いままで行われてきている坑道応力あるいは変形に関する模型実験の概要を示すとつぎのようである。

模型実験としてはその目的によつて応力分布あるいは支柱圧力を求めるもの、破壊状態を観測したもの、変形量の分布を求めたものなどに分けられる。応力分布および破壊状態を求めたものとしては、古くは*Lehr* および *Seidl* の実験[6)]がある。彼等は塑性模型として粘土を、弾性模型としてゼラチンを、脆性模型としてパラフィンを使用し、正方形断面の坑道模型の坑道応力の分布および破壊状態について研究している。さらに坑道応力状態を求めた実験としては、寒天模型を用いた山口の実験[7)]、砂を寒天に混入した模型を用いた岡本の研究[8)]があるが、後者は模型の坑道周壁に生じた亀裂を調べ、その位置を弾性学的に計算した応力と比較し、素掘坑道の亀裂の生ずる機構すなわち坑道の強さというものについて考察している。また *Bussmann* および *Stoke*[9)]は楕円形断面の坑道に対する模型実験を行つて、坑道周辺における応力を求め、その結果より実際の坑道壁に生ずる応力を推定している。最近では坑道周辺の応力状態る求めるための模型実験として、さかんに光弾性実験が用いられており、著者ももつぱら光弾性実験法を種々の方法で適用して、坑道応力に関する模型実験を行つているが、著者以外のこの実験法によるものとしては*Kofader*[10)], *Duvall*, *Wilbor*[11)], *Hilts cher*[12)13)], *Sonntag*[14)], 平松および岡[5)]の研究がある。これらの研究については第2章以後の著者の研究のところであらためて述べられるだろう。

つぎに坑道の破壊状態に関する研究としては、上記岡本の研究のほかに*Dommann*[16)], *Bucky*[17)], 平松および岡[18)]などの研究がある。*Bucky* は従来の実験方法である等分布載荷試験を用いないで、人工的な遠心力を利用した重力場での実験方法、いわゆるバロダイナミックス破壊試験を行つている。さらにこの方法を適用して、平松および岡はモルタル模型を用いて立坑底岩盤の破壊状態について実験的な考察を行つている。また乾燥砂を箱に詰め、その底板の一部に設けた落戸を沈下させた場合に、上部の砂層がいかに崩壊して行くかを定量的に求めた伊藤の研究[19)]や、水平な地表面を有する弾性体の地山中に塑性体とみなされる水平層が介在する場合、この塑性層中にトンネルを掘つたときの塑性体物質のトンネル中心に向う塑性流動を対象にした小田の研究[20)]等がある。

最後に坑道の変形に関する研究としては上記それぞれの研究において、坑道応力あるいは破壊状態に対する実験と平行して実験が行われているが、さらに小田のレオロジー的特性の地山中の素掘トンネルの変形挙動に対する実験的研究[21)]がある。

以上従来より行われてきている模型実験による坑道応力および変形あるいは破壊に関する研究について紹介し、実験研究のだいたいの傾向について明らかにしたが、坑道応力に関しては光弾

性学的な方法がもつとも有効な方法であると思われる。もちろん光弾性実験によれば、地山が弾性体である場合が対象になる恐れはあるが、さきにも述べたように地山状態のすべてを考慮した実験は不可能であり、そのような場合でも弾性的な応力状態が基礎的な概念を与えるだろう。著者は坑道応力に関する実験的考察として第2篇で述べたごとき完全弾性地山、直交異方性弾性地山、点等方性弾性地山、層状弾性地山等に開さくされた坑道を対象にして、もつぱら光弾性実験を行つてきたが、この篇では上に述べたような種々の地山状態の模型に対する光弾性実験法の適用について述べ、さらに実験でえられた坑道周辺応力分布を第2篇で述べた理論計算値と比較するとともに、坑道応力分布についての考察を行つた。なお水平交差坑道のように三次元的に取扱わねばならないものに対しては、理論計算は容易に行えないので、これに対しても光弾性実験法が有効に適用されうることを示し、水平交差坑道の応力集中について実験的考察を行つた。

以下これらについて述べることにする。

才 2 章　完全弾性地山中の坑道の断面形状が周辺応力分布に及ぼす影響[22)]

坑道周辺の応力分布を理論的に求める方法については、第2篇において種々の地山状態に対して述べたとおりであるが、そこではいずれも坑道断面形状は主として円形、楕円形あるいは丸味をもつた隅角を有する正多角形等であつた。円形坑道の場合には計算がかなり容易になるため、理論計算の対象としてよく用いられるが、種々の地山状態の坑道応力に及ぼす影響を比較検討するのに、この円形坑道は都合がよい。しかし実際に用いられている複雑な断面形の坑道に対しても、円形坑道に対する結果より推定することは可能であろう。理論的考察のところでも述べたように、実際の坑道断面における周縁応力状態の算定はきわめて複雑であり、一つの断面形状に対する坑道応力を計算するにもかなりの手数を要する。したがつて坑道断面形状の変化に伴う応力分布の変化を理論的に求めることはきわめて困難と言える。しかし後述するように光弾性実験を適用することにより、この問題はかなり容易に解決されるだろう。こゝにおいて一般的な形状の断面を持つ坑道の周辺応力分布を求め、さらにそれらの結果より応力的に有利な断面形状を知るために、一連の光弾性模型実験を行つた。

この場合地山を等方等質の弾性体と考え、地表面の影響のないような深さにおける坑道を対象にしている。地表面を考慮した坑道応力の理論解、たとえば安蔵の解によれば、深さが坑道半径の10倍にも達すると地表面の影響はほとんどなくなるから、それ以上深いところでは坑道応力は鉛直および水平方向の初期応力（あるいは側圧係数）に関係して考えればよい。

実験は4種の系列の断面形状に対して行い、断面形状、側圧係数と応力分布との関係を求め、それより合理的な断面形状について考察した。さらに2種の国鉄のずい道標準断面について実験を行い、さきの実験結果と比較検討した。

2・1　実験模型

実験に用いた坑道模型の形状はつぎに示すごときものである。

実験No.1　上部に一定の半円形アーチを持ち、下部に種々の高さの矩形断面をもつ形状（図－3・2・1）

実験No.2　一定半径の円弧で直線底面をもつ断面形状（図－3・2・2）

実験No.3　種々の円弧アーチを持つ矩形断面形状（図－3・2・3）

実験No.4　国鉄標準断面狭軌単線第3号型（図－3・2・4）

実験No.5　国鉄標準断面狭軌複線直線用（図－3・2・5）

実験No.6　上肩部に種々の曲率をもつ正方形断面形状（図－3・2・6）

これらのうち実験No.3はR.Hilscher[23)]によつて行われたものであり、模型材料としてはColombia Resin CR−39が用いられている。坑道断面は$180^{mm} \times 180^{mm}$の正方形板に開けられ、鉛直方向および水平方向から同時に等分布荷重を載荷して、P_h/P_v = 0，0.2，0.4，0.6，0.8，1.0 の6種の荷重状態で実験を行つている。実験No.3以外のものは光弾性材料Epoxy Resin（光常数$K = 12.51\ kg/cm$）の$100^{mm} \times 100^{mm} \times 6^{mm}$の正方形板に坑道断面が開けられた模型を用い、鉛直方向、水平方向に別個に等分布荷重を載荷し、P_h/P_v = 0〜1.0 の種々の値に対して両者の実験結果を重畳した。

これらの模型を用い、通常の光弾性実験法によつて等色線縞写真を撮影し、その坑道周辺の次数より周辺応力の分布がえられる。

2・2　実験結果およびその考察

各断面形状にたいして得られた等色線写真の例を示せば写真3・2・1〜3・2・6のようであり、それらより坑道周辺応力分布を求めれば、図−3・2・7〜3・2・12のごとくなる。いまこれらの応力分布よりとくに各断面の上盤中央、下盤中央、側壁中央あるいは起拱点の応力に注目し、実験結果を考察してみる。

(1)　上部に半円形アーチを持つ矩形断面および定半径円弧と直線底面をもつ断面（実験No.1およびNo.2　図−3・2・1および図−3・2・2参照）

一般に国鉄ずい道の標準断面は広軌、狭軌とも上部にほぼ半円形アーチ部をもち、側壁にはアーチ部より曲率半径の大きい円弧曲線を用い、底面は直線である。したがつて図−3・2・1および図−3・2・2で示した一連の断面形状の中間にある。まずこのような断面形状にたいして周辺応力分布の変化を調べてみる。

各断面形状にたいする応力分布より、鉛直初期荷重または水平初期荷重がそれぞれ単独に作用した場合のアーチ頂点、底面中央、起拱点の応力と断面の高さとの関係を求め、図示すれば図−3・2・13および図−3・2・14のようである。これらの図のように以後結果を無名数の形で表示するために、つぎのように応力に対しては鉛直荷重の比を、断面形状の寸法にたいしては断面形の巾にたいする比をとる。すなわちつぎのごとき値を用いる。

$\sigma t/Pv$ ：アーチ頂点の応力

$\sigma s/Pv$ ：起　点の応力

$\sigma b/Pv$ ：底面中央の応力

Ph/Pv ：側圧係数

Pv，Ph ：鉛直圧力，水平圧力

h/b ：断面形の全高

h/b ：起拱点より下部の断面高さ

b ： 断面形の巾

なお図－３・２・13及び図－３・２・14で実線は鉛直荷重にたいするもの、点線は水平荷重にたいするものである。

図－３・２・13よりつぎのことが判る。実験No.1のような断面形状にたいして鉛直荷重のみが作用するときは頂点及び底面中央の応力は坑道断面の高さに無関係にほぼ作用荷重に等しく大きさの引張応力 P_v となる。起拱点の応力は $h'=0$ の場合には起拱点が底面の隅角部と一致するため応力集中をおこすが、h' がある程度（$h'/b=0.125$）以上になれば、断面の高さにしたがつて一様に減少する。側壁は直線をなすために周辺応力はこの部分で圧縮応力を減少するごとく分布し、断面高さが増すにつれ、すなわち側壁の直線部が長くなるにつれて圧縮応力が小さくなる傾向がある。

水平荷重のみの場合には、起拱点附近に圧力強度と大きさのほぼ等しい引張応力を生ずる。したがつて起拱点においては断面の高さにかかわらずほぼ P_h なる引張応力を生ずる。
頂点および底面ともに圧縮応力を生ずるが、一般に直線である底面における応力が曲率をもつアーチ頂点の応力よりも小さい。したがつてこれらの応力は断面の高さが増加するに伴なつて同一の割合で一様に増加する。

鉛直荷重、水平荷重のいずれに対しても、底面隅角部に応力集中を生ずるが、この場合の断面形では高さのいかんにかかわらずその応力集中度はほぼ一定である。

つぎに図－３・２・14より実験No.2の断面形状についてつぎのことが明らかにされる。鉛直荷重にたいして頂点および底面中央においては、つねに荷重に等しい P_v なる引張応力を生ずる。
起拱点においては $h/b=0.125$ 程度の高さまでは底面隅角部の応力集中の影響をうけるようであるが、$h/b>0.125$ になると断面高さに無関係に $3P_v$ なる圧縮応力を生ずる。

水平荷重にたいしては、No.1の場合と同様に起拱点附近に P_h なる最大引張応力を生じ、高さが増すにつれてその生ずる位置が起拱点に近ずく。頂点においてはアーチ部の曲率半径がNo.1と等しいため、まつたく同一の応力変化を示している。この場合底面中央における圧縮応力も同一の傾向を示すが、頂点よりも応力増加の傾向が大きく、h/b が 0.4 以上になると $3P_h$ なる圧縮応力まで急激に増加する。

No.1とNo.2は断面巾および上部アーチの曲率半径が全く同一であるため、鉛直、水平荷重にたいしてアーチの部分の応力状態はほとんど相違しないが、断面下部の形状が異なるため底面中央および起拱点における応力は、その変化の趣きを異にする。底面隅角部の応力集中の程度は側壁との交角が大きいNo.2の断面形の方が小さいが、この応力集中は局所的なものであつて高い応力値ではあるが、岩石の局所的な塑性流動によつて減少されるから、それほど重大なものではない。
したがつて全般的にみて応力的にはNo.1のごとき断面形の方が有利である。

つぎに図－3・2・13および図－3・2・14をもととして、鉛直、水平の両方向から同時に荷重が作用した場合に対して、各位置における応力値の変化を示せば図－3・2・15，3・2・16，3・2・17のようになる。これらの図はいずれも側圧係数P_h/P_vをパラメーターとして図示されており、図－3・2・15は№1，№2の頂点の応力，図－3・2・16，3・2・17はそれぞれ№1，№2の起　点、底面中央の応力の変化状態を示している。一般に地山岩盤に最初から節理や裂目があるような場合には、わずかの引張応力が岩石の破裂を生ずるから、坑道においてはとくにアーチ頂部における引張応力は小さい値でも危険である。均一な地山における坑道の破壊は坑道応力の分布状態や、周囲の地山岩盤の強度などによつて、引張破壊によるか、圧縮破壊によるかが異るが、この点については平松・岡の研究[24]で岩石模型による実験結果や現場における坑道の破壊状況等から詳細に述べられている。しかしここでは簡単に引張破壊のみに着目して考えると、アーチ頂部に引張応力を生じないような断面形状が必要になる。いま№1および№2のごとく上部のアーチが単一の半円でできている場合には、図－3・2・15および図－3・2・16から判るように、側圧係数が$P_h/P_v > 0.45$の場合には断面の高さに無関係にアーチ頂点には引張応力を生じないが、$P_h/P_v > 0.35$あるいは0.33の場合にはアーチ頂点の引張力は断面高さh'/bに関係して増減し、h'/bが大きくなるほど引張応力を減少する。引張応力が零になるときの側圧係数P_h/P_vと断面高さh'/bとの関係を示せば図－3・2・18のようになる。この曲線によつて頂部に引張応力を生じないような断面形状が側圧係数のある値にたいして与えられる。引張応力を生じないようにする場合、側圧係数が小さくなるにしたがつて断面の高さを増さねばならず、その傾向は№1の断面形状の方が大きいことが判る。

(2)　上部に円弧アーチをもつ矩形断面（実験№3．(a)，(b)，(c)　図－3・2・3参照）

一般に坑道断面形状を決定するに当つては、まずその利用断面（建築限界）が考えられねばならない。この利用断面としては矩形が簡単であり、実際の鉄道ずい道においても№4（図－3・2・4）及び№5（図－3・2・5）のごとく、下部にほぼ矩形に近い形状をもち上部に円弧アーチをもつた断面形状をしている場合がほとんどである。したがつてここではまず利用断面としての矩形断面形を定め、その上部の円形アーチの形状が種々変化する場合のずい道断面形状の応力的性質について検討する。

この点に関しては*R．Hiltscher*が図3・2・3のごとき坑道断面形状について一連の光弾性実験を行つているので、その結果を掲げて考察する。各形状の断面についてアーチ頂点、底面中央および側壁中央における最大等色線次数が測定され、その結果各断面について各点の応力値は側圧係数の関数として表わされ、№1および№2の場合と同様に応力変化を示す直線群が得られる。その1例を示すと図－3・2・19のようである。断面の頂点における応力（σ_t/P）および側壁中央の応力（σ_w/P_v）とアーチの高さ（h/b）との関係を図示すると、それぞれ図3・2

・20 (a)，(b)，(c)および図－3・2・21 (a)，(b)，(c)のようである。なお底面中央における応力はアーチの高さが零であるときの頂点におけるものと同じであり、したがつて図－3・2・20の曲線に含まれている。図3・2・20より判るように、この場合もNo.1，No.2等の実験結果と同様に鉛直荷重のみの作用にたいしては、頂点および底面における引張応力はほぼP_vに等しく、矩形断面の高さ、アーチの形に無関係である。しかし側圧があるときには頂点の引張応力はアーチの高さの増加にともなつて減少する。

側壁の応力は 形断面の高さが減少するにともない増加するが、アーチの高さが総断面形の高さ（$h+h_1$）／b にあまり影響を与えない限り、ほとんどアーチと無関係である（図－3・2・21)。非常に高い断面形（$h/b>$ 5 ）にたいしては、鉛直荷重のみによる側壁応力はPvなる値に近ずき、水平な割目のように非常に低い断面に対しては∞に達する。

坑道において頂部に引張応力を生じないのが望ましいことはさきにも述べたとおりであり、したがつて頂点の応力が零になるごとき場合は坑道掘さくにたいして経済上最も適当な条件として見られよう。図－3・2・20において矩形断面の高さh/b，アーチの高さh_1/bおよび側圧係数Ph/Pvらの関係のもとで、頂点の応力が零になるところが見出されるから、これらの曲線群から頂点応力が零である条件を総括図示すれば図－3・2・22 のごとくなる。坑道を掘さくすべき地山の側圧係数が判れば、その値にたいして矩形の利用断面の各高さについて必要なアーチ高さが定められる。この図より判るように利用断面の高さが高くなれば上部アーチの高さを小さくすることが必要となる。

(3) 国鉄標準断面（実験No.4およびNo.5 図－3・2・4および3・25 参照）

No.4およびNo.5の断面にたいする坑道周辺応力分布を見れば判るように、いずれもNo.1にたいする応力分布と類似しているが、No.4および5では下部の側壁が曲率をもつため、鉛直荷重にたいしてこの部分にNo.1の場合よりもわずかに大きい圧縮応力を生ずる。しかし上部アーチおよび底面ではほとんど同一の応力値を示す。底面隅角部においてはNo.1の場合より応力集中度が低くなる。

水平荷重にたいしても周辺応力分布はNo.1とほとんど変りがなく、したがって鉛直、水平両方向に荷重が同時に作用した場合は、各側圧係数の値にたいしてNo.1に比して側壁部の圧縮応力がわずかに大きくなる程度で、ほかの部分はほとんど同一の応力値を示す。

結局一般に国鉄ずい道標準断面にたいする周縁応力分布は下部に矩形断面をもつNo.1あるいはNo.3の類似断面の実験結果より算定することが出来、断面形状の応力的な得失はNo.1およびNo.3の結果より論じられよう。

(4) 上肩部に曲線部を持つ正方形断面（実験No.6：図－3・2・6参照）

以上の実験において通常用いられる坑道の断面形状の性質について知ることが出来たが、つぎ

にここに基本断面が正方形であり、その上盤隅角部に曲率をもたせた断面形状について、その性質を考察してみる。実験No.1あるいはNo.3では上部は単一の円弧であるが、この場合には円弧と直線部とからなり、頂点は直線部にあるため少し応力状態が変化することが考えられる。しかし以上の実験から推察できるように、頂点が曲線部にある断面よりもこの場合の方が側圧にたいして生ずる圧縮応力を減少すると思われるが、逆に上肩部の曲率半径が小さくなり、その部分の集中応力が大きくなるのではないかとの懸念のため、ここに図－3・2・6のごとき一連の実験を行つた。その結果、鉛直荷重、水平荷重が別々に作用するときの頂点、底面中央、側壁中央、曲線部中央等における応力および曲線部における最大応力が、上肩部の曲率半径rにともなつて変化する状態を示すと図－3・2・23 のようになる。

図－3・2・23から判るようにこの場合も鉛直荷重にたいしては頂点および底面、水平荷重にたいしては側壁中央附近に作用荷重に等しい引張応力を生ずる。しかして水平荷重の場合は、r/bが大きくなるにしたがつて側壁に生ずる最大引張応力P_hの位置が下の方に降り、側壁中点においてはわずかに応力を減少する。鉛直荷重のみの場合では、側壁中点の圧縮応力は$r/b=0$のとき、すなわち側壁がすべて直線よりなるときに最小になり、r/bが大きくなるにしたがつてわずかに増加する。水平荷重のみの場合の頂点の圧縮応力はr/b が大きくなるにしたがつて増加し、直線部分のもつとも長い正方形断面のとき最小になる。これにたいして上肩曲線部に生ずる最大圧縮応力はr/bが極端に小さいところではかなり集中するが、r/b が0.15 以上になるとほとんど変化しない。

頂点の応力変化を側圧係数P_h/P_v をパラメーターとして図示（図3・2・24）すると判るように、頂点ではr/b の大きい場合に圧縮応力を生じやすい。いま頂点応力が$\sigma t/Pv = 0$となるような側圧係数P_h/P_v と曲線部半径r/bとの関係を示すと図－3・2・24 の点線のようになる。この曲線の左上の部分は頂点に引張応力を生じて危険な断面を示す。つぎに側壁中央の応力変化をP_h/P_v をパラメーターとして示すと図－3・2・25 のようである。r/b が増すにしたがつて圧縮応力が大きくなるが、r/b が大きいところで増加の割合が大きくなり、上肩の曲線部において最大圧縮応力を生ずる位置が側壁の方へ降つてくることを示している。

結局このような高さおよび巾の等しい断面形では、側圧係数が大きい場合には肩部の曲率半径の小さい断面が有利であり、側圧係数が小さい場合には頂部に引張応力を生じないためにはr/bを大きくとらねばならなくなる。

(a) 鉛直荷重

(b) 水平荷重

写真-3·2·1　実験 No.1，$h'/b = 0.50$

(a) 鉛直荷重

(b) 水平荷重

写真-3·2·2　実験 No.2，$h'/b = 0.25$

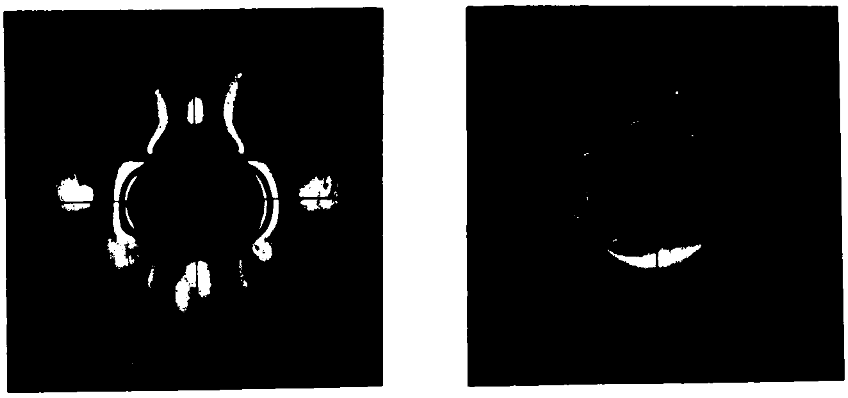
鉛直荷重　(Hiltscher による)

写真-3·2·3　実験 No.3

$h/b = 1.0$，$h_1/b = 0.25$

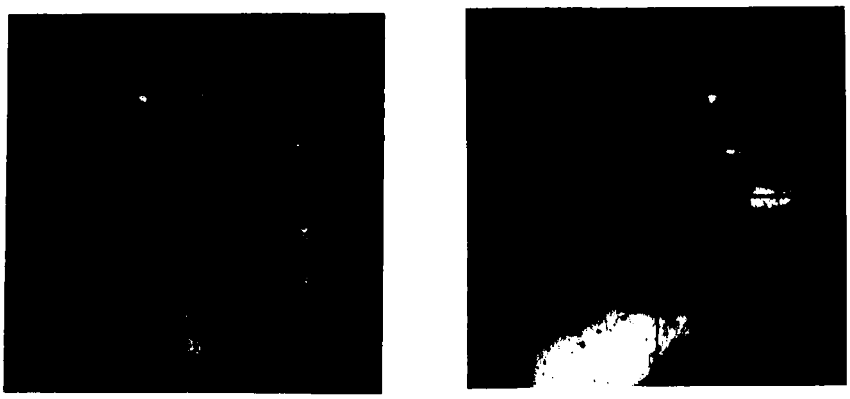
(a) 鉛直荷重　　(b) 水平荷重

写真-3・2・4　実験 No.4



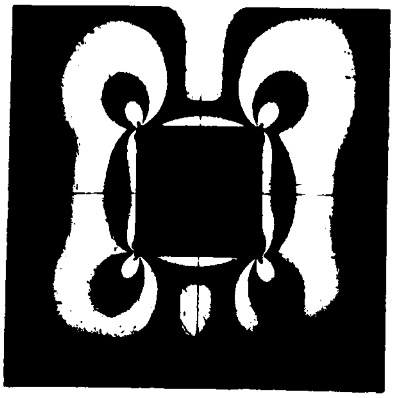
(a) 鉛直荷重　　(b) 水平荷重

写真-3・2・5　実験 No.5

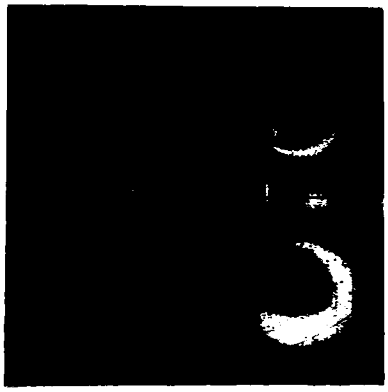


(a) 鉛直荷重　　(b) 水平荷重

写真-3・2・6(A)　実験 No.6　r/b = 0.30



(a) 鉛直荷重



(b) 水平荷重

写真－3·2·6 (B) 実験 No.6 r/b = 0

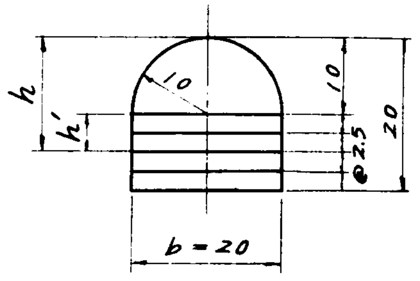


図-3・2・1 実験 No.1

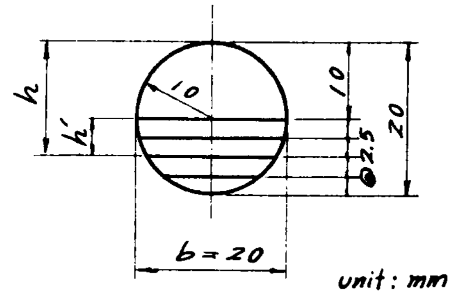


図-3・2・2 実験 No.2

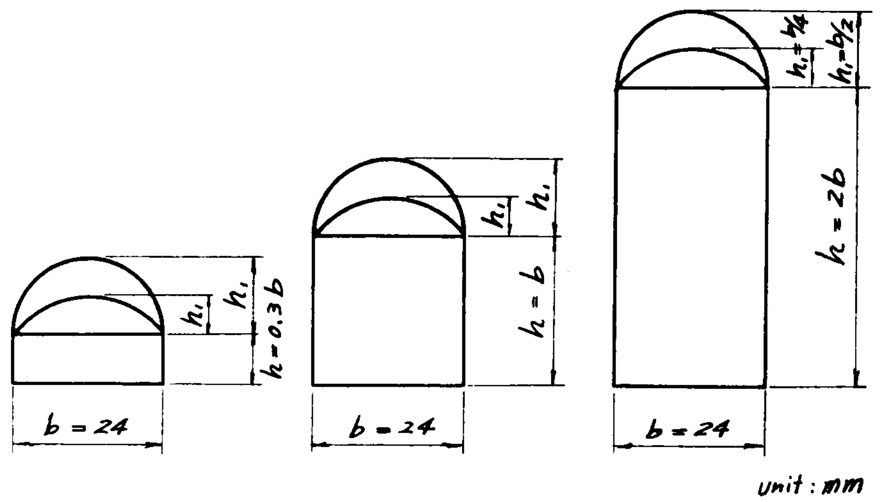


図-3・2・3 実験 No.3

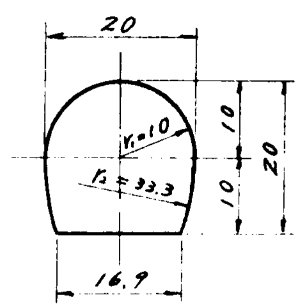


図-3・2・4 実験 No.4
国鉄標準断面
狭軌単線 3 号型

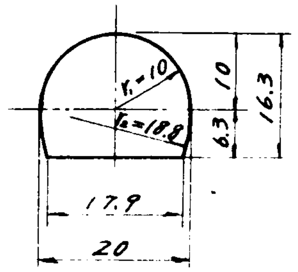


図-3・2・5 実験 No.5
国鉄標準断面
狭軌複線直線用

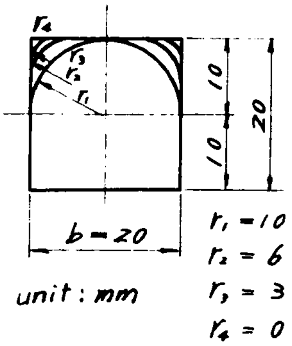
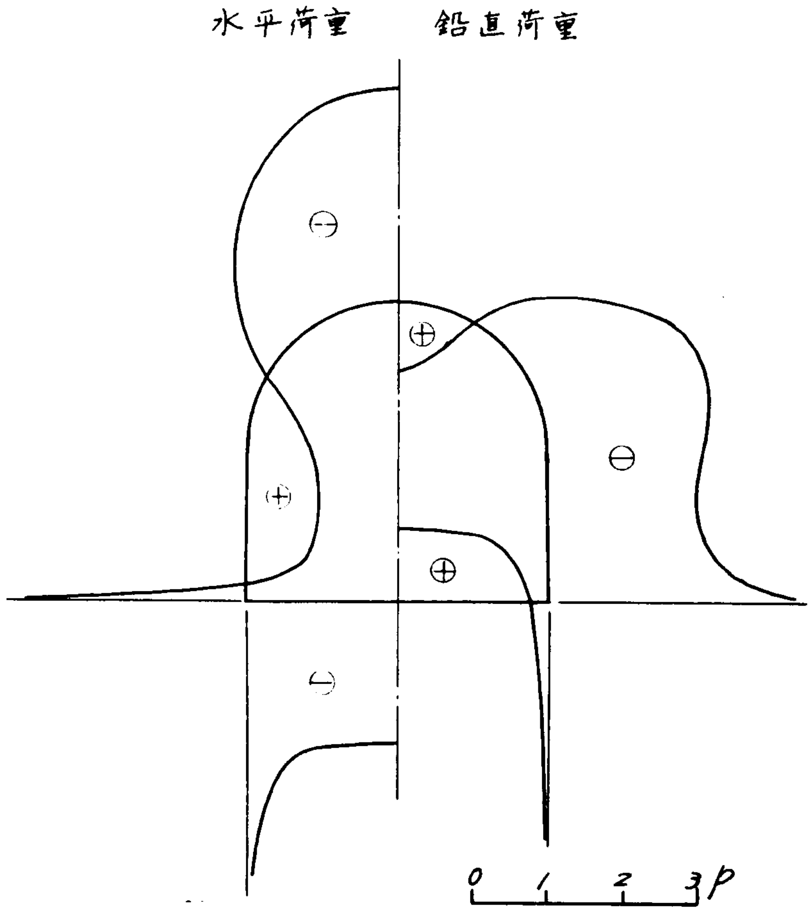
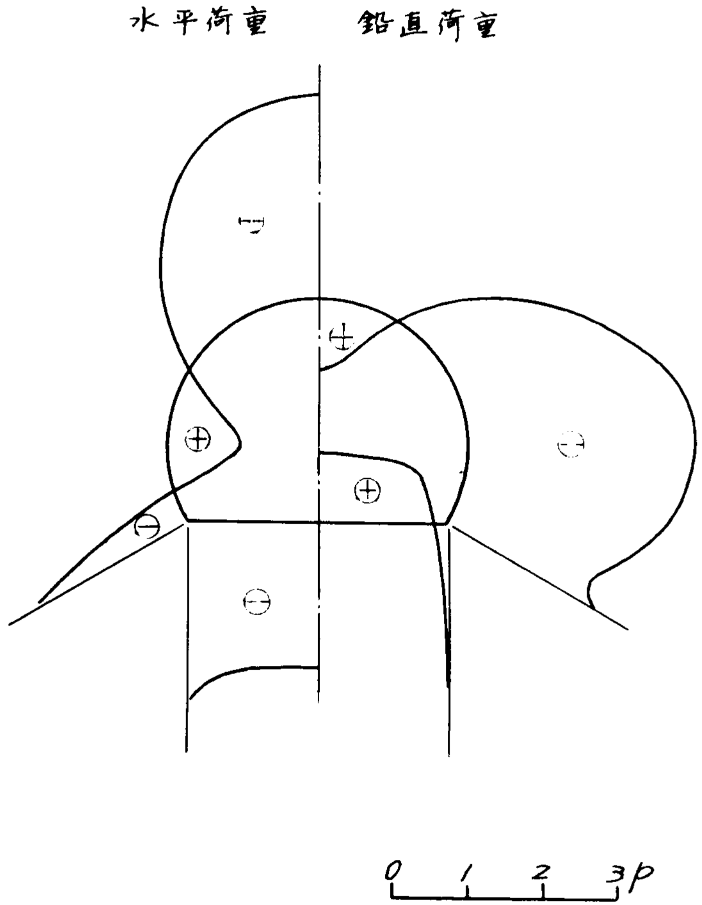


図-3・2・6
実験 No.6



図－3・2・7　実験 No.1, Case 5
$h'/b = 0.5$



図－3・2・8　実験 No.2, Case 3
$h'/b = 0.25$

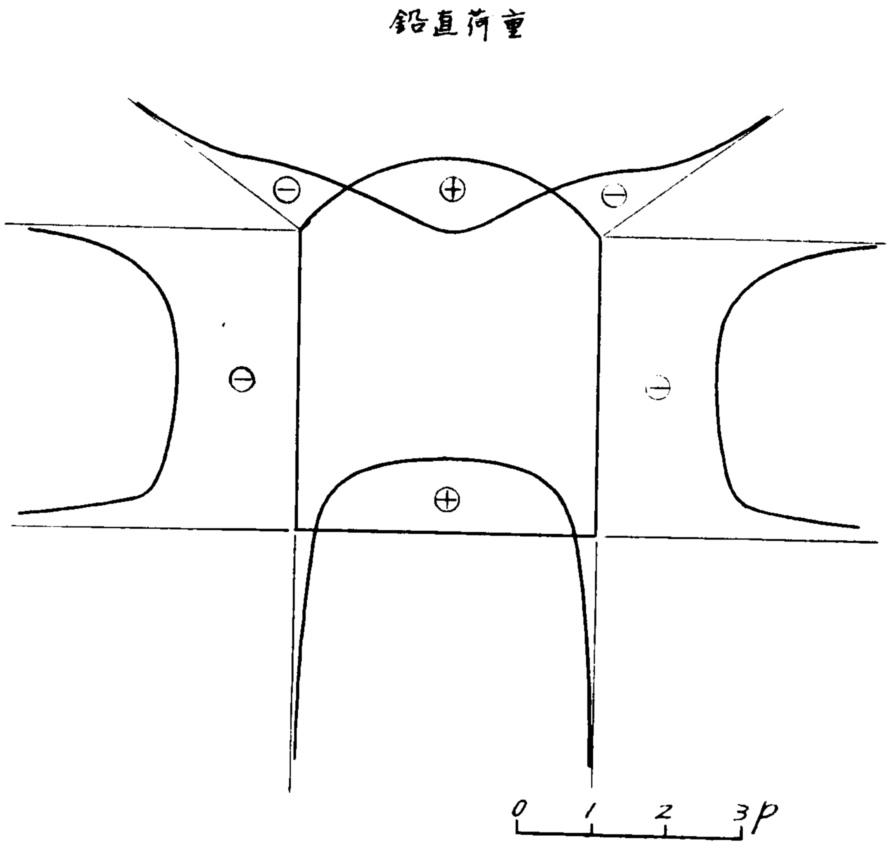


図-3・2・9　実験 No.3
$h/b = 1.0,\ h_1/b = 0.25$

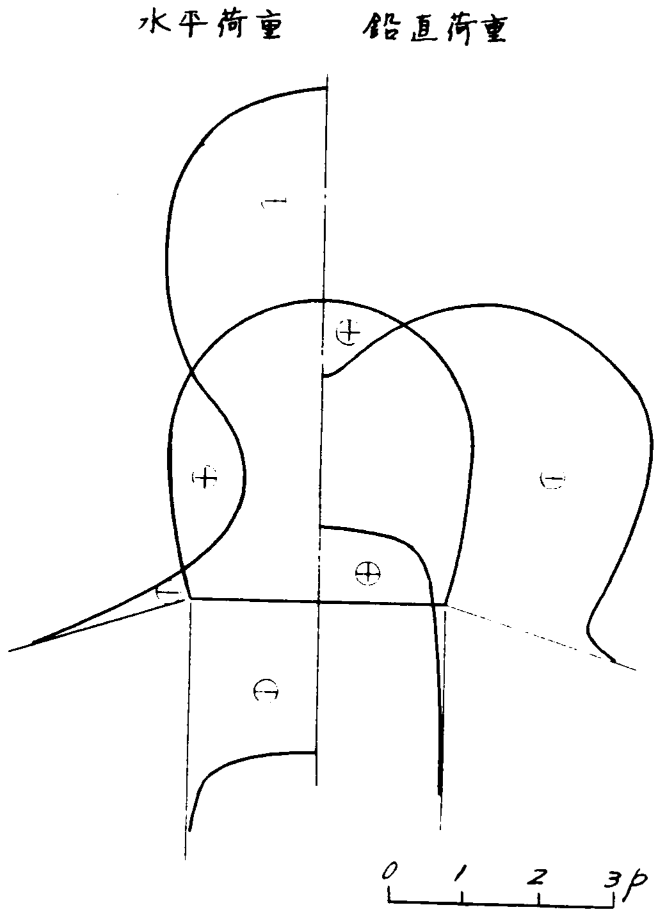


図-3・2・10　実験 No.4

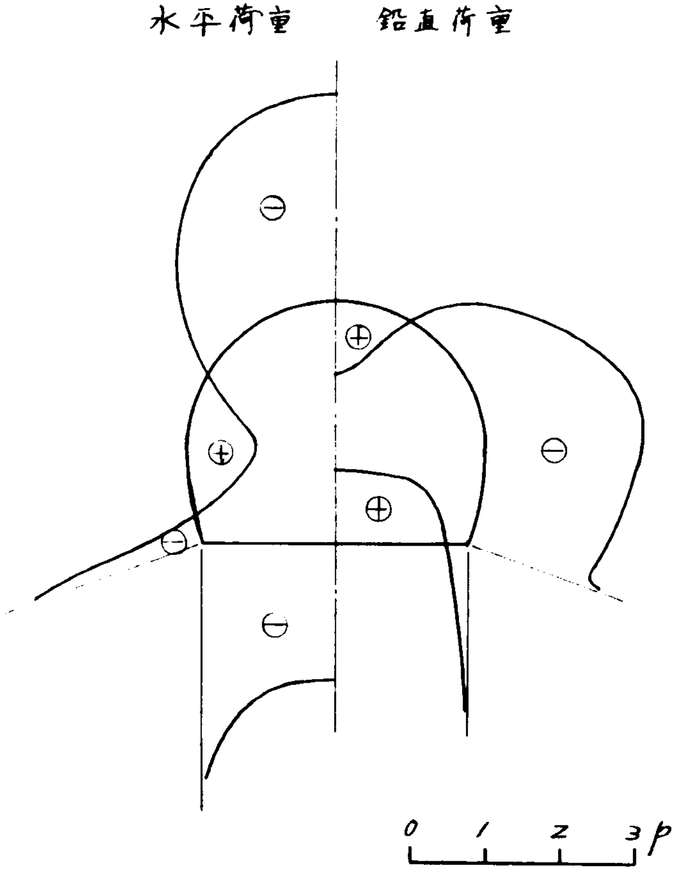


図-3·2·11　実験 No.5

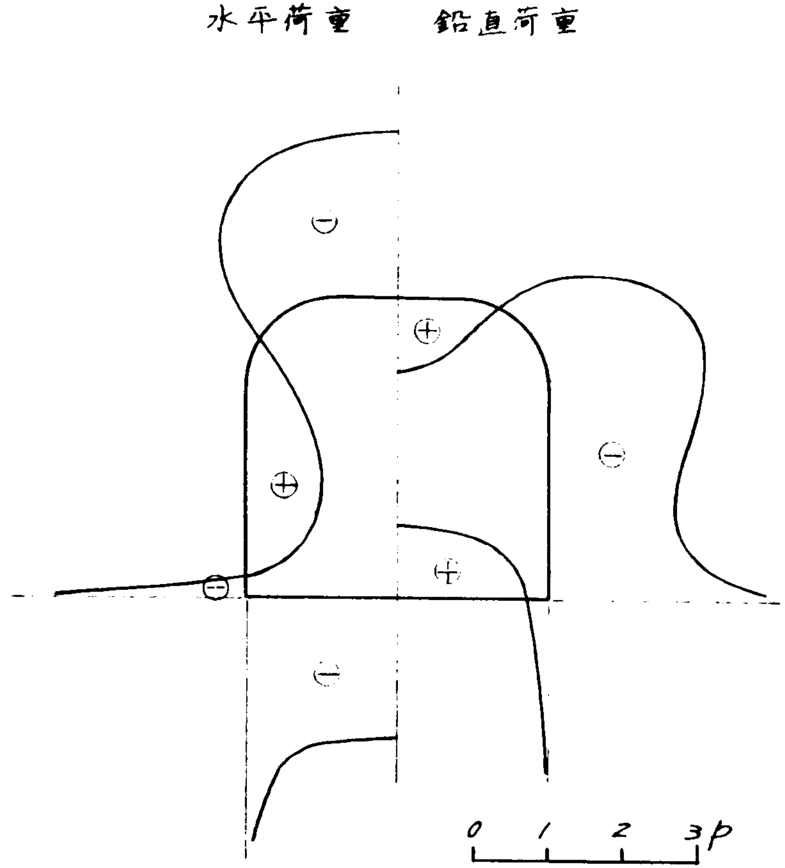


図-3·2·12 (A)　実験 No.6, Case 2

$r/b = 0.3$

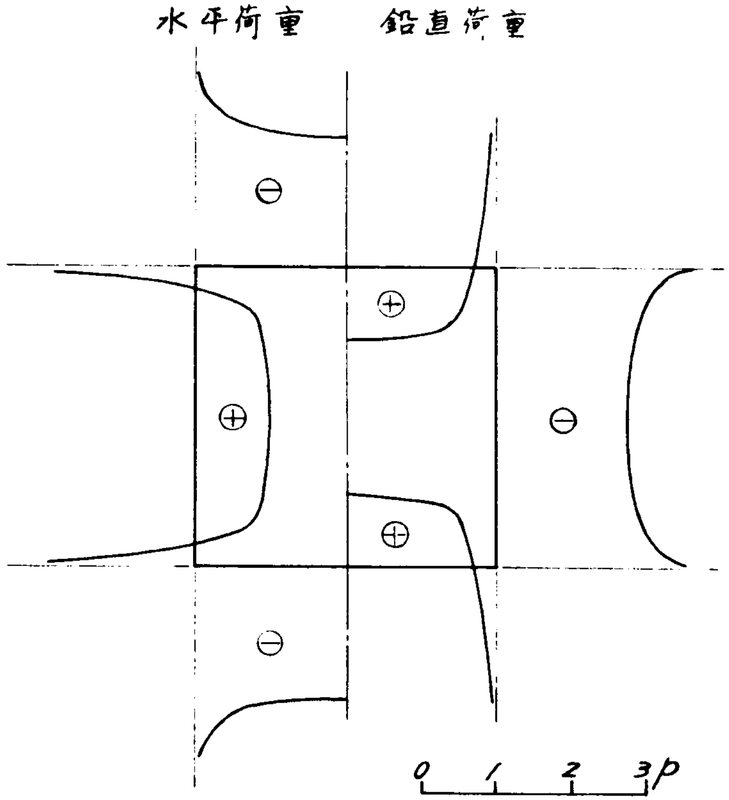


図-3・2・12 (B)　実験 No.6, Case4
$r/b = 0$

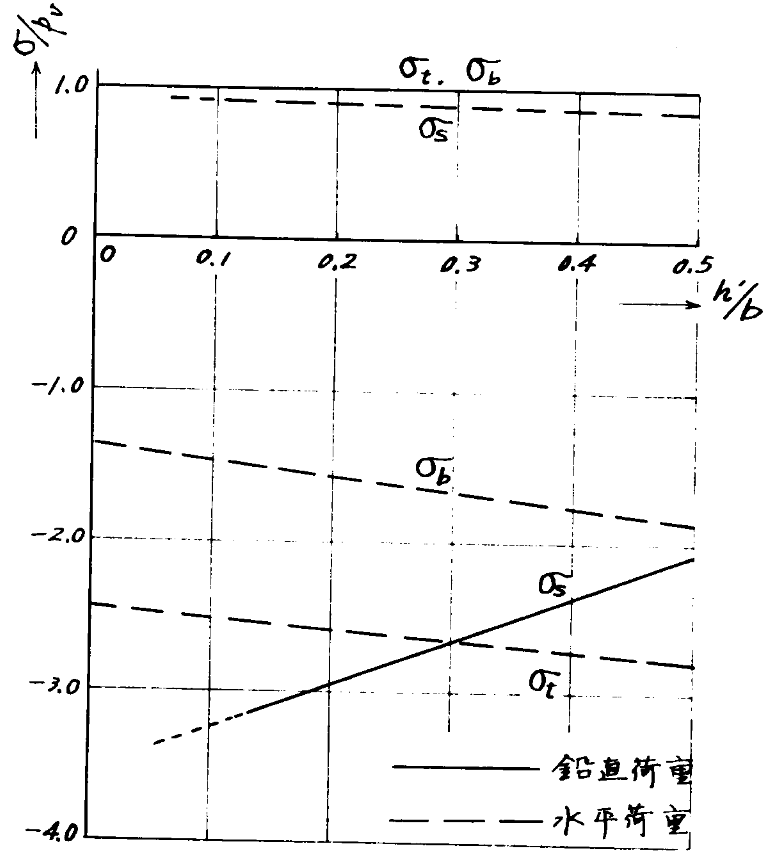


図-3.2.13 実験 No.1

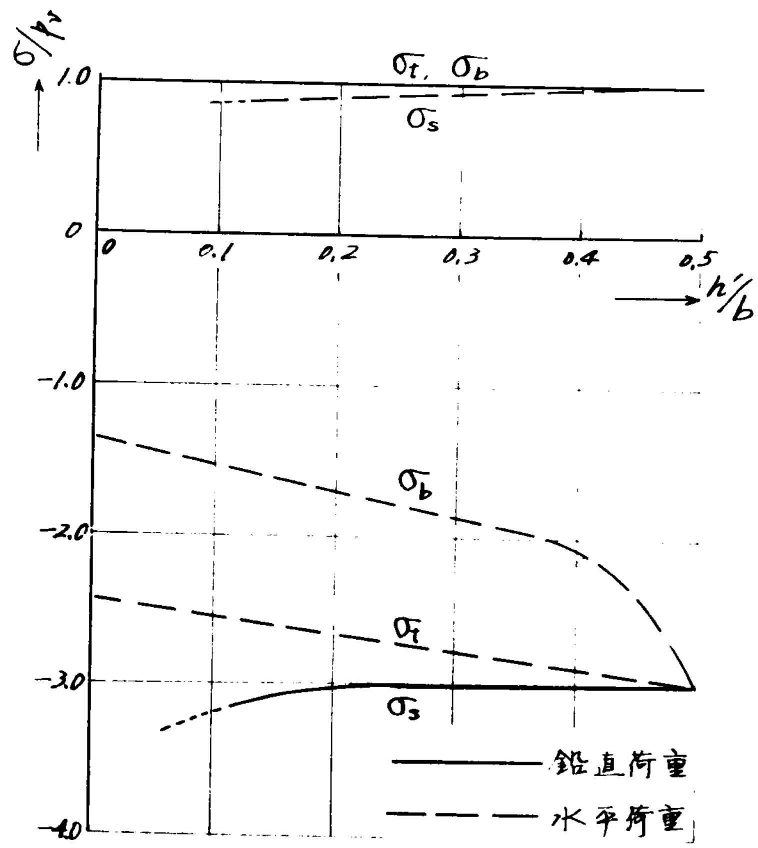


図-3.2.14 実験 No.2

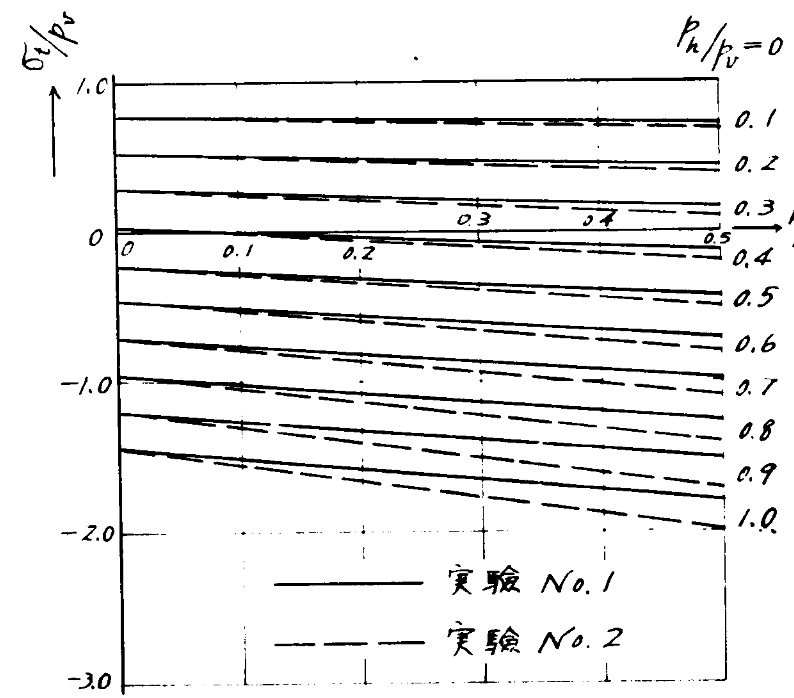


図-3・2・15

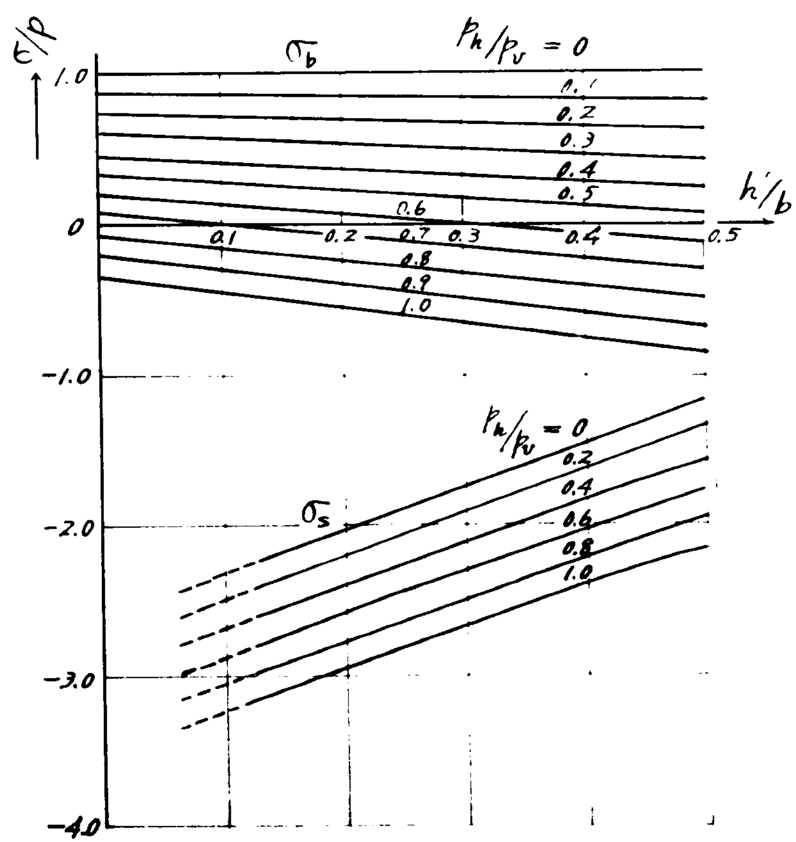


図-3・2・16 実験No.1

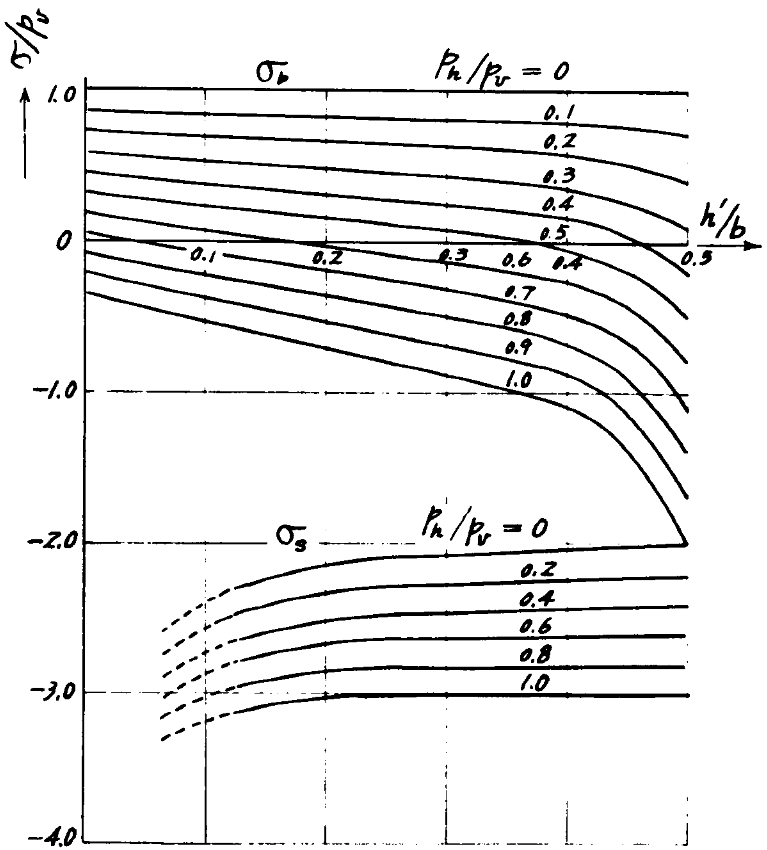


図-3・2・17　実験 No.2

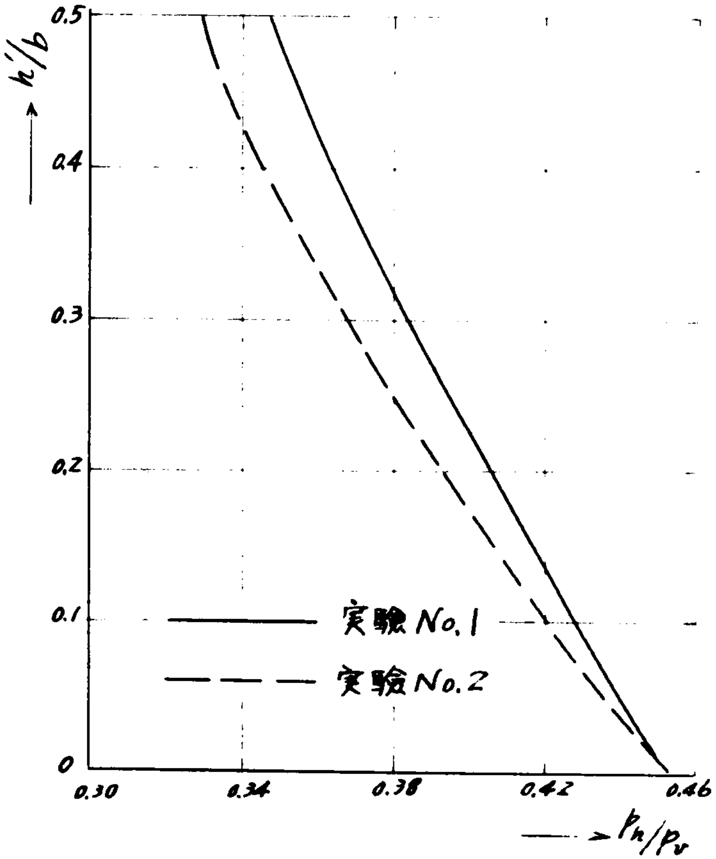
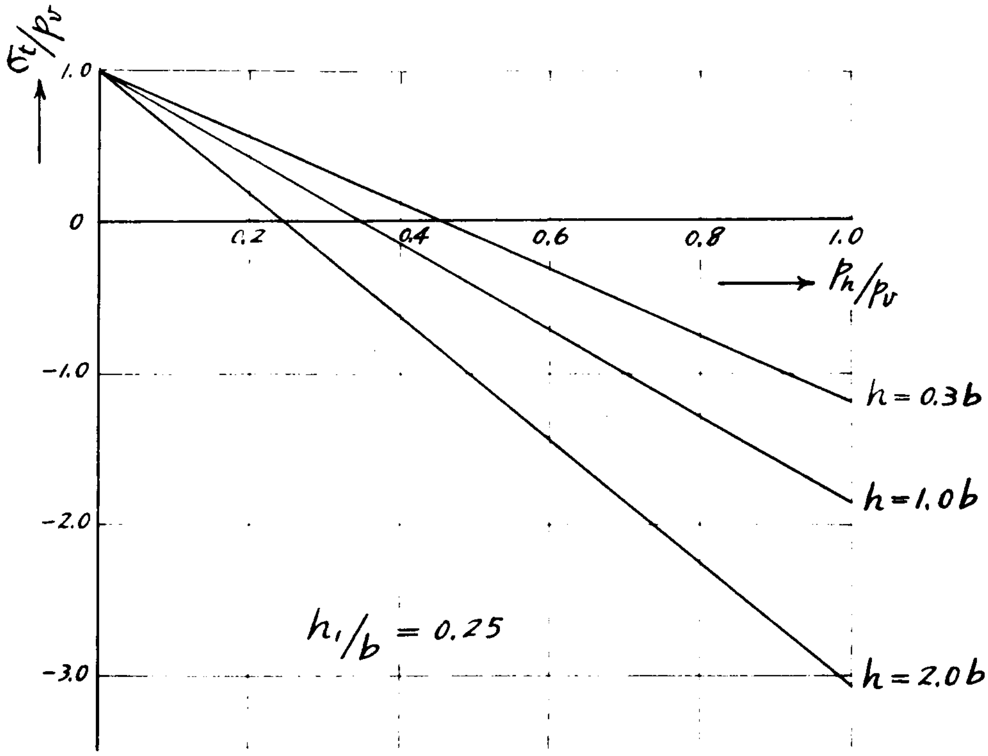
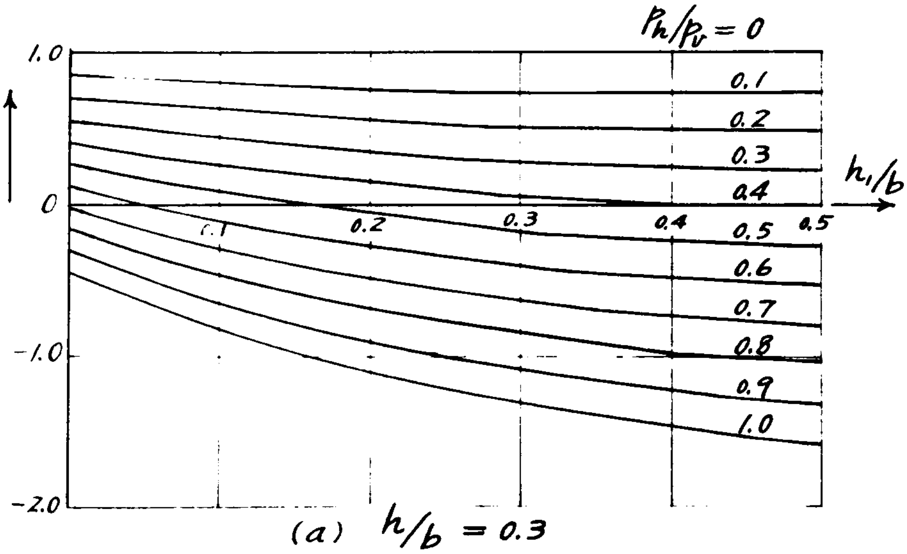


図-3・2・18



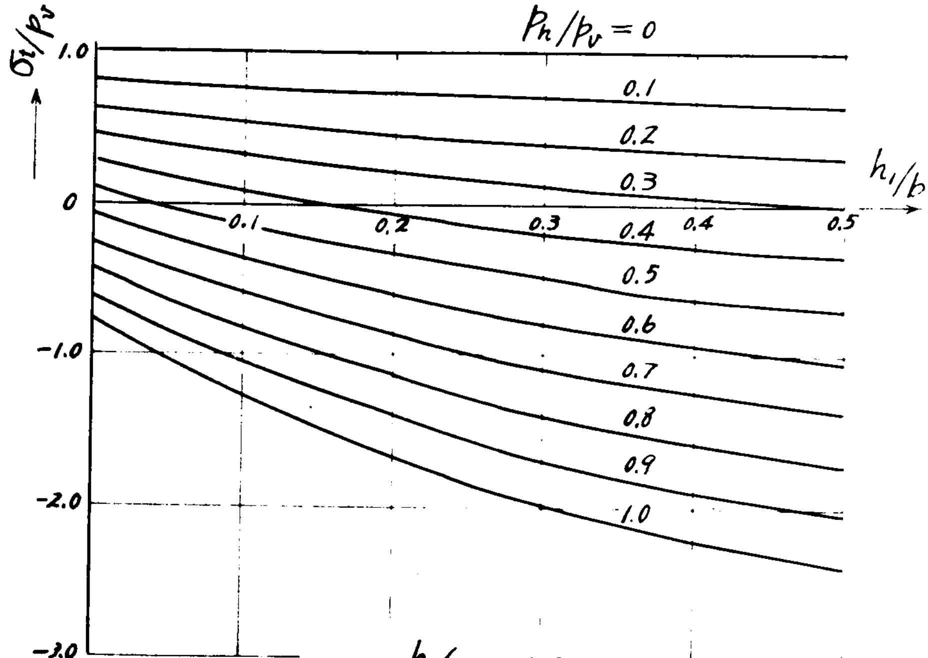
σt/pv
1.0
0
-1.0
-2.0
-3.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Ph/Pv
h = 0.3b
h = 1.0b
h = 2.0b
h1/b = 0.25

図 - 3・2・19

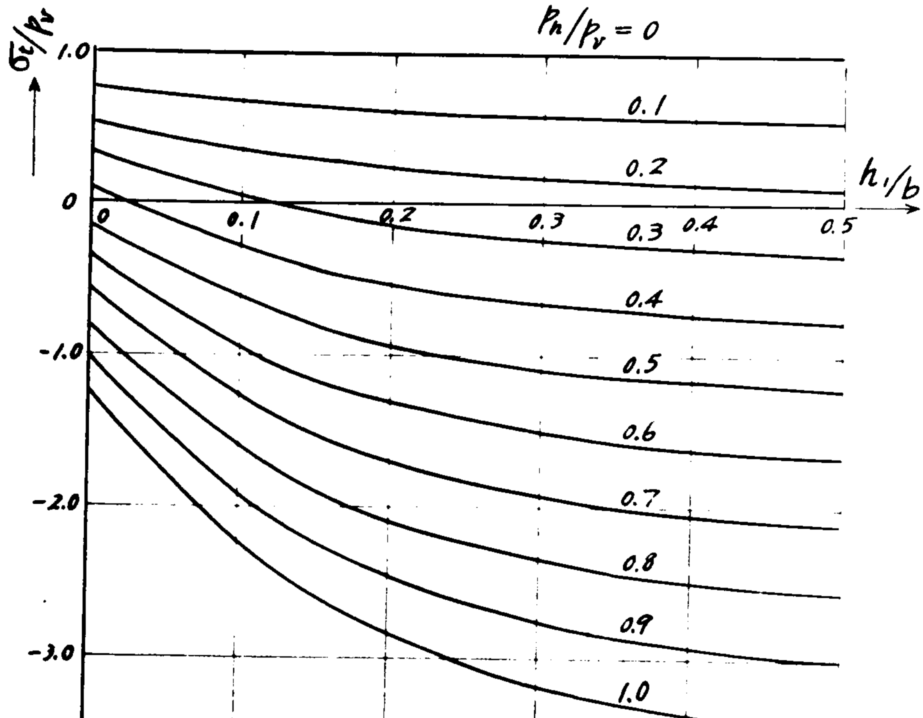


Ph/Pv = 0
1.0
0
-1.0
-2.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
h1/b
(a) h/b = 0.3

図 - 3・2・20

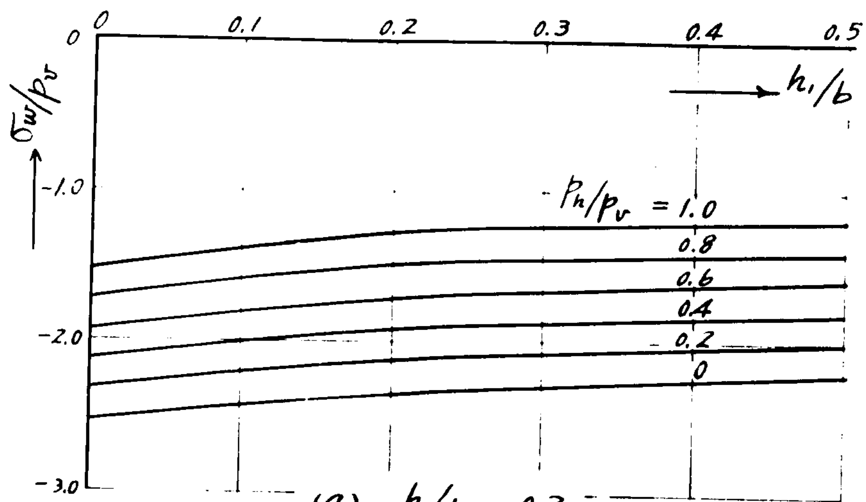


(b) h/b = 1.0

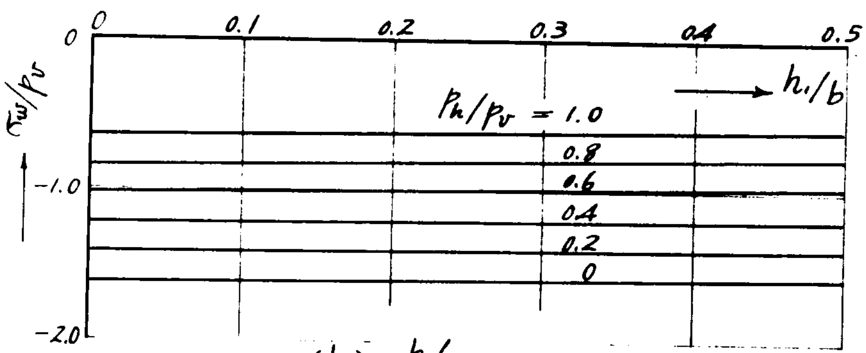


(c) h/b = 2.0

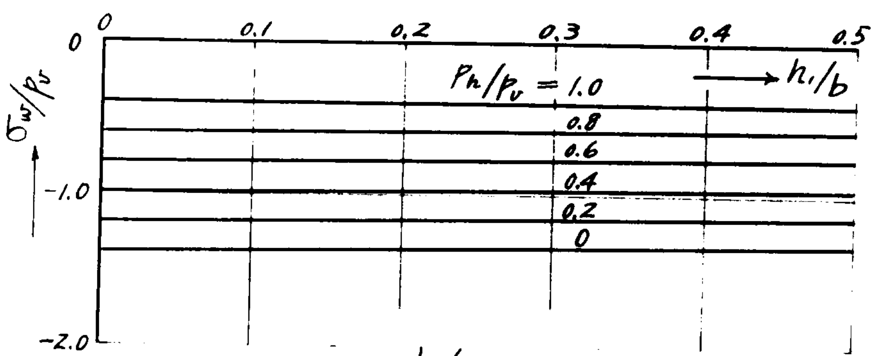
図-3・2・20



(a) $h/b = 0.3$

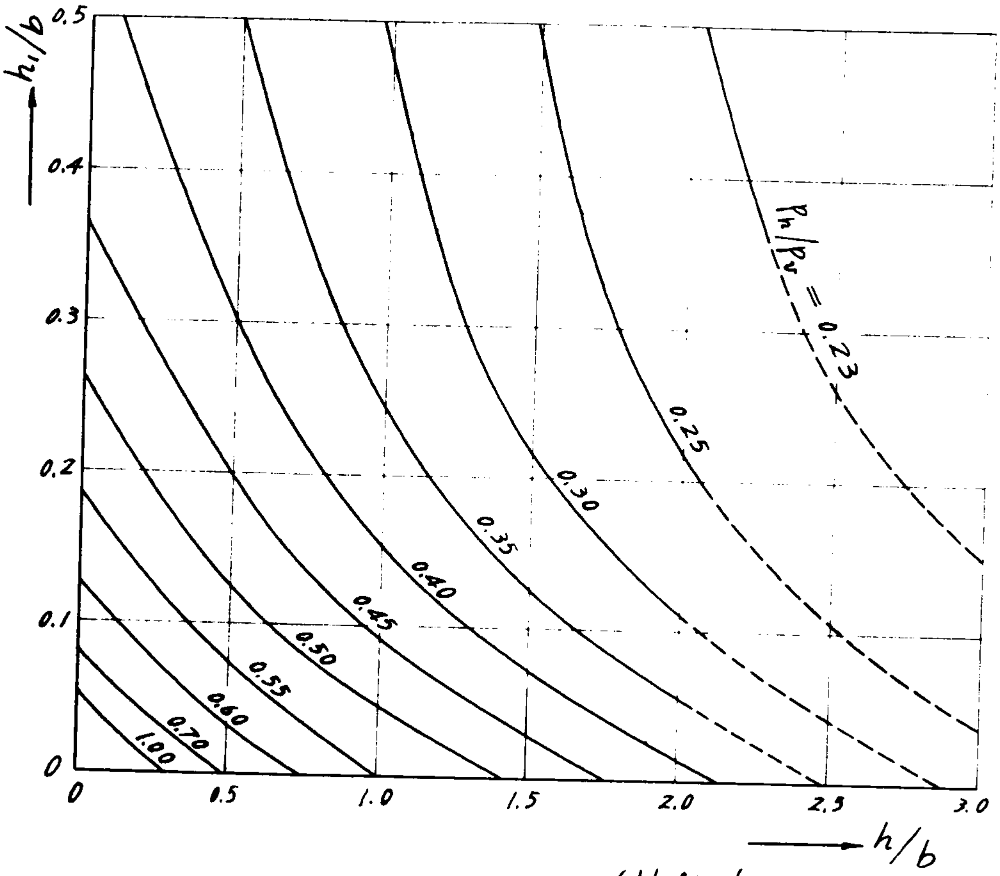


(b) $h/b = 1.0$



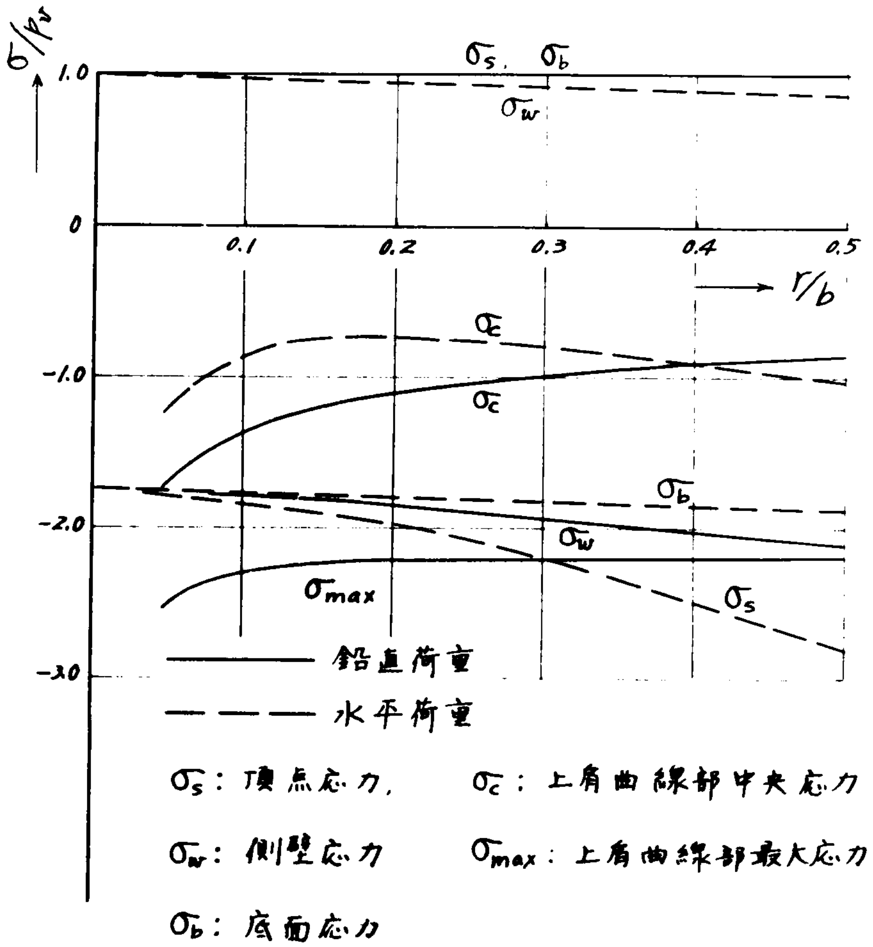
(c) $h/b = 2.0$

図-3.2.21



(Hiltscherによる)

図-3·2·22



σ/ps
1.0
0
-1.0
-2.0
-3.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
r/b
σs, σb
σw
σc
σc
σb
σw
σmax
σs
鉛直荷重
水平荷重
σs：頂点応力，
σc：上角曲線部中央応力
σw：側壁応力
σmax：上角曲線部最大応力
σb：底面応力

図－3・2・23　実験 No.6

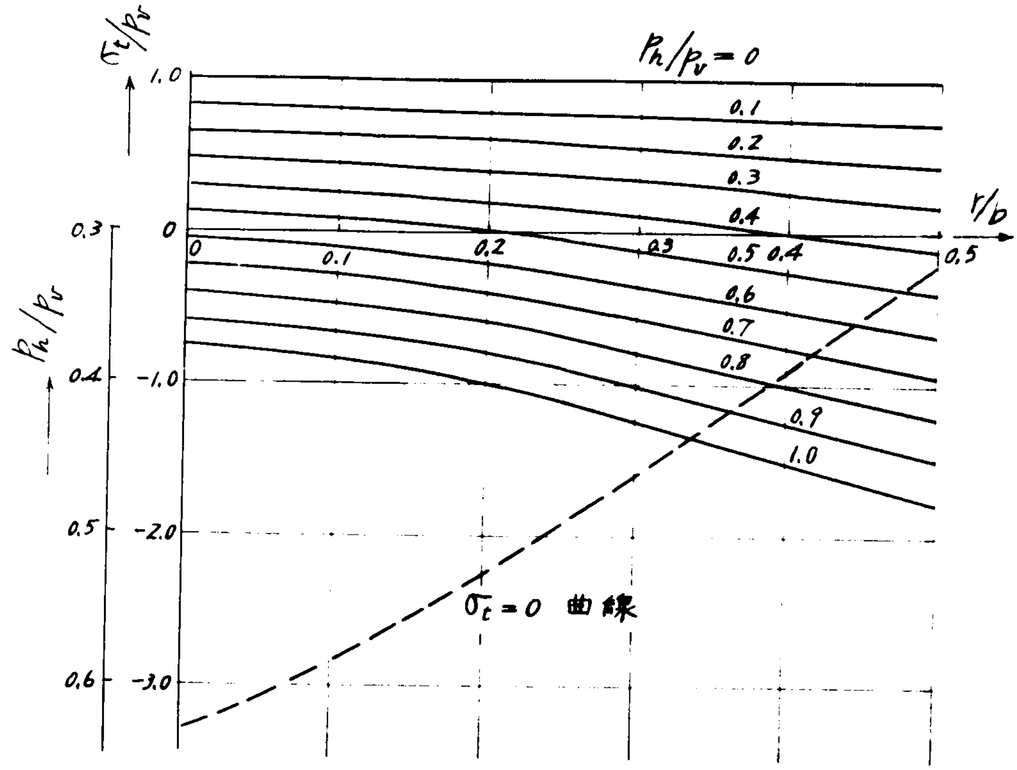


図-3·2·24 実験 No.6 頂点応力

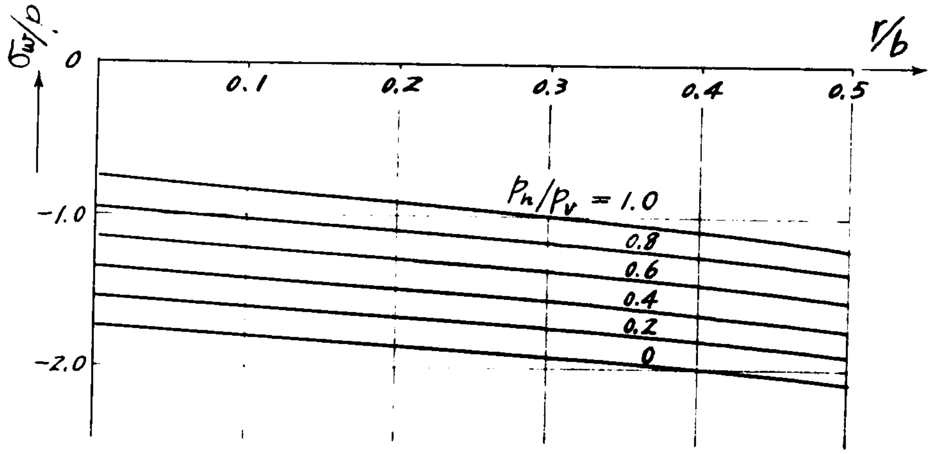


図-3·2·25 実験 No.6 側壁応力

才 3 章　直交異方性弾性地山中の坑道の周辺応力に対する光弾性実験法の適用[26]

直交異方性弾性地山中の坑道周辺応力状態の解析に対しては第2篇・第3章でも述べているごとく、坑道が地表面よりかなり深いところにある場合には有孔異方性体の平面問題として近似的に取扱いうる。したがってこの場合の模型実験にたいしても第2章で述べた等方等質の弾性材料の場合と同様な光弾性実験法が適用されることが考えられる。直交異方性材料に対する光弾性実験法は航空機、船体、建築等に現われる直交異方性材料やそれらによる構造物の応力解析に対して非常に有利な方法であろう。著者は主として異方性弾性地山内の坑道応力状態を研究するために、直交異方性板が円孔を有する場合の応力集中を対象にして、異方性材料に対する光弾性実験を行つた。　実験には後述するように光弾性被膜法（*photoelastic coating*）が適用された。異方性材料の応力測定に関する実験法として、2，3の研究が行われている。すなわち林毅[27]はポリエステル樹脂（リゴラック2004）とガラスクロスの組合せで透明な直交異方性の光弾性材料を作成している。そしてこの直交異方性板ではそのヒズミ分布をガラスクロスで支配させ、その光弾性効果を樹脂を通じて示させることにより、直接透過式の光弾性実験を行つている。しかしこの実験法ではガラスクロスの縦横の繊維密度の相違に限度（市販のものでは種類が定まつている）があり、またその弾性係数が樹脂のそれとあまり差異がないために、異方性の程度の大きい、すなわち大きい主弾性係数比の異方性材料をうることは困難である。市販のガラスクロスの種類の少ないことにより任意の異方性材料が得られないために、著者はガラス繊維の素線を一方向に入れて材料の作成を試みたが、一様にガラス繊維を入れることがきわめて困難なことや、透明度の高いものが得られなくて断念した。しかしこの方法では直接透過式で実験を行うため実験結果の処理が容易である利点はある。

つぎに林卓夫[28]は少数の基本異方性板（等方性板を含む）を用いて実験を行い、その結果を数学的に処理することによつて任意の異方特性をもつ直交異方性板の平面応力を実験的に求めることについて述べている。しかしこの場合は一般に抵抗線ヒズミ計を用いた応力測定による実験であり、特別な場合において等方性材料を用いた光弾性実験による応力値を用いる。しかし基本異方性板としてさきの林毅のごとき透明な異方性光弾性材料を用いれば、光弾性実験を適用することができて有利となるだろう。

以上の異方性板に対する実験法にたいして、著者は光弾性被膜法を用いて直交異方性板内の円孔周辺の応力集中に対する基礎実験を行つた。この場合には異方性板は透明である必要はないから、繊維や金属線を補強材とした合成樹脂板を作ればよい。あるいは木材を用いることも考えられる。

3・1　直交性異方性弾性平板に対する光弾性被膜法の適用

光弾性被膜法（*Photoelastic coating*）については最近河田[29]が実物光塑性実験法として詳細に紹介し、とくに光弾性被膜に用いる光弾性材料としてエポキシラバーを作成して、その特性に関する研究や実験に用いる反射式光弾性装置の試作等について報告している[30]。この方法は光弾性材料の塗料または薄板を不透明な下地材料の表面に接着し、その下地材料のヒズミ状態をそれに貼付した光弾性薄板に移し、同時に下地材料表面または貼付物の下面につけられた錫（あるいは銀）の膜などの反射によって光弾性縞の分布を得る方法である。

この方法は最初に*M. Mesnager*が提案（1930）したもので、その後最近になって塑性領域での物体のヒズミ状態を測定する目的で*D'Agostino*[31]，*Drucker*および*Zandman*[32]，河田等の研究者によって種々改良研究が行われてきている。最近では比較的大きいヒズミ状態、すなわち塑性領域におけるヒズミばかりでなく、弾性応力、弾性ヒズミについても測定が行われてきており、光弾性被膜法を用いたヒズミ計についても研究が行われている[33][34]。

まず応力あるいはヒズミを測定すべき下地材料が等方性体の場合を考えると、光弾性被膜に生ずる等色線縞よりつぎのように下地材料の応力を求めることができる。被膜と下地材料の表面との接着が完全であり、被膜の厚み t が応力、ヒズミの分布の勾配に対して小さい場合には、被膜のヒズミ状態は完全に下地材料表面のそれに等しいと考えられる。したがって下地材料のヒズミ状態 $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)_M$ と被膜のヒズミ状態 $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)_c$ とは全く等しいから次式をうる。

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)_M=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)_c \qquad (3\cdot3\cdot1)$$

しかるにヒズミと応力との関係より、下地材料に対して、

$$(\sigma_1-\sigma_2)_M=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)_M\frac{E_M}{1+\nu_M} \qquad (3\cdot3\cdot2)$$

被膜に対して

$$(\sigma_1-\sigma_2)_C=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)_C\frac{E_C}{1+\nu_C} \qquad (3\cdot3\cdot3)$$

なる式が与えられるから、これらと（3・3・1）式よりつぎのようになる。

$$(\sigma_1-\sigma_2)_M=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)_C\frac{E_M}{1+\nu_M}=(\sigma_1-\sigma_2)_C\frac{E_M(1+\nu_C)}{E_C(1+\nu_M)} \qquad (3\cdot3\cdot4)$$

一方下地材料表面の反射によって光弾性被膜を2度通過する偏光の示す光弾性縞次数は、α（cm/kg）を光弾性感度とすると

$$N=2\alpha(\sigma_1-\sigma_2)_C\,t \qquad (3\cdot3\cdot5)$$

であるから、つぎのように下地材料の主応力差（$\sigma_1 - \sigma_2$）が得られる。

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_M = \frac{N}{2\alpha t}\frac{E_M(1+\nu_c)}{E_c(1+\nu_M)} \qquad (3\cdot3\cdot6)$$

実験を行う対象物および被膜の弾性性質すなわち弾性係数E_M、E_c、ポアッソン比ν_M，ν_c，光弾性被膜の光弾性常数αおよびその厚みtなどはあらかじめ測定されているから、被膜に生ずる光弾性縞次数Nを測定することにより、ただちに主応力差を得ることができる。

なおそれぞれの主応力値あるいは応力成分（例えばσx，σy，$\tau x y$）をうるためには、等傾曲線を求めて通常の光弾性実験法で行われるのと同様の図式積分法を用いればよい。とくに自由境界上ではσ_1あるいはσ_2のいずれかが零であるから縞次数からただちに主応力値をうることができる。

つぎに下地材料が直交異方性板の場合について考える。まず異方性の対称軸（x，y軸）と主応力（σ_1，σ_2）の方向とが一致した場合には、応力ーヒズミ関係は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= c_{12}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2 \end{aligned} \qquad (3\cdot3\cdot7)$$

ゆえに

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = (c_{11} - c_{12})\sigma_1 - (c_{22} - c_{12})\sigma_2 \qquad (3\cdot3\cdot8)$$

しかるに　$c_{11} = 1/E_x$，$c_{22} = 1/E_y$，$c_{12} = -\dfrac{\nu_x}{E_x} = -\dfrac{\nu_y}{E_y}$　であるから、下地材料の主ヒズミ差はつぎのようになる。

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_M = \frac{1+\nu_x}{E_x}\sigma_{1M} - \frac{1+\nu_y}{E_y}\sigma_{2M} \qquad (3\cdot3\cdot9)$$

一方被膜の主ヒズミ差（$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$）$_c$は（3・3・2）式より、

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_c = \frac{1+\nu_c}{E_c}(\sigma_1 - \sigma_2)_c \qquad (3\cdot3\cdot10)$$

被膜が下地材料の表面に完全に附着し、正確に下地材料のヒズミ状態に従うものと考えれば、（$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$）$_M$ =（$\sigma_1 - \sigma_2$）・（$1+\nu_c$）/E_c であるから、つぎの関係をうる。

$$\frac{1+\nu_x}{E_x}\sigma_{1M} - \frac{1+\nu_y}{E_y}\sigma_{2M} = \frac{1+\nu_c}{E_c}(\sigma_1 - \sigma_2)_c \qquad (3\cdot3\cdot11)$$

しかるに光弾性縞次数Nと主応力差との関係は（3・3・5）式で与えられるから、上式はつぎのように書ける。

$$\frac{1+\nu_x}{E_x}\sigma_{1_M}-\frac{1+\nu_y}{E_y}\sigma_{2_M}=\frac{N}{2tK} \qquad (3\cdot3\cdot12)$$

ここに

$$K=\alpha\frac{E_c}{1+\nu_c} \qquad (3\cdot3\cdot13)$$

もし自由境界において、それの切線方向が異方性の弾性主軸（対称軸）の一方と平行するときには、主応力の一方 σ_{1_M} あるいは σ_{2_M} が零になる。しかるときは周辺応力 σ_{1_M}（$\sigma_{2_M}=0$ の場合）は被膜における縞次数 N から次式によつて求まる。

$$\sigma_{1M}=\frac{\dfrac{E_x}{1+\nu_x}}{2\alpha K}N=\frac{E_x(1+\nu_c)}{E_c(1+\nu_x)}\cdot\frac{N}{2t\alpha} \qquad (3\cdot3\cdot14)$$

つぎに一般に下地材料に生ずる主応力の方向が異方性の対称軸（弾性主軸）と傾斜している場合を考える。いま主応力 σ_1 の方向が x 軸から φ だけ回転した方向にあるものとする（図－3・3・1）。しかるときは主ヒズミはつぎのように主応力（σ_1，σ_2）で与えられる。

$$\begin{aligned}
e_1&=\{a_{11}\cos^4\varphi+a_{22}\sin^4\varphi+(2a_{12}+a_{66})\cos^2\varphi\sin^2\varphi\}\sigma_1+[a_{12}+\{a_{11}+a_{22}-(2a_{12}+a_{66})\}\cos^2\varphi\sin^2\varphi]\sigma_2\\
&=\{\frac{1}{E_x}\cos^4\varphi+\frac{1}{E_y}\sin^4\varphi-(\frac{2\nu_x}{E_x}-\frac{1}{G_{xy}})\cos^2\varphi\sin^2\varphi\}\sigma_1\\
&\quad+[\frac{-\nu_x}{E_x}+\{\frac{1}{E_x}+\frac{1}{E_y}+(\frac{2\nu_x}{E_x}-\frac{1}{G_{xy}})\}\cos^2\varphi\sin^2\varphi]\sigma_2\\
e_2&=[a_{12}+\{a_{11}+a_{22}-(2a_{12}+a_{66})\}\cos^2\varphi\sin^2\varphi]\sigma_1+\{a_{11}\sin^4\varphi+a_{22}\cos^4\varphi+(2a_{12}+a_{66})\cos^2\varphi\sin^2\varphi\}\sigma_2\\
&=[-\frac{\nu_x}{E_x}+\{\frac{1}{E_x}+\frac{1}{E_y}+(\frac{2\nu_x}{E_x}-\frac{1}{G_{xy}})\}\cos^2\varphi\sin^2\varphi]\sigma_1\\
&\quad+\{\frac{1}{E_x}\sin^4\varphi+\frac{1}{E_y}\cos^4\varphi-(\frac{2\nu_x}{E_x}-\frac{1}{G_{xy}})\cos^2\varphi\sin^2\varphi\}\sigma_2
\end{aligned} \qquad (3\cdot3\cdot15)$$

したがつて下地材料の主ヒズミ差は

$$\begin{aligned}
(e_1-e_2)_M&=[\frac{1}{E_x}\{\cos^4\varphi-\cos^2\varphi\sin^2\varphi(1+4\nu_x)+\nu_x\}+\frac{1}{E_y}(\sin^4\varphi-\cos^2\varphi\sin^2\varphi)\\
&\quad+\frac{2}{G_{xy}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi]\sigma_{1M}-[\frac{1}{E_x}\{+\sin^4\varphi-\cos^2\varphi\sin^2\varphi(1+4\nu_x)+\nu_x\}\\
&\quad+\frac{1}{E_y}(+\cos^4\varphi-\cos^2\varphi\sin^2\varphi)+\frac{2}{G_{xy}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi]\sigma_{2M}
\end{aligned} \qquad (3\cdot3\cdot16)$$

とくに自由境界においては $\sigma_1=0$ あるいは $\sigma_2=0$ であるから、いま $\sigma_2=0$ とすれば、

$$\begin{aligned}
(e_1-e_2)_M&=[\frac{1}{E_x}\{\frac{1}{2}(1+2\nu_x)\cos^2 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\}-\frac{1}{E_y}\cdot\frac{(1-\cos 2\varphi)\cos 2\varphi}{2}\\
&\quad+\frac{1}{G_{xy}}\cdot\frac{\sin^2 2\varphi}{2}]\sigma_{1M}
\end{aligned} \qquad (3\cdot3\cdot17)$$

上式で与えられる下地材料の主ヒズミ差は光弾性被膜の主ヒズミ差（$\epsilon_1 - \epsilon_2$）$_C$ と等しくなることより、自由境界における主応力 σ_{1M}（$\sigma_{2M}=0$ の場合）は $\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{2\nu_x}{E_x}$ と仮定して次式のごとく光弾性縞次数より求められる。

$$\sigma_{1M} = \frac{1}{\{(1+2\nu_x)\cos^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi - \frac{1}{e}(1-\cos 2\varphi)\cos 2\varphi + (1+\frac{1}{e}+2\nu_x)\sin^2 2\varphi} \times \frac{\frac{N}{tK}}{E_x} \qquad (3\cdot3\cdot18)$$

ここに　$e = E_y / E_x$

上式で K は（3・3・13）式で与えられるものと同じである。したがって K，t は使用する被膜に対して定まる数であるから縞次数の測定値 N より自由境界における応力を求めることができる。いま $\nu_x=0.18$（実験に用いた模型に対する値）なる値を用いて（3・3・18）式より $\sigma_{1M}/(NE_x/tK)$ と e との関係を計算し、主応力の x 軸に対する傾き φ をパラメーターにとつて図示すると図−3・3・2のようになる。

3・2　　直交異方性材料および光弾性被膜材料

異方性材料としては母材に Epoxy 樹脂を用いその中に一方向の金属線（鋼線あるいは真鍮線）を規則正しく入れたものを使用した。いま図−3・3・3のごとき合成材（異方性材）の断面を考え、母材部分の弾性係数および断面積を E_1，A_1，金属線の弾性係数を E_2，その1本の断面積を a とする。合成材の全断面積 $A_0 = bd$ 中の金属線の数を n ケとし、$\alpha = E_{II}/E_I$ とおくと金属線に平行な方向（y 軸方向）が一つの弾性主軸になり、E_y はつぎのようになる。

$$E_x = E_I \left\{ 1 + \frac{na(\alpha-1)}{bd} \right\} \qquad (3\cdot3\cdot19)$$

したがって　$E_x = E_I$ 　　(3・3・20)

とみなすと、主弾性係数比 $e = E_y/E_x$ はつぎのように与えられる。

$$e = E_y/E_x = 1 + \frac{na(\alpha-1)}{bd} \qquad (3\cdot3\cdot21)$$

一方つぎのごとき異方性材料をつくり、実際にその実験片により測定を行つて主弾性係数 E_y を求めた。すなわち断面積 2.5 cm＋2.0 cm，長さ 21.0 cm の型枠内に直径 1 mm の鋼線をそれぞれ10本（5本2列），20本（10本2列），30本（10本3列）規則正しく配列し、さらにその中に Epoxy 樹脂を注入して合成材の試験片を成型した。この場合 $E_1 = 4.2\times10^4\ kg/cm^2$，$E_2 = 2.1\times10^6\ kg/cm^2$ であつて $\alpha = 50$ となつた。この値を用いそ（3・3・19）式より計算した E_y の値と、上記の試験片を用いて引張試験を行つて得た E_y の値を示せば表−3・3・1のようになる。表−3・3・1より判るように合成材の全断面積に対する金属線の全断面積の占める割合いが大きくないかぎり、（3・3・19）式あるいは（3・3・21）式を用いて合成材の弾性係数を見積ることができる。

つぎに図－3・3・3の断面図において金属線の z 方向の各列をそれらの面積と等しい帯状のものにおきかえ図－3・3・4のごとく考えると、ポアッソン比 ν_y はつぎのような式で与えられる。

$$\nu_y = \frac{t_{\mathrm{I}}\,\nu_{\mathrm{I}} + t_{\mathrm{II}}\,\nu_{\mathrm{II}}}{t_{\mathrm{I}} + t_{\mathrm{II}}} \qquad (3\cdot3\cdot22)$$

この式を用いて上記の3種の試験片に対するポアッソン比を計算するとつぎのようになる。
ただしこの場合 *Epoxy* 樹脂のポアッソン比は $\nu_1 = 0.35$ であり。鋼線のポアッソン比は $\nu_2 = 0.20$ である。また同時に実測によつて得たポアッソン比を記す（表－3・3・2）。ポアッソン比に関しても金属線数が全断面積に対してあまり大きくない限り、測定値と計算値はかなりよ

表－3・3・1

試験片	鋼線数(本)	E_y の値 kg/cm^2	
		測定値	計算値
No.1	10	7.24×10^4	7.36×10^4
No.2	20	1.059×10^4	1.066×10^4
No.3	30	1.743×10^4	1.411×10^5

表－3・3・2

試験片	鋼線数(本)	ν_y の値	
		測定値	計算値
No.1	10	0.368	0.366
No.2	20	0.357	0.361
No.3	30	0.294	0.359

く一致し、上記の計算によつて求めた ν_y の値を用いても応力状態にはあまり影響を及ぼさないものと思われる。また金属線が少ない場合には ν_y' は母材のポアッソン比とほとんど変らないことが判る。

さて実験に用いた異方性模型は $15\,cm\times15\,cm\times1.3\,cm$ の型枠内に成型された板より切り出された。
まず（3・3・21）式よりこの型枠断面に対する金属線の直径および本数と弾性係数比 $e = Ey/Ex$ の関係を求めておき、金属線として鋼および真鍮を用いて $e = 2, 4, 6$ になるように金属線を枠内に配置して、*Epoxy* 樹脂（*Type D*）を注入成型した。成型後の異方性材料を一辺 10 cm ～ 12 cm の正方形に仕上げ、その表面に錫箔および光弾性被膜を貼付し、それらの接着が充分完了した後中央に直径12 mm の孔をあけて円孔を有する異方性板の模型を作成した。

光弾性被膜法については河田が実物光彈性実験法として詳細に紹介し、その中で光弾性被膜材料として具備すべき性質について述べ、被膜材料として *epoxy-plysulfide* 系共重合体(通称 *epoxy rubber*)がかなりすぐれていることを指摘している。そしてこの *epoxy rubber* の特性についての研究結果が報告されている。著者は光弾性被膜材料として厚み 2 mm の *epoxy-rubber* を用い、その共重合比がつぎのごときものを用いた。

epoxy prepolymer (Araldite Type D)	100	
polysulfide (Tiokol)	50	重量比
diethylene triamine (D T A)	8	

河田氏の測定結果によると、この材料の諸性質はつぎのごとく与えられている。

歪感度 β(1/mm)	弾性係数 *E* (kg/mm2)		最大伸び *Emax*(%)	
$T=16.5°C$, $\lambda=5461 Å$	$T=18°C$	$T=11.5°C$	$T=18°C$	$T=11.5°C$
41.3	40	56	—	10

しかし *epoxy rubber* を光弾性被膜として実際に使用した結果、*epoxy-rubber* の弾性係数および光弾性常数(あるいはヒズミ感度)が温度によってかなり変化をうけること、および *Tiokol* の性質が製品によってかなり異ることなどにより、測定時における *epoxy rubber* の特性がはっきり定められず、円孔周辺の応力の絶対値を正確につかむには各試験片のそれぞれについて、測定時と同じ条件のもとで弾性係数および感度を測定することが必要であった。ここにおいて行った実験に対しては、実験に用いた同じ被膜と同じ材料を用いて測定時と同温のもとで光弾性常数を測定して $k=0.261$ cm/kg (11°C) を得た。また弾性係数は $E_c=5500$ kg/cm2 であった。

3・3　実験方法および反射式光弾性装置

上で述べたようにして作られた直交異方性平板より、水平方向に対して金属線の方向(大きい方の主弾性係数の方向)が 0°, 22.5°, 45°, 67.5°, 90° になるように、模型を 10 cm〜12 cm の正方形に切り出してその中央に12 mm ϕ の孔をあけて、所要の実験模型を作成した。それらの模型は島津式 30 *ton* アムスラー型万能試験機によって、上下縁に等分布荷重をかけられ、荷重時の光弾性応力縞は試作した反射式光弾性装置を用いて撮影された。

反射式光弾性装置として基本的には図ー3・3・5に示すような型式のものが考えられるが、著者は(*D*)の型式のものを使用した。反射式の装置としては、著者がここで用いたように実験室における測定だけでなく、今後光弾性被膜法の実物実験への適用の実用化を考えて、いわゆる実物光彈性実験にも使用できるように考えた。すなわち光源から模型までの間(偏光子部分)での光および、試験片表面で反射する自然光が、試験片から写真レンズまでの間(検光子部分)に入ってこないようにすること、したがって写真レンズに入る光は偏光子部分を通り試験片表面で反射して検

光子部分を通過してきた光のみに限定することが必要である。また装置の大きさおよび重量を小さくし、かつ測定視野をなるべく大きくするために、通常の光弾性装置にあるような集光レンズおよび視野レンズをできるだけ少なくし、光学系の全長を小さくすることやレンズ，偏光子，検光子，フイルター等の口径を大きくすることが必要である。なおこの場合入射光線束と反射光線束のなす角度によつて試験片の縁の陰による誤差が入るおそれがあるが、この角度を10°~15° 以内にとるようにすれば、この誤差はほとんど無視しうることが示されている。[36] このような点に留意して試作した反射式装置を示せば、図−3・3・6および写真−3・3・1のようである。

3・4　実験結果およびその考察

実験によつてえた等色線縞写真の2・3の例を示せば、写真−3・3・2（a）～（e）および写真−3・3・3（a）～（e）のようである。前者は真鍮線を用いた $E_2/E_1=2$ の模型に対するものであり、後者は鋼線および真鍮線を用いた $E_2/E_1=4$ の模型に対するものである。これらの等色線縞より円孔周縁の応力分布を求めると図−3・3・7（a）～（e）および図−3・3・8（a）～（e）のようである。円孔に沿う等色線縞の次数を読み取り、それを（3・3・18）式あるいは図−3・3・2に用いて応力値を算定するが、この場合 $E_x=4.2\times10^4$ kg/cm^2 $t\cdot K=149.2$ であつて、図−3・3・7は $e=2$ の場合、図−3・3・8は $e=4$ である。なお比較のために第2篇3・2で行つた理論計算結果も同時に示されている。これらの図より実験値と理論値と比較すれば、いずれの場合にも応力分布の傾向はまつたく類似しているが、一般に側壁の圧縮応力は両者ともかなりよく一致するのに対して、上下盤における引張応力はその大きさおよび引張応力の生ずる範囲ともにかなりの差異がある。そして側壁、上下盤における最大応力は実験値の方が理論値より小さくでる傾向にある。この両者の応力分布の差異を生ずる原因としては、いろいろのものが考えられる。すなわちまず理論計算では異方性材料のポアツソン比 ν_1 を $\nu_1=0$ と仮定しているのに反して、実験に用いた材料は $\nu_1=0.184$ であること、被膜材料の性質が温度に対して不安定であり、測定時の E_M, Ec, νc の値の正しい値をつかみにくく、したがつて応力解析に用いるべき実数 K の値に誤差が入つてくること、異方性材料の弾性係数として材料作成時の値を用い、またせん断弾性係数も近似値を用いて実際に作られた材料に対するそれらの測定値を用いていないことによる誤差が入つてくると、などが考えられる。したがつて図−3・3・8に示した実験値と理論値とは直接定量的な比較をすることは出来ないが、定性的に応力分布の傾向を比較することはできるであろう。なお図−3・3・8で補強材として鋼線を用いた場合と真鍮線を用いた場合の応力分布が比較されるが、時にはかなりの相違もみられるが、大体において両者よく一致していることが判る。

写真－3・3・1　反射式光弾性装置

(a) $\delta = 0°$
$p = 272.3\ kg/cm^2$

(b) $\delta = 22.5°$
$p = 308.9\ kg/cm^2$

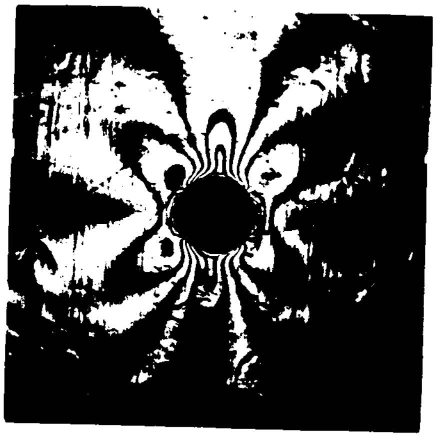
(c) $\delta = 45°$
$p = 269.7\ kg/cm^2$

(d) $\delta = 67.5°$
$p = 423.3\ kg/cm^2$

(e) $\delta = 90°$
$p = 426.0\ kg/cm^2$

写真-3·3·2　$E_2/E_1 = 2$

(a) $\delta = 0°$
$p = 267.6$ kg/cm²



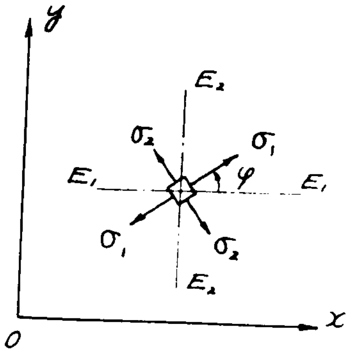
(b) $\delta = 22.5°$
$p = 269.4$ kg/cm²

(c) $\delta = 45°$
$p = 310.4$ kg/cm²

(d) $\delta = 67.5°$
$p = 383.8$ kg/cm²

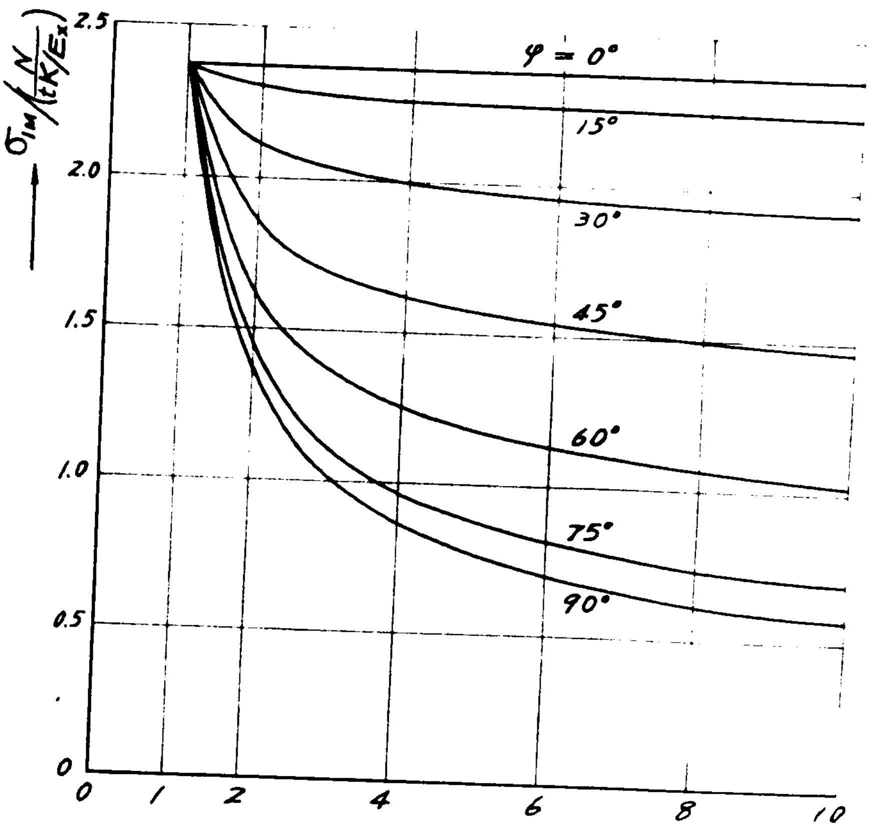
(e) $\delta = 90°$
$p = 543.3$ kg/cm²

写真-3.3.3　$E_2/E_1 = 4$



y
E₂
σ₂
σ₁
E₁
φ
E₁
σ₁
σ₂
E₂
0
x

図 - 3 · 3 · 1



$\sigma_{1M} \Big/ \left(\frac{N}{tK/E_x}\right)$
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
φ = 0°
15°
30°
45°
60°
75°
90°
0
1
2
4
6
8
10
e

図 - 3 · 3 · 2

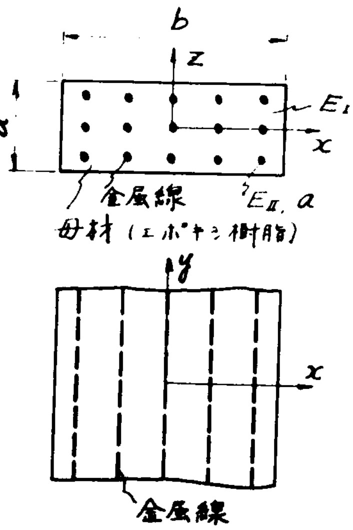


図-3.3.3

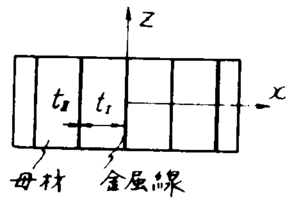
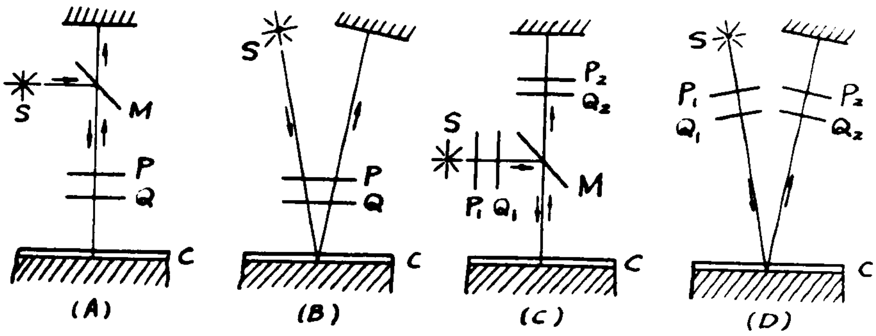


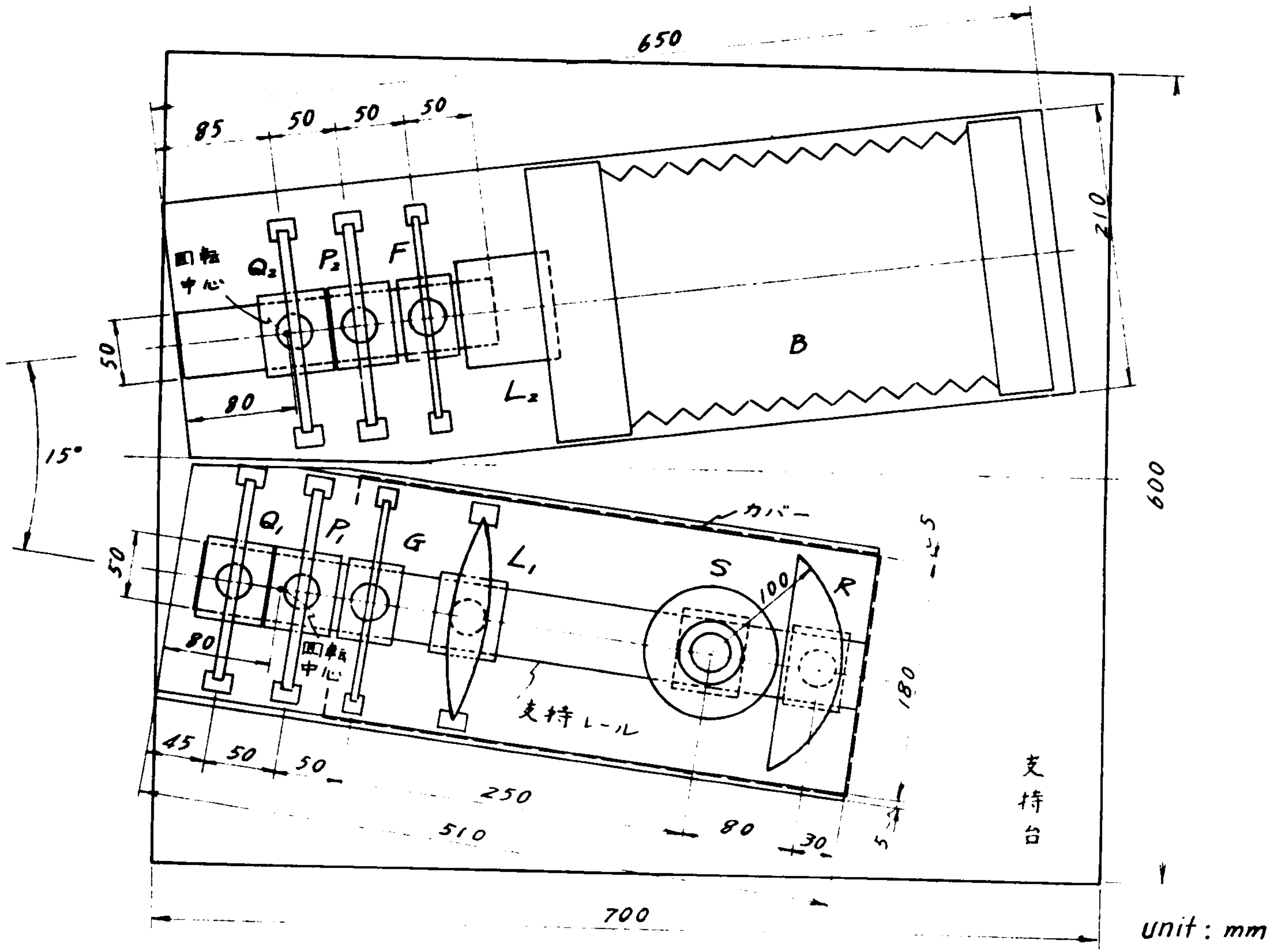
図-3.3.4



S：光源，　M：半塗銀鏡，　P_1, P_2：偏光板

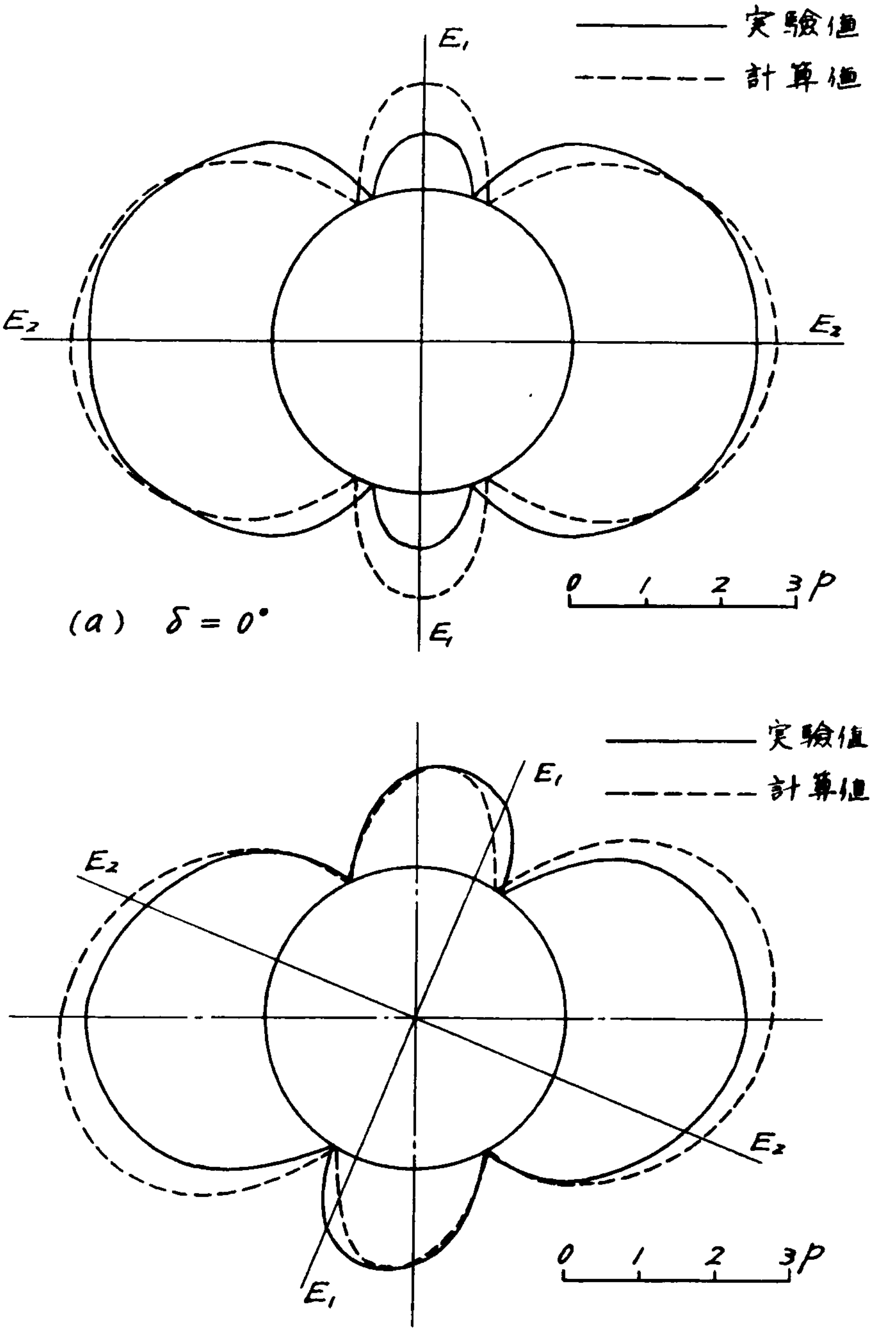
Q_1, Q_2：1/4 波長板，　C：光弾性被膜

図-3.3.5



S : 光源（超高圧水銀灯 SHL 100），　R : 反射鏡（曲率半径 10cm）
L_1 : 集光レンズ（$f=150$mm，ϕ150mm），　P_1，P_2 : 偏光板（ϕ150mm）
Q_1，Q_2 : 1/4 波長板（ϕ150mm），　G : 防熱ガラス（ϕ150mm），　F : フィルター（ϕ150mm）
L_2 : 写真レンズ（$f=300$mm，$F=4.5$），　B : 写真暗箱

図-3・3・6　反射式光弾性装置



(a) $\delta = 0°$

(b) $\delta = 22.5°$

図-3·3·7　$e = E_2/E_1 = 2.0$,　$tK = 149.2$

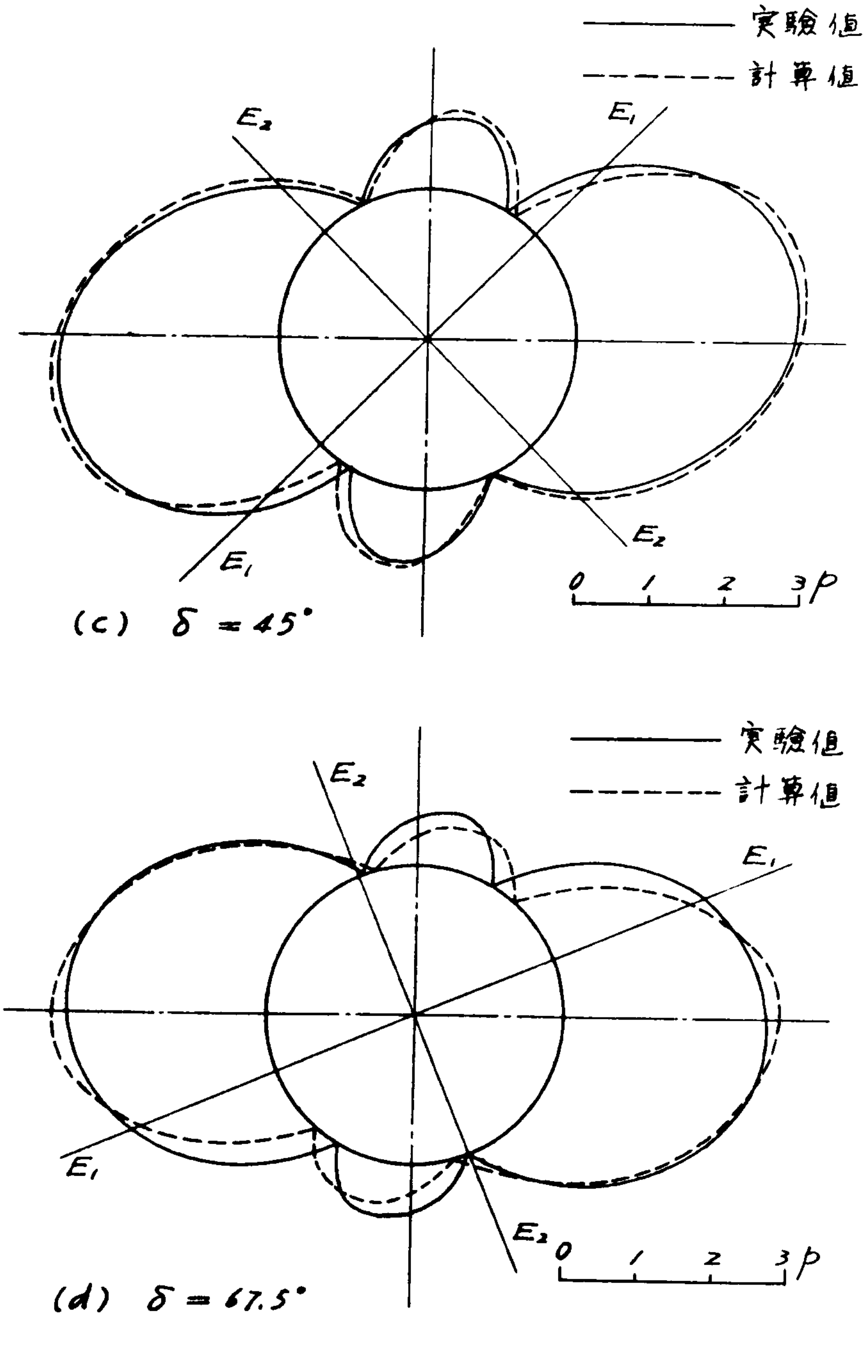
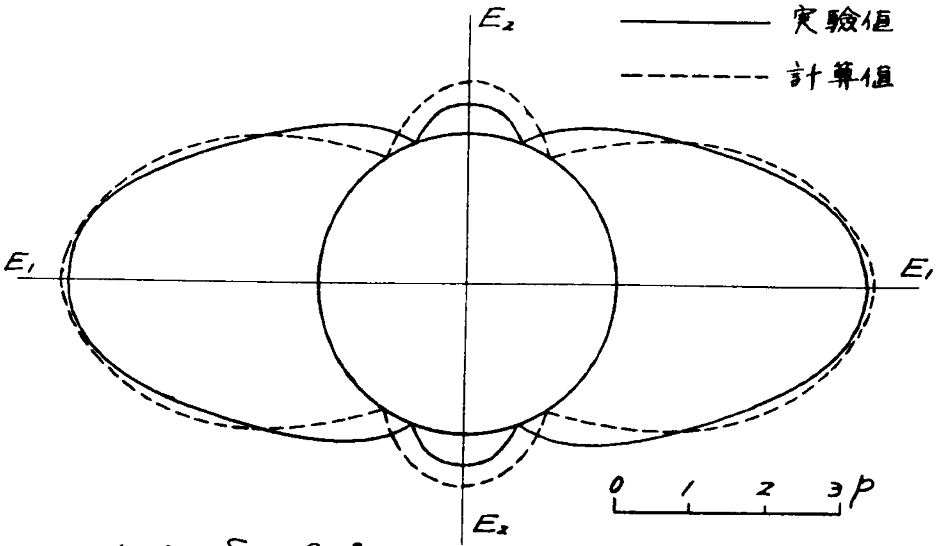


図-3・3・7　$e = E_2/E_1 = 2.0$，$tK = 149.2$



(e) $\delta = 90°$

図-3・3・7 $e = E_2/E_1 = 2.0$, $tK = 149.2$

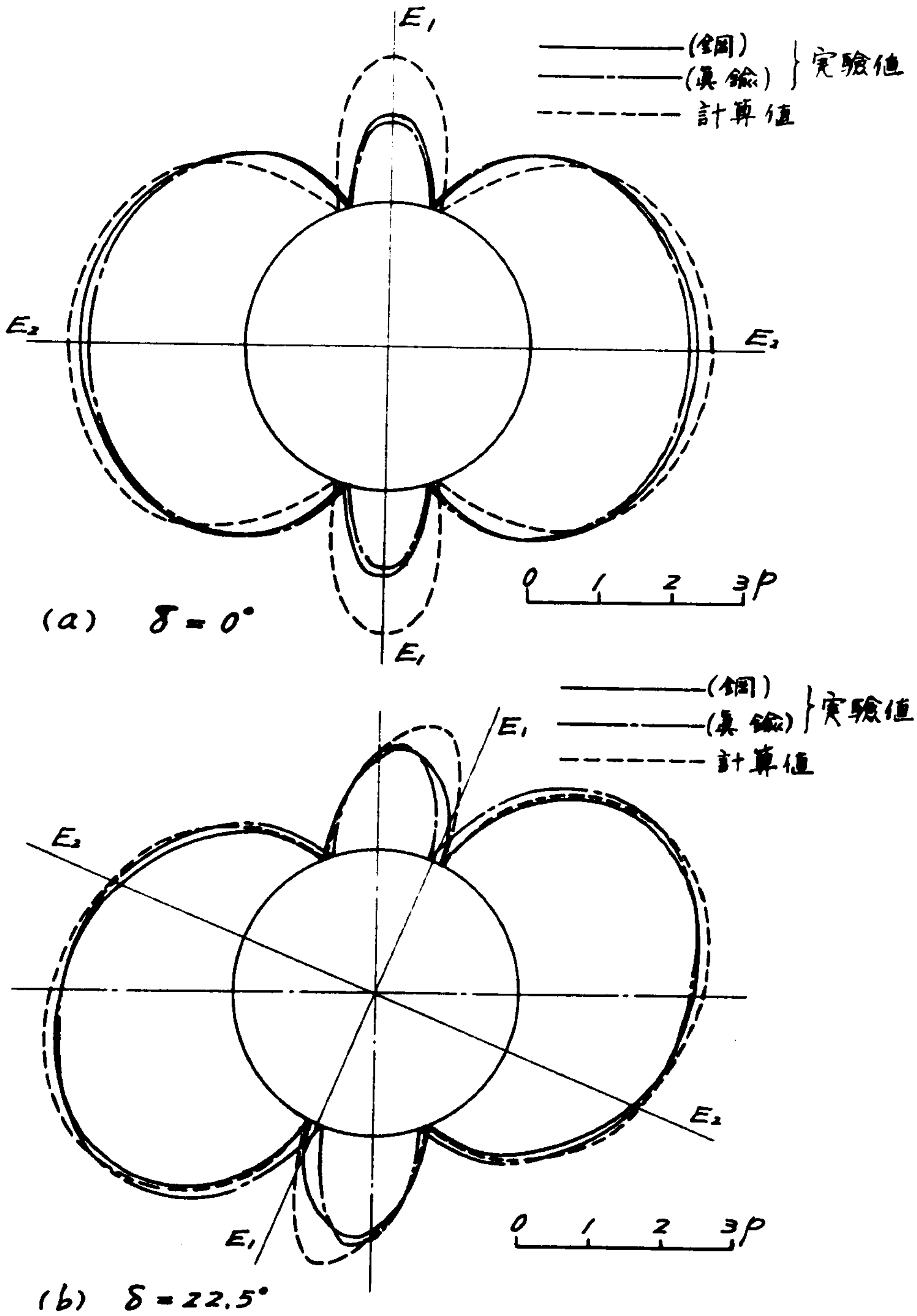
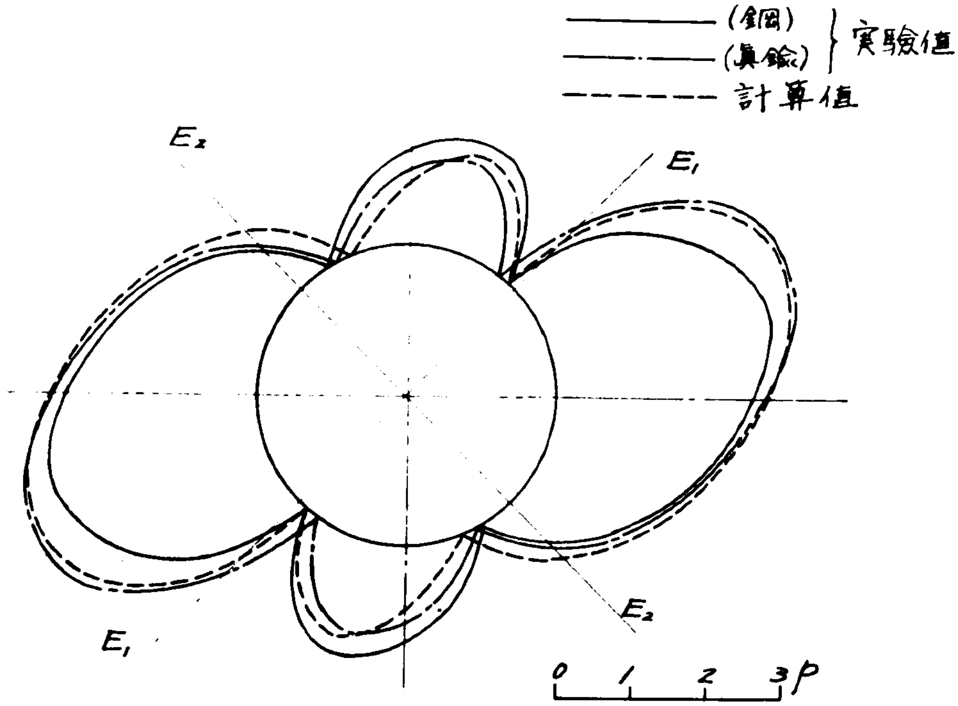
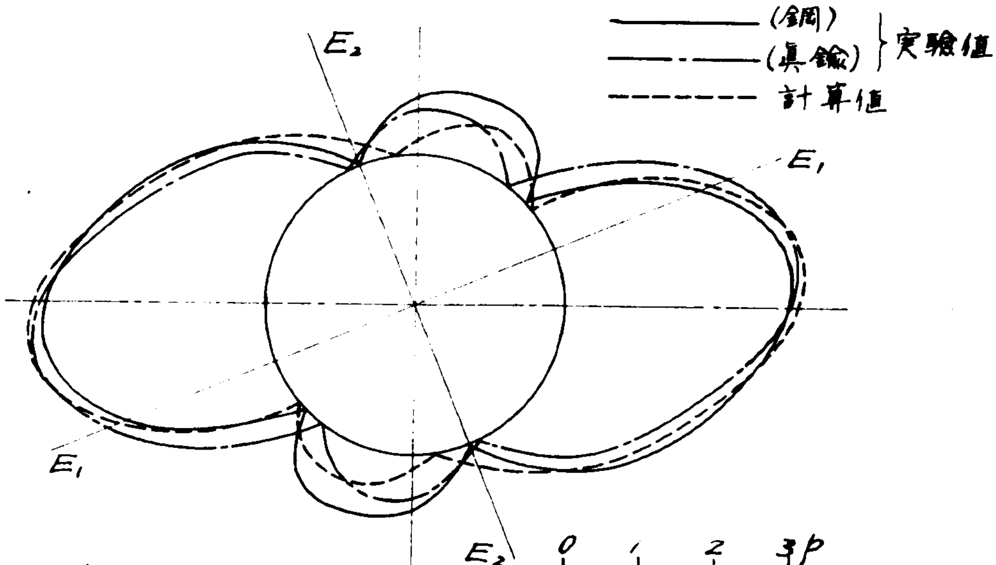


図-3·3·8　$e = E_2/E_1 = 4.0$,　$tK = 149.2$

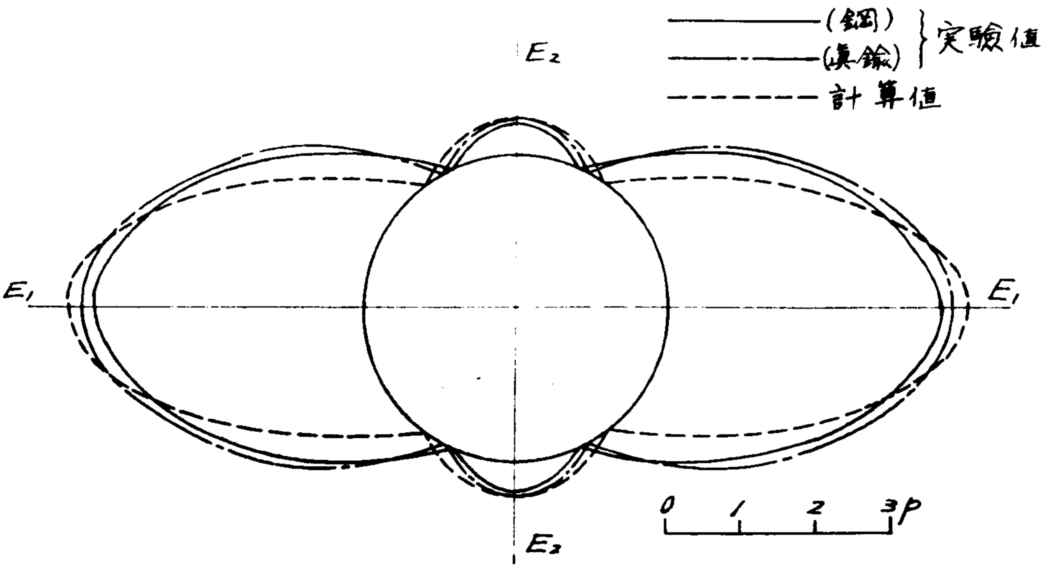


(c) $\delta = 45°$



(d) $\delta = 67.5°$

図-3・3・8 $e = E_2/E_1 = 4.0$, $tK = 149.2$



(e) $\delta = 90°$

図-3·3·8, $e = E_2/E_1 = 4.0$, $tK = 149.2$

才 4 章　層状地山中の坑道の周辺応力分布[37)]

層状地山における坑道周辺の応力分布に対しては、層間が充分に附着している場合と層間に摩擦のないような、極端な2つの場合について、第2篇第4章で理論的考察を行った。さらに坑道周辺に生ずる応力集中(応力攪乱)の拡散に及ぼす中間層の弾性性質およびその厚さの影響についても論じた。その結果理論的に導かれた応力式は、層の厚さが坑道の大きさに比して小さいときには、層の厚さに無関係に成立することが考えられているが、実際に層の厚さが坑道の大きさに対していかなる大きさまでこの理論的な応力式が近似的に成立するかが問題である。この点について明らかにするために、まず同一種類の層が附着していない場合に対してつぎのような方法で光弾性実験を行った。

層状地山中の坑道応力を対象にした光弾性実験は G . *Sonntag*[38)] によつて行われている。彼は光弾性材料で作られた同一種類層を多数積み重ね、それら各層間に塗油したり、薄い軟かい物質を挿入したり、あるいは層間を摩擦の大きい状態にしたりして層状板を作り、それに円形孔および正方形孔をあけて実験を行っているが、等色線写真の縞模様を見較べることにより、上盤と下盤における曲げによる引張応力と、この曲げ応力が地山の内部にいかに伝播されるかということを定性的に調べているにすぎない。

著者もエポキシ樹脂(*Type B*)を用いて層を作り、中間層としてはエポキシ・ラバー(第3章参照)を用いて、種々の弾性係数の層を数種の厚みに変化させたものに作つて、中間層を含む層状地山の模型について応力集中伝播(拡散)の状態を光弾性的に調べたが、攪乱応力集中の消滅に及ぼす中間層の影響は、第1篇で述べた理論的な結果とまつたく同一の傾向をもつことが明らかにされた。実験結果の2・3の例を示せば写真—3・4・1～3・4・4のようであり、中間層の硬さの程度および層間附着のいかんによつて、第一層の応力集中の程度と応力集中度がいかに各層に伝わつて行くかが明らかにされる。

さて上に述べたような各種の中間層を含む層状地山の模型に対して、坑道周辺応力分布を求めるべきであるが、こゝではまず中間層を含まない場合に対して、層の厚さが坑道応力にいかなる影響を及ぼすかを明らかにするための実験を行った。この結果より、坑道の大きさに対して層の厚さがいかなる程度に小さければ、さきの理論式が適用できるかを明らかにした。この結果は中間層を含む場合に対しても適用出来るから、実験は同一種類の層の場合にとどめた。

つぎにゼラチン模型を用いて、地山の自重が作用する場合に対応した光弾性実験を行い、円形坑道および正方形坑道の周辺応力状態および坑道の変形状態を、地山が等方等質の場合、坑道上部のみが水平積層状の場合、地山全体が水平積層状の場合に対して求めた。

4・1　エポキシ樹脂模型による光弾性実験

この実験は図ー3・4・1のような各層の厚さを持ったEpoxy樹脂（アラルダイト・タイプB）の水平積層中に円形および正方形の坑道を穿つて、上下方向に等分布荷重を加えたもので、この場合には層間に摩擦がいくぶん存在するから、完全に摩擦を受けないような状態にはならない。この場合の等色線写真を示すと写真ー3・4・5(a)(b)(c)(d)(e)および写真3・4・6(a)(b)(c)(d)(e)のようである。坑道の直径あるいは巾をdとし層厚をhとして、それぞれの層厚に対して光弾性実験からえた等色線縞写真より上盤A、下盤A'および側壁B，B'各点における坑道周辺応力を求めて表示すれば表ー3・4・1のようになる。この場合実験における荷重状態や各層間の接触および摩擦の影響のため、上下盤あるいは左右両側壁でわずかに異なる縞模様を与えているものもあるが、これらはいづれも平均を取つて示されている。

表ー3・4・1

h(mm)	h/d	円形断面坑道		正方形断面坑道	
		σ_A/p	σ_B/p	σ_A/p	σ_B/p
∞	∞	0.96	2.86	0.84	1.86
12	0.500	0.92	3.00	0.97	1.95
8	0.333	1.01	3.30	1.17	2.00
6	0.250	1.50	4.50	1.59	2.10
4	0.167	1.68	5.40	1.53	2.55
3	0.125	1.72	5.40	1.65	2.55

なお、さきの理論式では円形坑道の上下盤においては$\sigma_A = 3p$であるのに対して上の実験結果では層厚が減少するにつれてσ_Aは増加し$h/d<0.25$になると、すなわち層の厚みが坑道直径の1/4以下になるとほゞ実験値は理論値に近ずくことが判る。実験の都合上各層間の摩擦を完全に0にすることは不可能であるから、上の実験値には各層間の摩擦の影響が入つて来ていることを考慮すれば、上で述べた理論式は$h/d<0.25$の場合にはかなりよく実験値と合うと思われる。したがつて層厚が坑道直径または坑道巾の1/4以下の薄い層より成る地山の場合に対して理論式を適用することが出来よう。

側壁の応力はこの場合理論的には取扱われないが、実験の結果よりして層の厚さが減少するにつれて増大することが判る。また同じ巾を有する坑道では上下盤の引張応力は円形および正方形とも同じ程度の大きさであるが側壁の圧縮応力は円形の方が正方形の場合よりかなり大きくなる。

なお表3・4・1で$h/d=\infty$は岩盤が等方等質の弾性体である場合であつて、理論解によれば円形坑道では$\sigma_A=+p$，$\sigma_B=-3p$が、また正方形坑道では$\sigma_A=+0.84p$，$\sigma_B=-1.5p$が与えられている。

4・2　ゼラチン模型による光弾性実験

光弾性材料としてゼラチンを用いる場合の特徴としては光弾は感度が高いことや、また自重による坑道応力の実験が可能であり、さらに変形が大きいため坑道の変形状態の傾向を知ることができることなどがあげられるが反面にこの変形のために実験上若干の不都合を生ずる。実験は厚さ20cm 巾40cm 高さ60cm の枠の両側にアクリル酸樹脂製の矩形板をボルトで取り付け、この中に液状ゼラチンを注入し、冷却硬化させたものを用いた。この場合のゼラチンゼリーの性質は、ゼラチン：グリセリン：水の配合比が10：5：85 で、光弾性感度 $k = 1.50\ cm/g$，弾性係数 $E = 3.0\times10^{-2}\ g/cm^2$ である。

実験はこのゼラチンゼリーを用いてまず基礎的な傾向を知るため円形および正方形断面坑道の周辺応力状態を考察し、つぎにゼラチン模型に切り目を入れることにより地山が積層状である場合の坑道応力の変化状態および変形の傾向について考察を行った。実験方法はつぎのようである。ゼラチン液を枠内に注入後、充分に気泡を排出してから枠を水平面上に横に置いて膠化させ、充分に膠化した後にアルリル酸樹脂の板を片面のみ取りはずして、ゼラチンに円孔または正方形孔をあける。その後アルリル酸樹脂板を取りつけ、充分に締めつけてから模型を立て通常の2次元光弾性装置で等色線縞の撮影を行つた。

(1)等方等質の地山内の円形および正方形坑道

この場合についての実験結果の一部を示せば写真－3・4・7および3・4・8のとおりであり、写真3・4・7は平面ヒズミ状態、写真－3・4・8は平面応力状態における円形坑道の等色線縞写真である。この場合ゼラチンゼリーのポアツソン比 ν はほとんど0.5 に近い値をとるから、平面ヒズミ状態では坑道模型にかゝる鉛道方向地圧 p と水平方向地圧 q は等しくなり、$p = q = \gamma h$ となる（ただし γ：ゼラチン密度，h：ゼラチンの上表面より坑道中心までの深さ）。また平面応力状態では $p：q = 2：1$ となり、$p = \gamma h$，$q = 1/2\gamma h$ である。

さてこれらの実験によつて得られた等色線縞写真より各坑道の上下盤（σ_t，σ_b）左右の側壁（σ_w及び$\sigma_{w'}$）の応力値を算出すれば、表－3・4・2の通りであり、また比較のために有孔無限板としての理論計算値も同様に示す。

表－3・4・2より平面ヒズミ状態では実験値をみれば明らかなようにいくぶん平面に垂直方向に変位する傾向があるので、完全には平面ヒズミ状態にはならず、したがつて側壁部の応力が上下盤より大きくなつて来る。実験値と計算値と比較すれば平面ヒズミ状態ではよく一致しているが平面応力状態ではかなり異る。

表－3・4・2

		平面ヒズミ状態				平面応力状態			
		σ_t/p	σ_b/p	σ_w/p	$\sigma_{w'}/p$	σ_t/p	σ_b/p	σ_w/p	$\sigma_{w'}/p$
実験値	円　形断面坑道	1.88	1.82	1.98	1.98	0.93	0.90	2.21	2.26
	正方形断面坑道	0.68	0.62	0.81	0.76	0.22	0.22	1.32	1.26
計算値	円　形断面坑道	2.00	2.00	2.00	2.00	0.50	0.50	2.50	2.50
	正方形断面坑道	0.66	0.66	0.66	0.66	−0.09	−0.09	1.08	1.08

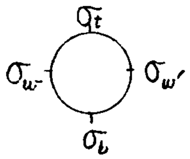
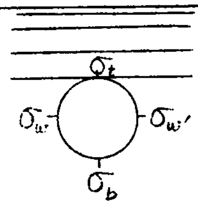
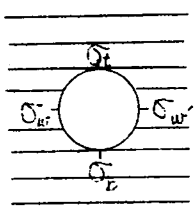
この差異は実験上完全な平面応力状態にならず、水平方向地圧が $q = 0.5p \sim p$ の間の値をとるためと思われる。したがつて円形坑道では上下盤の応力が増し側壁応力が減少する結果となる。また正方形坑道でも理論値では上下盤に僅かな引張応力を生ずるのに実験値では圧縮応力を生じている。つぎにこれらの場合における変形状態を示すと図－3・4・2のようである。

(2) 水平な積層状をなす地山内の坑道

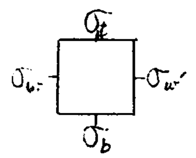
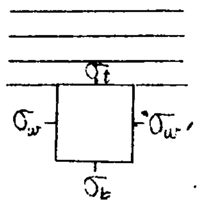
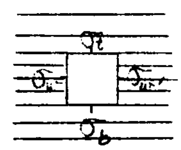
実験は円形および正方形坑道について(i)等質等方の地山 (ii) 上盤のみが積層地山 (iii)地山全体が積層状態の3つの場合について、それぞれ平面ヒズミ状態、平面応力状態の2つについて考察した。なおこの場合の層の厚さは坑道の高さの1/4である。等色線写真の一部を示せば写真－3・4・9および3・4・10のようであり、これらの写真より求めた坑道各点における応力は表－3・4・3および表－3・4・4のとおりである。

まず表－3・4・3より円形坑道の場合についてみれば、等質等方の場合にはさきの実験結果

表－3・4　円形断面坑道

地山状態	平面ヒズミ状態		平面応力状態	
	σ_t/p	1.85	σ_t/p	0.89
	σ_b/p	1.80	σ_b/p	0.89
	σ_w/p	1.97	σ_w/p	2.17
	$\sigma_{w'}/p$	1.97	$\sigma_{w'}/p$	2.17
	σ_t/p	−0.01	σ_t/p	−0.11
	σ_b/p	1.84	σ_b/p	1.18
	σ_w/p	2.47	σ_w/p	2.53
	$\sigma_{w'}/p$	2.42	$\sigma_{w'}/p$	2.53
	σ_t/p	−0.16	σ_t/p	−0.22
	σ_b/p	−0.16	σ_b/p	−0.11
	σ_w/p	—	σ_w/p	—
	$\sigma_{w'}/p$	—	$\sigma_{w'}/p$	—

表ー3・4・4

地山状態	平面ヒズミ状態		平面応力状態	
	σ_t/p	0.39	σ_t/p	0.86
	σ_b/p	0.39	σ_b/p	0.90
	σ_w/p	0.47	σ_w/p	0.90
	$\sigma_{w'}/p$	0.47	$\sigma_{w'}/p$	0.99
	σ_t/p	−0.26	σ_t/p	−0.28
	σ_b/p	0.26	σ_b/p	−0.06
	σ_w/p	0.69	σ_w/p	−1.22
	$\sigma_{w'}/p$	0.69	$\sigma_{w'}/p$	1.27
	σ_t/p	−0.29	σ_t/p	−0.33
	σ_b/p	−0.08	σ_b/p	−0.36
	σ_w/p	−	σ_w/p	−
	$\sigma_{w'}/p$	−	$\sigma_{w'}/p$	−

とほゞ同じ値を示している。上盤側のみが層状をなすような地山の場合には上盤のみ引張応力を生ずる。また下盤の圧縮応力は僅かに増加するのに対して側壁の応力はかなり増大する。これは層状の部分の変形が容易になり、上盤の層がそれぞれ梁のように作用し、最初の層より順次坑道空間の方に変位するごとく撓むため、その部分の荷重が、坑道に向って集中する傾向を生ずるからであろう。この場合平面応力状態の方が層間の滑りが大きく、したがつて変形が大きいこと、および側方からの盤圧が小さいために平面ヒズミ状態の時よりも側壁応力は大きい。つぎに全体が層状の場合には周辺地山の坑道空間への張り出しが著しくなり、坑道はもはや円形あるいは楕円形を保持しえなくなる。この場合の上下盤における応力は平面ヒズミ状態では引張り、下盤は圧縮応力となるが平面応力状態では両方とも引張応力を増大する。このような差異を生ずるのは上下盤の最初の層が大きく張り出して梁のように曲げ応力を受け、したがつて坑道周辺に引張り応力を生ずるがそれとともに側方からの地圧を受けて圧縮応力を生ずるために引張応力が相殺され、その程度が側圧の大きさによつて影響されるためである。また写真3・4・9より判るように上下盤の層とも坑道に接した層が一番変形が大きく、したがつて曲げのために大きい引張応力を生ずるように思われるが実際は図ー3・4・3のように水平方向盤圧のために引張応力は減少し、そのかわりに第1層と第2層の間における圧縮応力が大きくなり、坑道天盤の引張応力による坑道の破壊よりもむしろ第1層の内部における圧縮破壊によつて第1層が落ち、つづいて第2層が第1層と同様の状態となつて落ち、ついには坑道が破壊されるものと思われる。全体に層状となつた場合の上下盤の引張応力が上盤側のみ層状の場合のそれらとあまり変らないのは前者で

は側壁の引出しが著るしく、その変形が容易なため上下盤の応力が吸収緩和されるためと考えられる。したがつて逆に側壁の応力は著しく集中し、局部的な圧潰を生ずる恐れがある。この場合の変形状態を図示すれば図－３・４・４のようになる。つぎに正方形断面坑道の場合は表３・４・４より判るように地山が層状になつたための応力値に及ぼす影響はさきの円形坑道の場合と同様であつて、とくに第１層を梁とみなした時の支点間隔が大きくなるため各層の曲げ変形が大きくなり、したがつて引張応力が増大している。しかし通常坑道の上盤における引張応力を算定するために用いられている梁理論による応力値よりはかなり低い値である。従来より行われている計算においては第１層を梁とみなした時の支点間隔は坑道巾を取り、上から落ちてくる免圧帯内の岩石が等分布にしてかかるような単純梁あるいは固定梁として取扱つている。したがつてこの場合には上盤における引張応力はかなり大きくなる。しかし上の実験でも判るように各層は単に曲げを受けるだけでなく側方からの地圧によつて引張応力が軽減される傾向にある。写真３・４・10より明らかなように、中立軸は坑道中心に寄り、上盤の引張応力が小さくなつているのに対し、第１層内部と第２層との境界においてかなり高い圧縮応力を生じる。このことは円形坑道について述べた通りであるが、この傾向は円形坑道の場合より小さい。それは層の支持される巾が大きくなつて曲げ応力が大きくなること、坑道の側壁が直線であるため、側壁岩盤が層状である場合その部分の応力集中は円形坑道に比して小さく、またその部分の変形が小さいことなどの原因によるものと考えられる。この場合の坑道の変形状態は図－３・４・５のようである。

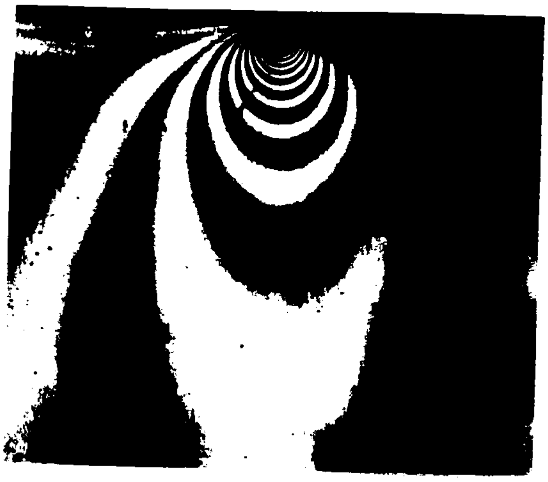


写真-3·4·1　等方等質弾性地山の場合
P = 80.7 Kg

写真-3·4·2　同一種類の層状地山の場合
P = 79.3 Kg

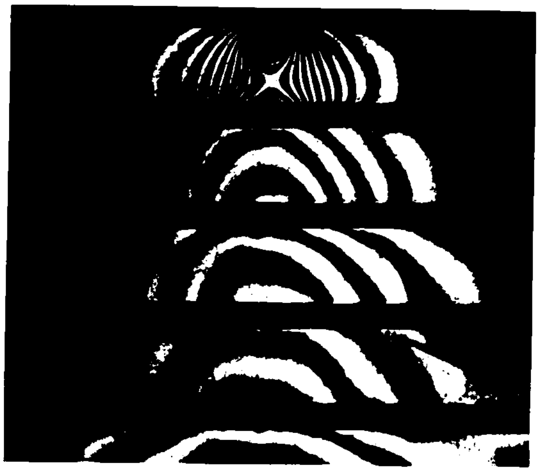


写真 - 3·4·3 (a)

$\alpha = h_{II}/h_{I} = 0.3$, $\beta = E_{II}/E_{I} = 0.243$

$P = 80.8$ kg

写真 - 3·4·3 (b)

$\alpha = 0.3$, $\beta = 0.133$

$P = 78.8$ kg

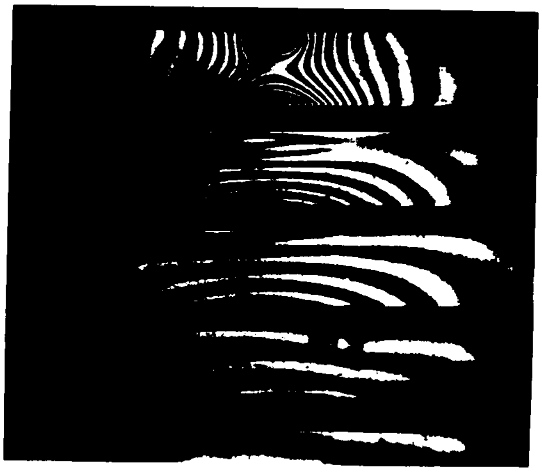


写真 - 3·4·3 (c)

$\alpha = 0.3$, $\beta = 0.071$

$P = 78.1$ kg

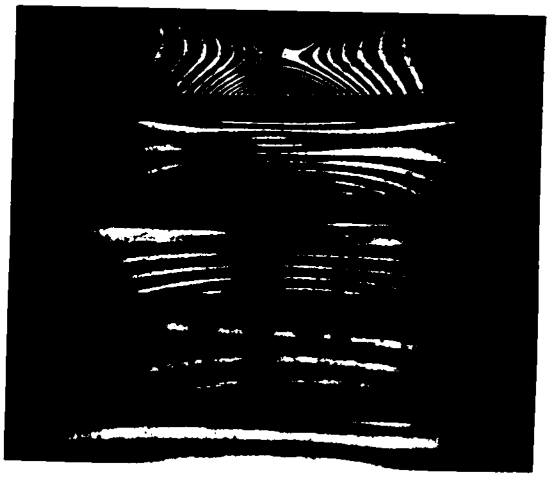


写真 - 3·4·3 (d)

$\alpha = 0.3$, $\beta = 0.014$

$P = 81.3$ kg

写真 - 3・4・4 (a)

$\alpha = h_{II}/h_I = 0.6$, $\beta = E_{II}/E_I = 0.243$

$P = 79.5$ kg

写真 - 3・4・4 (b)

$\alpha = 0.6$, $\beta = 0.133$

$P = 78.2$ kg

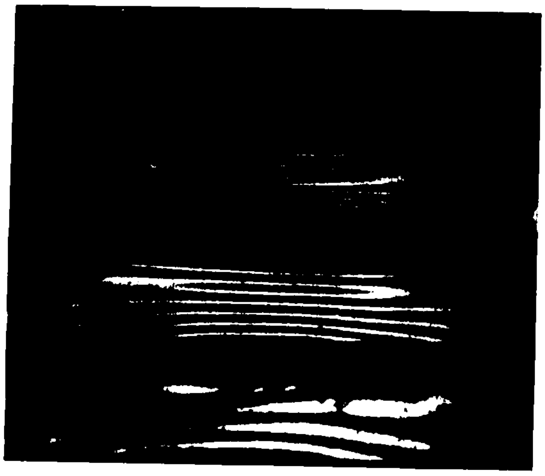


写真 - 3・4・4 (c)

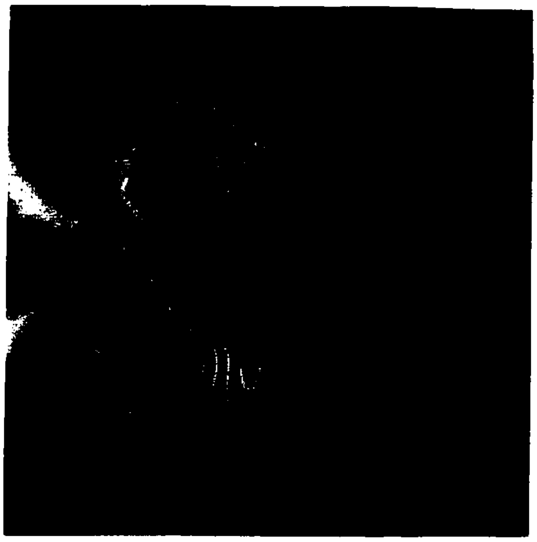
$\alpha = 0.6$, $\beta = 0.071$

$P = 78.8$ kg

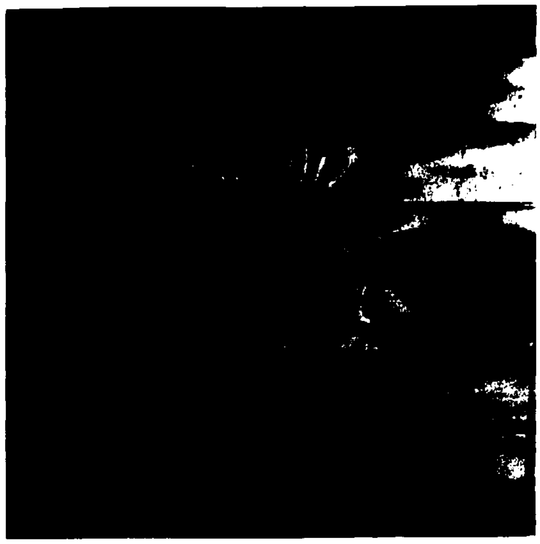
写真 - 3・4・4 (d)

$\alpha = 0.6$, $\beta = 0.014$

$P = 77.7$ kg

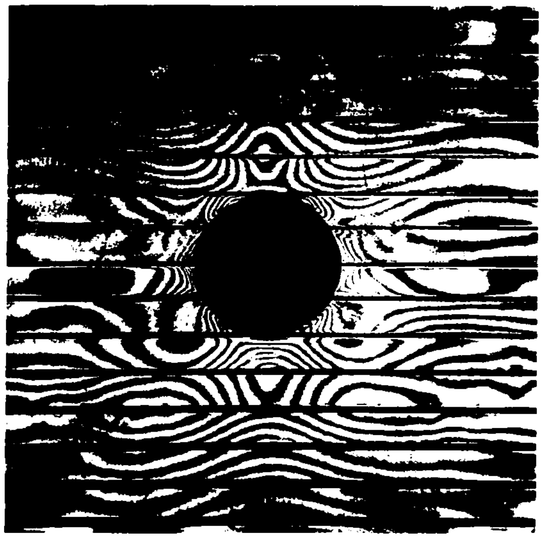


(a) $h/d = \infty$, $p = 0.83$ kg/cm

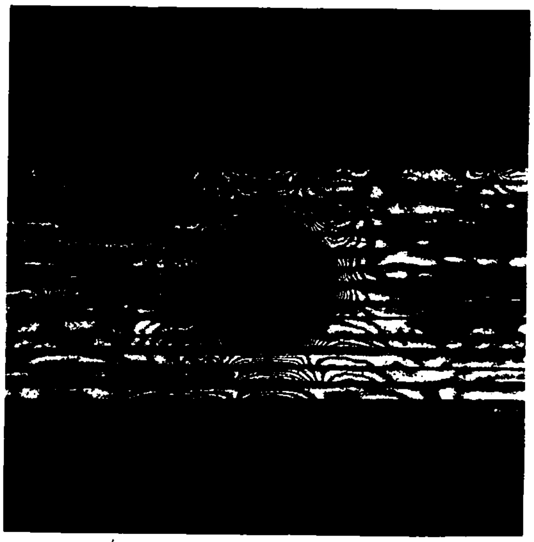


(b) $h/d = 0.500$, $p = 0.83$ kg/cm

(c) $h/d = 0.333$, $p = 0.83$ kg/cm

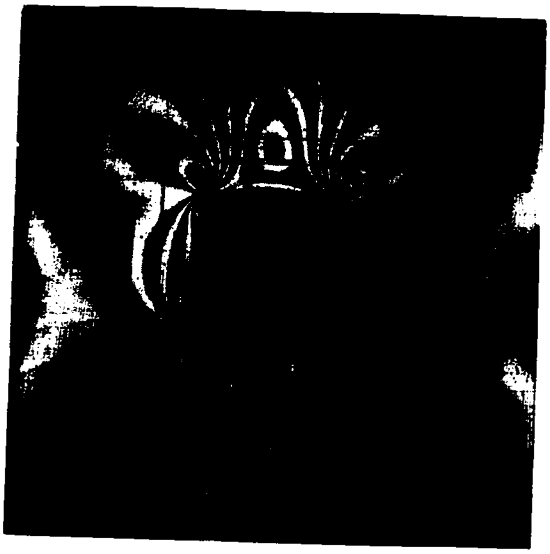


(d) $h/d = 0.250$, $p = 0.83$ kg/cm



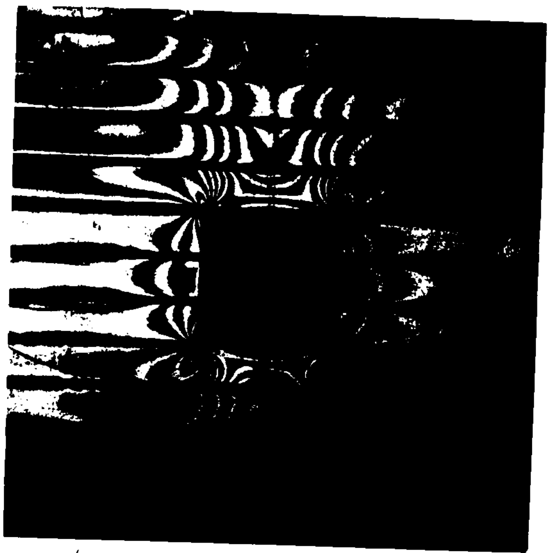
(e) $h/d = 0.125$, $p = 0.83$ kg/cm

写真 - 3・4・5



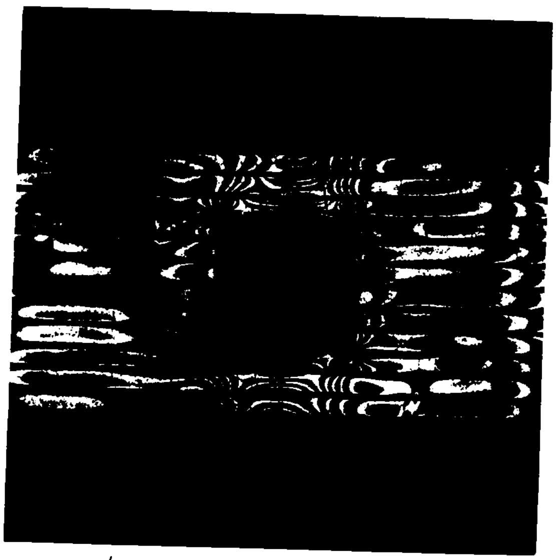
(a) $h/d = \infty$, $p = 0.83$ kg/cm

(b) $h/d = 0.500$. $p = 0.83$ kg/cm



(c) $h/d = 0.333$. $p = 0.83$ kg/cm

(d) $h/d = 0.250$. $p = 0.833$ kg/cm



(e) $h/d = 0.167$. $p = 0.833$ kg/cm

写真 3.4.6

写真-3·4·7　平面ヒズミ状態
$p = 28.0\ gr/cm^2$

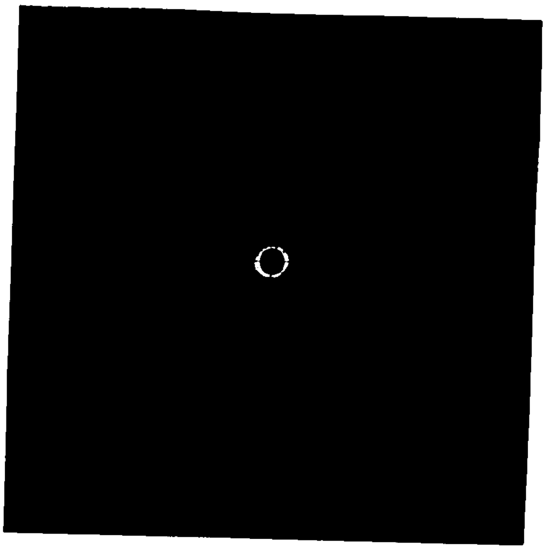
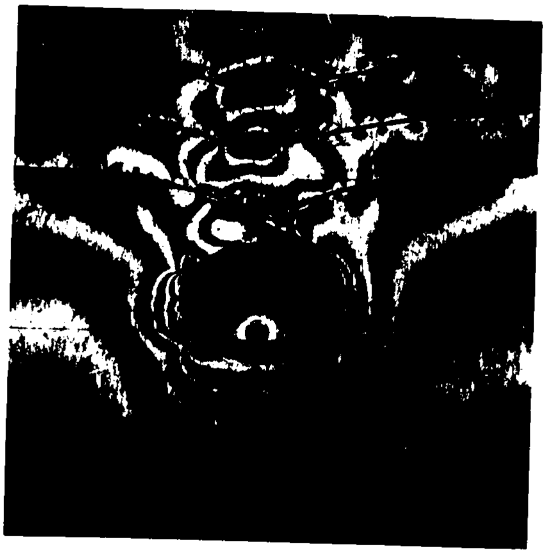


写真-3·4·8　平面応力状態
$p = 26.8\ gr/cm^2$

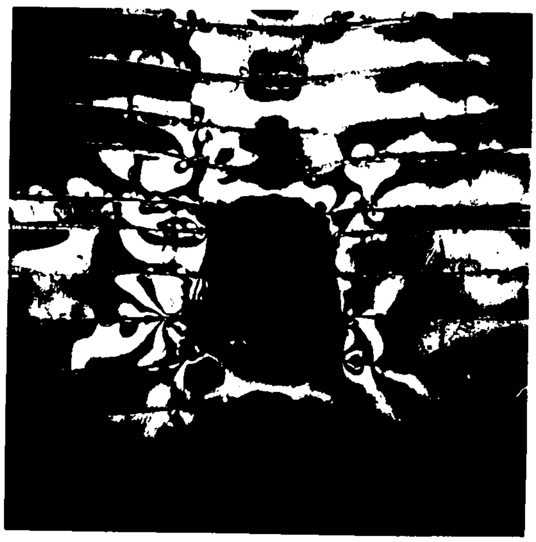


(a) $h/d = 1/4$, $p = 28.4\ \mathrm{gr/cm^2}$

(b) $h/d = 1/4$, $p = 26.7\ \mathrm{gr/cm^2}$

写真-3・4・9　円形坑道（平面ヒズミ状態）

(a) $h/d = 1/4$, $p = 27.0\ \mathrm{gr/cm^2}$



(b) $h/d = 1/4$, $p = 27.0\ \mathrm{gr/cm^2}$

写真-3・4・10　正方形坑道（平面応力状態）

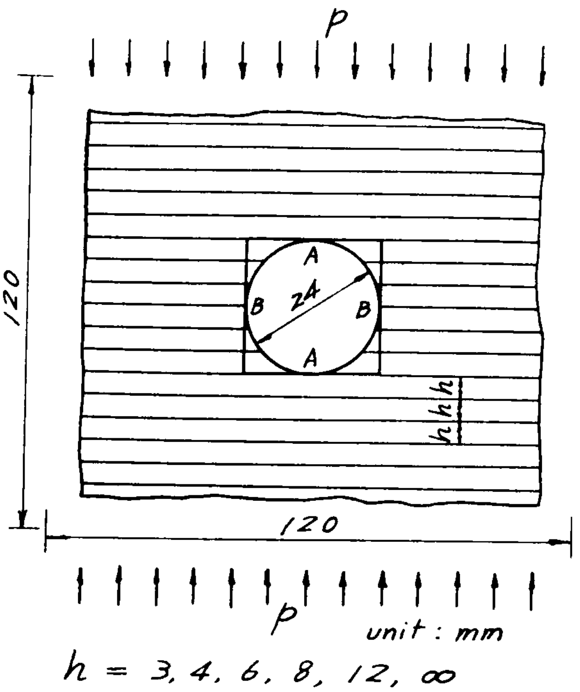


図-3・4・1

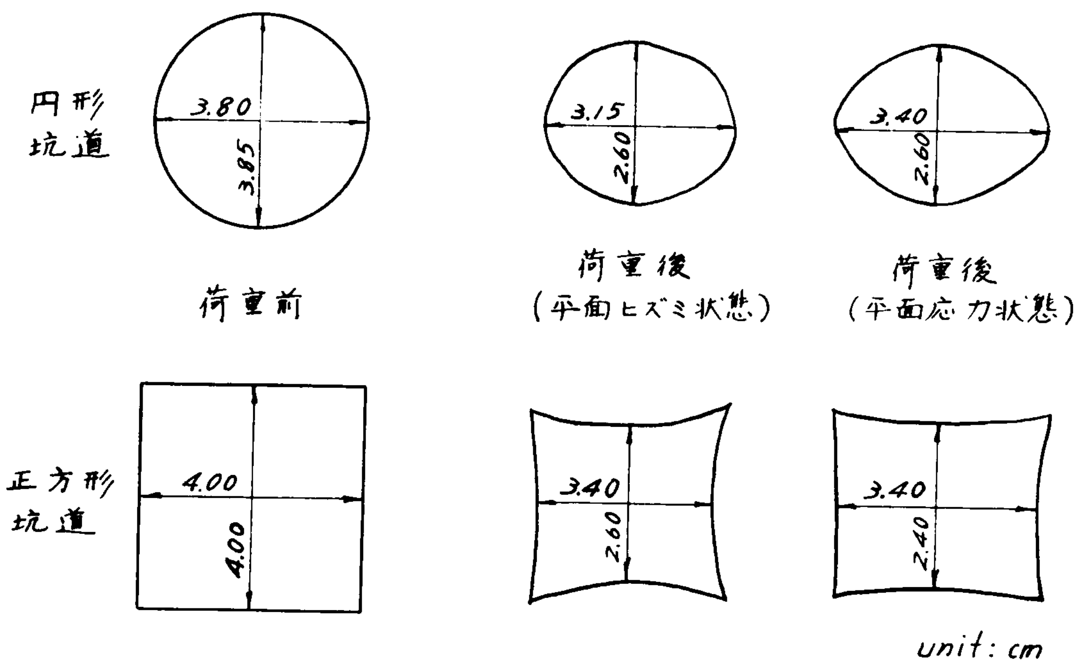


図-3・4・2　坑道の変形

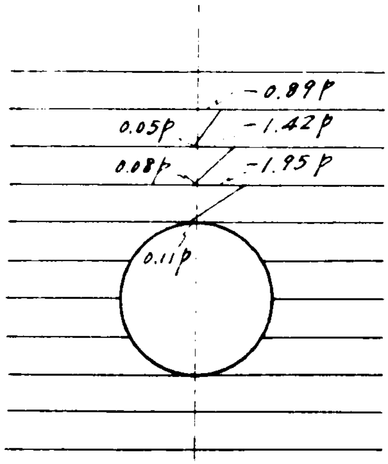


図-3・4・3

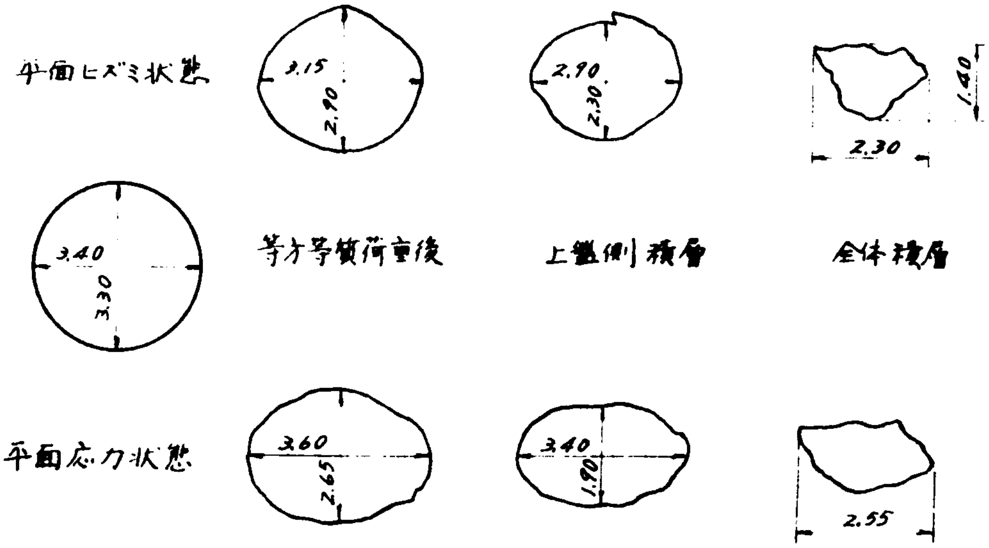
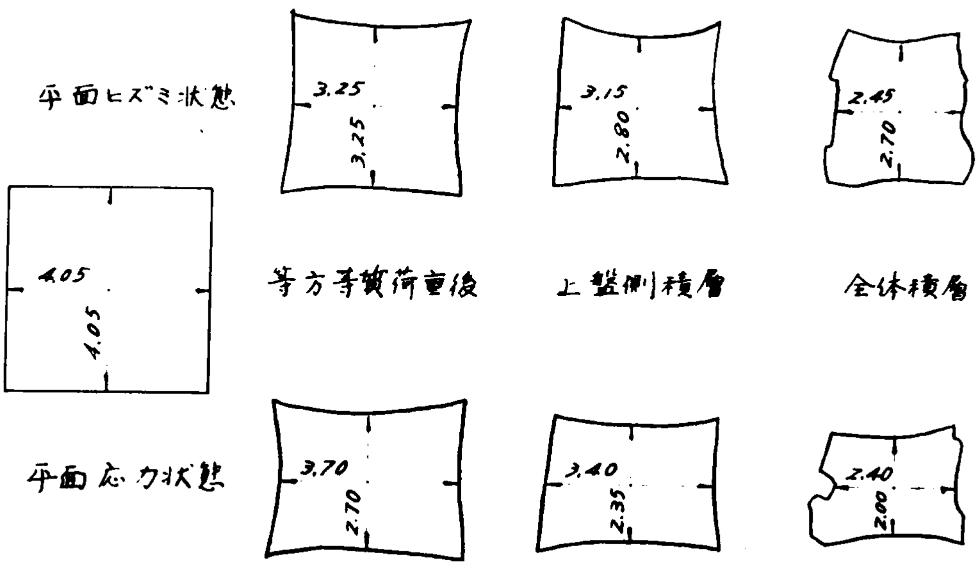


図-3・4・4　円形坑道の変形



図－3・4・5　正方形坑道の変形

才 5 章　点等方性弾性地山中の坑道の周辺応力分布[39]

第2篇第5章において点等方性弾性平板に対する一般弾性方程式について説明し、それらを用いて点等方性地山内の地表面より離れた位置にある坑道および等分布荷重をうける地表面下の坑道に対する周辺応力状態の理論的な近似解法を述べ、なお後者に対する計算例を示した。こゝにおいてはこのような点等方性弾性体に対する光弾性実験法の適用について説明し、この実験法が本題のごとき場合にも適用しうることを示すとともに、さきに理論的に考察を行つたと同様な2つの場合に対する実験結果を示した。さらにこれらの実験結果と比較検討し、点等方性弾性地山内における坑道周辺応力状態について考察を行つた。

5・1　光弾性解析

このような点等方性材料中の応力分布の決定に対して光弾性学を適用することはさきにも述べたごとくすでにCurtis およびRichart[40]が半無限体の表面に集中荷重が作用した場合について行つている。彼等は変化する弾性係数を有する地山と変化する厚みを有する板（板の厚みの変化が円滑であり、かつ急激でない限り、応力分布は二次元的であり、したがつて厚みを通しての応力変化は無視されると考えてよいだろう）との間に物理的類似性のあることを考慮して、二次元問題として光弾性実験により問題を処理できることを示した。いまこの方法を円形坑道を有する点等方性地山に適用すればつぎのようになる。

与えられた境界荷重をうけ、その厚さ(h)が深さ(y)の関数であるような薄いスライスを考えるとその場合の　合方程式は、

$$\frac{\partial(h\sigma_y)}{\partial y}+\frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial(h\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(h\tau_{xy})}{\partial y}=0 \qquad (3\cdot5\cdot1)$$

また応力ーヒズミ関係は

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)=\frac{1}{Eh}(h\sigma_x-\nu h\sigma_y)$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2}{Eh}(1+\nu)(h\tau_{xy}) \qquad (3\cdot5\cdot2)$$

で表わされる。こゝでνは平面応力系のポアツソン比である。（3・5・1）式および（3・5・2）式を用いればこの場合の適合条件式は応力の項でつぎのように与えられる。

$$\triangle(h\sigma_x+h\sigma_y)-2\frac{\partial}{\partial y}(h\sigma_x+h\sigma_y)\frac{\partial\ln h}{\partial y}$$
$$+(h\sigma_x-\nu h\sigma_y)\left(\left(\frac{\partial\ln h}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\ln h}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (3\cdot5\cdot3)$$

したがつて（３・５・３）および釣合方程式を比較することにより、平面ヒズミと平面応力の二つの系はもし平面ヒズミ系〔σx，σy，τxy，$E=F(y)$，ν〕が平面応力系〔$h\sigma x$，$h\sigma y$，$h\tau xy$ $h=h(y)$，$\nu'=\nu/(1-\nu)$〕と対応するような関係にあるときには数学的に同一であることが判る。

この関係を用い厚みの変化する二次元模型を用いて行つた光弾性実験より得た結果（平面応力系の σx，σy，τxy）より、本題のごとき点等方性弾性地山内の応力状態を知りうる。つぎに光弾性実験を適用して求めた点等方性地山内の円形坑道周辺応力に関する結果について述べる。

５・２　　地表面よりかなり離れた坑道に対する光弾性実験結果およびその考察

この場合は第２篇第５章５・２で述べたように $E=ky$ なる点等方性弾性地山を考えているから，これに対応する光弾性模型としては $h=ky$ なる厚みの変化するスライス，すなわち楔を用いることが必要である。実験に用いられた模型は図－３・５・１(a)(b)のようであり、模型材料にはエ キシ樹脂（Araldite Oasting Resin Type B）が用いられた。これの性質は弾性係数 $E=3.2\times10^4 kg/cm^2$，　$=0.37$，f=Fringe valve $=10.75\ kg/cm$ である。この模型の楔の頂角によつて坑道中心の深さがそれぞれ図に示されているごとく決まるが、実験上さきにも述べたように、楔角は二次元応力状態が保たれる程度の大きさでなければならない。またこの楔角の大きさは厚みの変化に伴つて応力集中効果を生ずるものであつてもならない。これらの点を考慮して Ourtis および Richart は約１４° の楔角がこのような実験模型として充分であることを見出している。こゝではいづれの模型も楔角が１４°以下であるから、厚みの変化による応力集中効果を考える必要はない。つぎの図－３・５・１(b)の模型としては実験の都合上幅 6.0 cm 高さがそれぞれ 5.0 cm，6.0 cm，7.0 cm のものを用いて直径１ cm の円孔をうがつたが、この場合当然両側の鉛直縁による影響が考えられる。この影響は後で示される $E=$ Oonst. の場合の応力状態より容易に見当づけられるが、いずれの模型においても同じ程度の影響をうけるから、その影響を無視して実験値が比較された。

まず第一系列の実験は、図－３・５・１(a)に示されているごとく５種の楔角をもつ（矩形板の底面巾が一定１２mm に対して上縁巾を１２mm，８mm，６mm，３mm，１mm と変化させている）6.0 cm×5.0 cm の矩形板の中心に直径１ cm の円孔をうがつた模型を用い、その上下縁に等分布荷重を作用させて行われた。 模型はその対称軸を鉛直にして荷重されるから、その面は光弾性装置の光軸に垂直ではない。したがつてここでは浸漬法を用いた。すなわち模型は模型と屈折率を同じくする液体（流動パラフインとα－モノブロームナフタレンとの混合液）を入れた内容積 8 cm×8 cm×1.5 cm のプレクシガラス製の液槽中に浸され、レバー装置を通じて荷重がかけられた。実験によつて得られた等色線写真の１例を示せば写真－３・５・１のようである。

第二系列の実験としては、幅 6.0 cm，高さがそれぞれ 5.0 cm 6.0 cm 7.0 cm の３種の矩形板で、いずれも上縁，下縁の厚みが１２mm，４mm の模型が用いられた。この実験は荷重面近傍におけ

る応力状態の攪乱の程度を知るために行われたのであるが、いずれも第一系列の実験値と相関連した値を与え、高さ5.0 cm の模型で充分な結果を与えることが判つた。

写真－3・5・1の等色線縞模様より円孔周辺の応力分布を求め、その1例を示せば図3・5・2のようになる。この場合円孔周辺の縞次数 n よりつぎのようにして等分布荷重強度 p に対する平面ヒズミ状態における応力値を知りうる。

$$\sigma\varphi = h^{\sigma'}\varphi = \frac{fn}{p} = \frac{fn}{P/l} \qquad (3\cdot5\cdot4)$$

ここに、σ ：平面ヒズミ状態における応力 ($kg/cm2$)

$\sigma\varphi$ ：平面応力状態における応力 ($kg/cm2$)

P ：載荷全荷重 (kg)

l ：載荷長 (cm)

p ：等分布荷重強度 (kg/cm)

f ：*Fringe Valve* (kg/cm)

つぎに各円形坑道周辺応力分布のうち上盤(σt)，下盤(σb)，側壁(σw) の3ケ所の応力に注目し、それらが坑道中心の深さ h_0 に対していかに変化するかを図示すれば図－3・5・3のようである。同時に下盤応力との比 $\sigma b/\sigma t$ が図示されている。

まず $E=Const.$ の場合と $E=ky$ ($h_0=5.9r$) の場合との周辺応力分布を比較するとつぎのようなことが判る。全体的に $E=ky$ なる点等方性弾性地山中の坑道の場合の方が、その周辺応力は大きい。しかして上盤の引張応力と下盤の引張応力とは相違し、下盤の方が大きい応力を生ずるが、この傾向は坑道が浅いところにあるほど大きく、この実験においては $h_0 \geqq 25r$ 程度になるとほとんど差異がなくなることが判る。この上盤と下盤との引張応力値だけでなく、応力分布状態は点等方性の場合一般に坑道中心を通る水平線に対して非対称である。この傾向も坑道位置が浅いほど大きくなるが、ある程度以上の深さ($h_0 \geqq 25r$)になると弾性係数が一定な深い地山内の坑道におけるごとく上下に対称的な応力分布を示すようになつてくる。したがつて図－3・5・2を見れば判るように点等方性地山の場合には側壁部の最大圧縮応力は側壁中央に生じないで、それよりいくぶん下のところに生ずる。

これらの応力分布の坑道の深さ(h_0)に対する変化図を見れば点等方性地山内の坑道周辺応力の変化状態が明らかになる。上盤応力(σt)，下盤応力(σb)，側壁応力(σw) 等いづれも坑道中心の深さが小さくなるにつれてほゞ一様に増加する。その増加の割合は下盤で最も大きく浅いところでは地山材料の点等方性の影響が明らかにでている。上下盤に比較して側壁応力の増

加はわずかである。こゝで$E=Const$（$h_o\to\infty$）のときの側壁応力が$3.0p$より小さくなつているのはさきにも述べたごとく模型の矩形板側辺の影響によるものであり、したがって$E=ky$の場合もσ_wがわずかに$3p$より小さい実験値を示している。なお下盤応力の上盤応力に対する比率もh_oの減少に伴つて一様に増加しているが$h_o=25r$のところではその変化はきわめて僅かでほとんど1.1に近い。$h_o=5r$のところでは$\sigma_b/\sigma_t=1.24$（$\sigma_b=1.53$，$\sigma_t=1.23$）となるが、$h_o=25r$に深さが増すと$\sigma_b/\sigma_t=1.05$（$\sigma_b=1.10$，$\sigma_t=1.05$）と減少する。

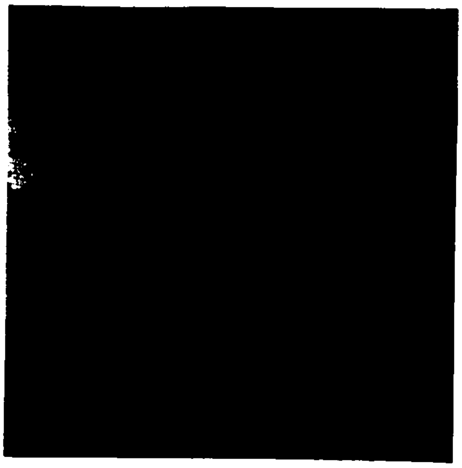
5・3　等分布荷重をうける地表面下の坑道に対する光弾性実験結果およびその考察

5・2の場合と同じ光弾性材料を用い、同様な方法で実験を行つた。実験に用いた模型寸法は図3・5・4のようであつて、第2篇第5章5・3で計算を行つた寸法と幾何学的に同一のものである。計算においては点等方性弾性地山としては$E=ky$なる弾性係数を有するものとしたが、これに対応する模模型としては頂縁の厚みが零にならねばならない。しかし実際に頂縁の厚みが零なる模型を作成しても、荷重によつて縁がかけるか、あるいは極端な応力集中のために荷重点下の部分が塑性変形を起して所要の状態と異つた荷重状態を与えることになるだろう。したがつてここでは一応図のごとく頂縁の厚みを1 mmにとつた。また比較のため頂縁の厚みが3 mmのものおよび弾性係数が一定のものについても実験を行つた。光弾性実験によつて得た等色線写真は写真3・5・2のようであり、それより坑道周辺の応力分布を求め図示すれば図ー3・5・5のようである。この図では比較のため第2篇5・2で求められた計算値も同時に書かれている。この図より判るように実験値と計算値とは上盤の部分を除きほゞ同じような応力分布をし、地山が点等方性であるための応力変化も同じ傾向をもつ、すなわち点等方性地山における坑道では等質等方性の場合よりも一般的に各部分の応力が大きい値を示す、計算値と実験値との大きな相違は上盤における引張応力であつて、計算値ではかなり大きい値になつており、側壁における圧縮応力と同じ程度の大きさを示している。

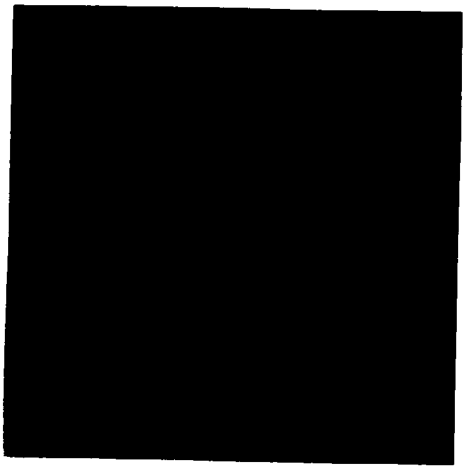
また両者の相違としては側壁から下盤にかけての部分の応力値が考えられるが、実験値の方が大きい値を示すし、計算値とは逆に実験値において$E=Const$の場合が、$E=ky$の場合よりも大きくなつている。これらの応力値は実験においては$\nu=0.27$に対するものであり、計算では$\nu=0.33$に対するものであるから完全な比較はできないが、大体においてその傾向は比較することができよう。なお比較のため円形坑道の各点における周辺応力を表示すれば表3・5・1のようである。

表ー3・5・1　坑道の各点における周辺応力σ_φ/p

	φ	0	22.5	45	67.5	90	1125	135	157.5	180
計算値	$E=Const$ $\nu=0\sim0.5$	0.196	0.111	−0.161	−0.639	−1.239	−1.575	−0.959	0.504	1.315
	$E=ky$ $\nu=0.33$	0.328	0.192	−0.763	−1.376	−1.643	−0.942	−0.893	0.562	1.381
実験値	$E=Const$ $\nu=0\sim0.5$	0.20	0.07	−0.40	−0.89	−1.27	−1.36	−0.98	−0.07	0.50
	$E=ky$ $\nu=0.27$	0.41	0.24	−0.33	−0.84	−1.35	−1.59	−1.06	0.32	0.60

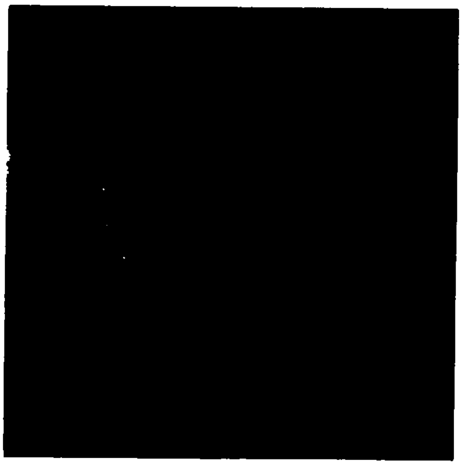


(a) $E = const.$
$p = 17.0\ \mathrm{kg/cm}$

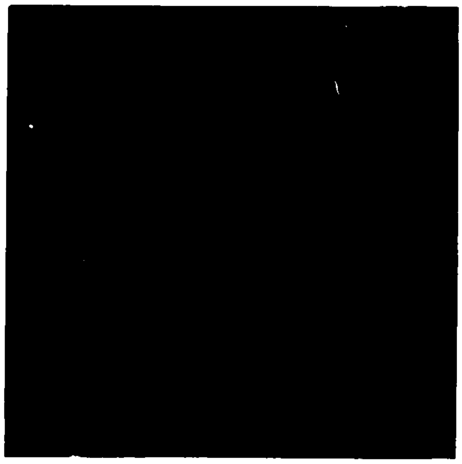


(b) $E = ky,\ (h_0 = 5.9r)$
$p = 17.4\ \mathrm{kg/cm}$

写真-3·5·1　地表面より離れた地山中の坑道に対する等色線縞写真



(a) $E = const.$
$p = 45.1\ \mathrm{kg/cm}$



(b) $E = k(y + y_0),\ y_0 = 1.38r$
$p = 48.7\ \mathrm{kg/cm}$

写真-3·5·2　等分布荷重をうける地表面下の坑道に対する等色線縞写真

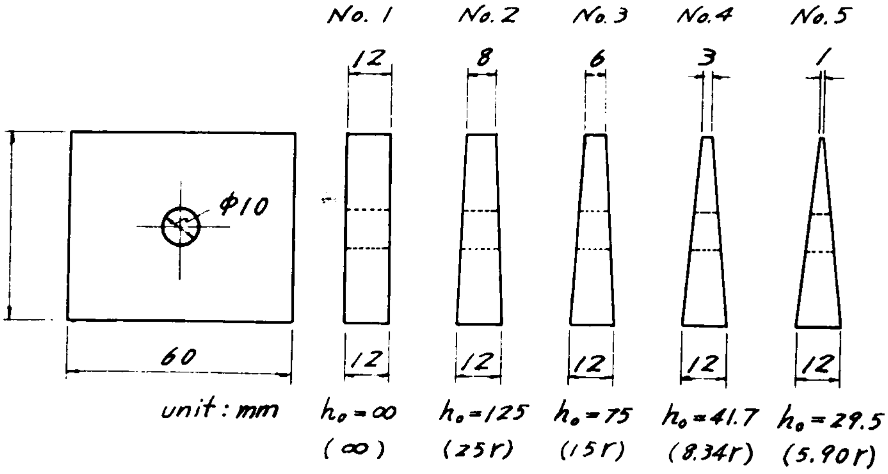

No. 1
No. 2
No. 3
No. 4
No. 5
12
8
6
3
1
φ10
60
12
12
12
12
12
unit : mm
h₀=∞
(∞)
h₀=125
(25r)
h₀=75
(15r)
h₀=41.7
(8.34r)
h₀=29.5
(5.90r)

図 - 3・5・1 (a)

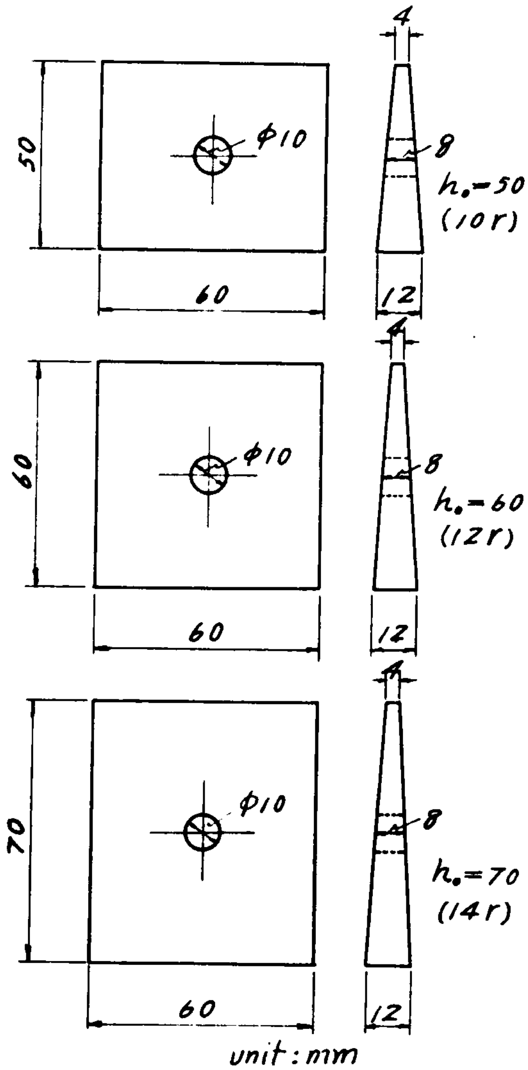
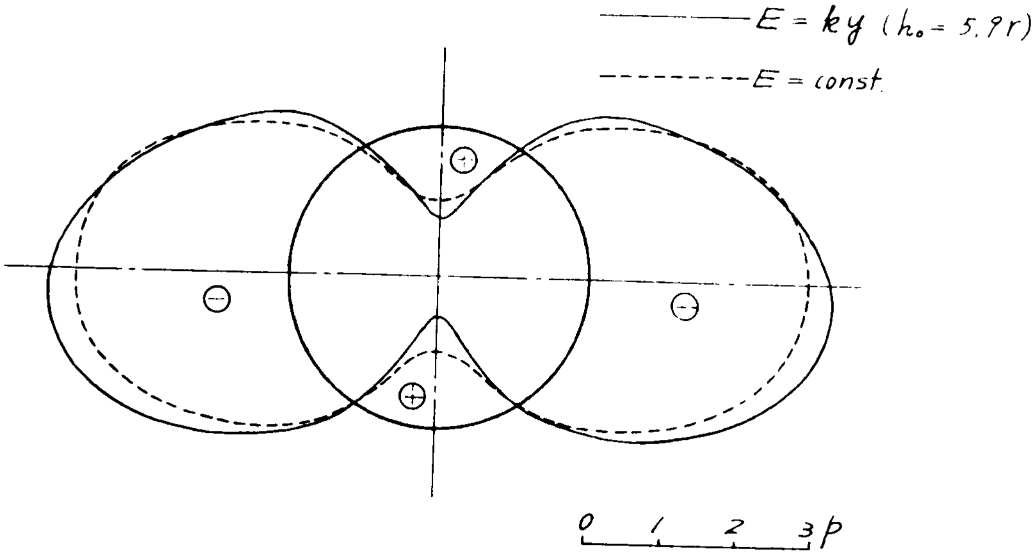
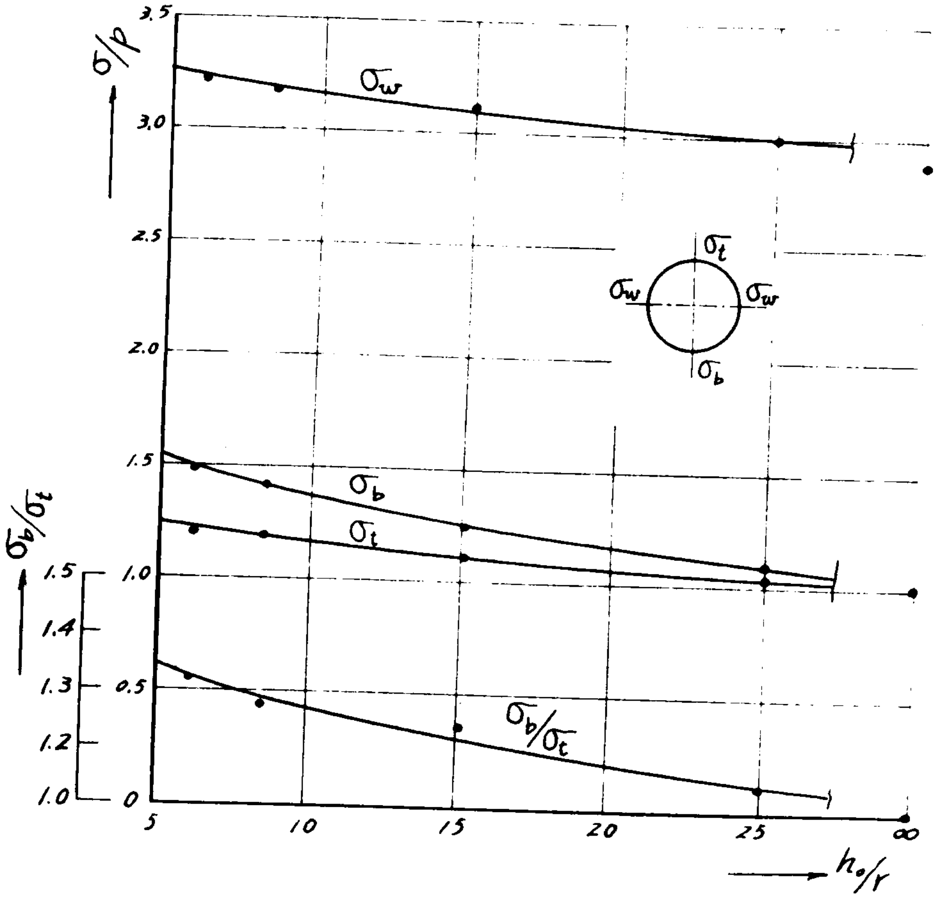

4
50
φ10
8
h₀=50
(10r)
60
12
4
60
φ10
8
h₀=60
(12r)
60
12
4
70
φ10
8
h₀=70
(14r)
60
12
unit : mm

図 - 3・5・1 (b)



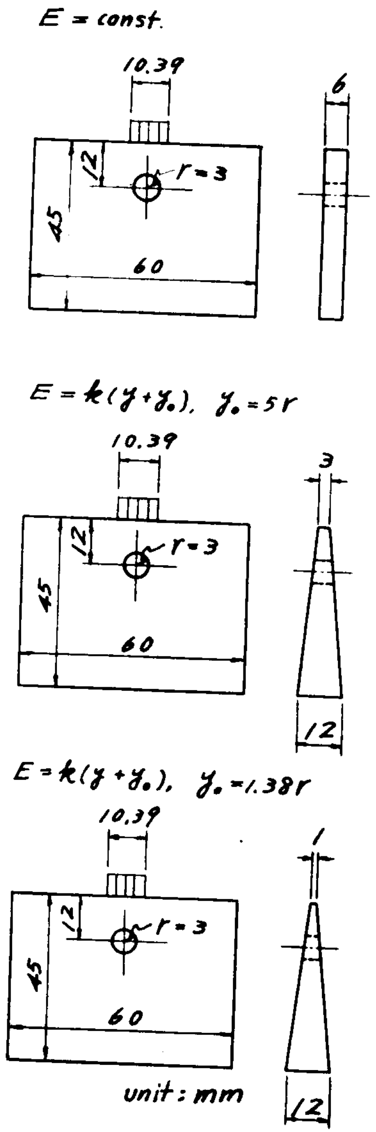
E = ky (h₀ = 5.9r)
E = const.
0 1 2 3 p

図-3・5・2



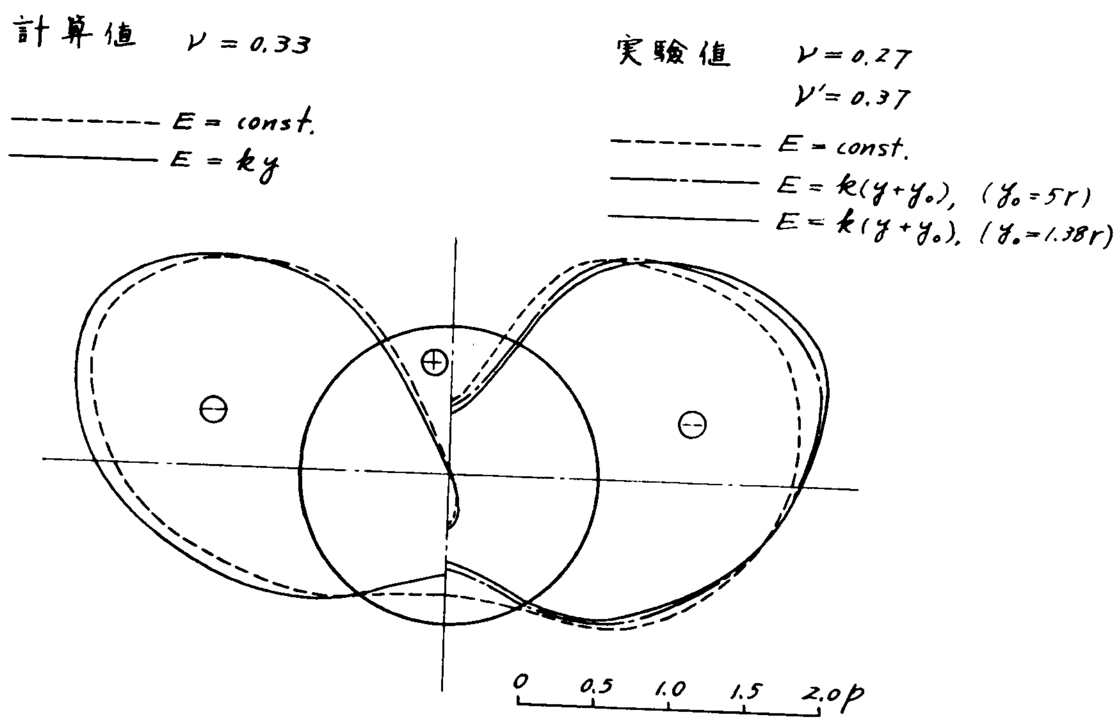
σ/p
σw
σt
σb
σb/σt
h₀/r
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
1.5
1.4
1.3
1.2
1.0
5
10
15
20
25
∞

図-3・5・3



E = const.
10.39
6
12
r = 3
45
60
E = k(y+y₀), y₀ = 5r
10.39
3
12
r = 3
45
60
12
E = k(y+y₀), y₀ = 1.38r
10.39
1
12
r = 3
45
60
12
unit : mm

図-3.5.4



計算値 ν = 0.33
E = const.
E = ky
実験値 ν = 0.27
ν′ = 0.37
E = const.
E = k(y+y₀), (y₀ = 5r)
E = k(y+y₀), (y₀ = 1.38r)
⊕
⊖
⊖
0 0.5 1.0 1.5 2.0p

図-3.5.5

オ 6 章　水平交差坑道における交差角と応力集中との関係

地下に開削された坑道周辺における応力分布状態についてはいままで述べて来たとおりであるが、これらの研究はいずれも単独の坑道についてのものであり、また従来よりの研究においても2本の坑道が交差した場合におけるものは少ないようである。実際の現場における交差坑道は坑道巻立部，斜坑底部，立坑連絡坑道部，その他主要運搬坑道の分岐点などであつて、いずれも2本以上の坑道が集まり、保安上からもその支保構造に対しては特別の考慮が払われている。したがつて坑道交差部における応力集中状態を検討することは興味ある問題と考えられる。すなわち交差部における応力集中は各個の坑道における応力集中が互いに干渉，加重され単独の場合に比してはるかに高くなると予想される。しかるに、この交差部における応力集中問題は単独坑道の場合と違つて奥行きを持つ空間について考える必要があり、したがつて2次元的にこれを解くことは不可能であり、3次元的に取扱わねばならない。

著者はこの点を解明するため立体模型を作成し、応力凍結法による3次元光弾性実験を適用し、水平交差坑道における応力集中度について実験的に考察を行つた。一般に交差坑道は水平交差，垂直交差および斜め交差の3つに大別することが出来るがここではそれらの一連の実験的研究のうち基礎的な傾向を知るため、まず水平交差の場合を取り上げた。すなわち模型に2本の円孔を穿ち、その水平交差角を順次変化させて3次元光弾性実験を行い、その結果から交差部鋭角側に集中する応力状態を外挿法[41)]によつて求め、交差角と応力集中との関係について考察を行つた。

6・1　実験方法および実験結果

実験は図ー3・6・1に示すような模型について行われた。すなわち機械加工によつて精密に加工された6×6×8 *cm* の*Epoxy* 樹脂のブロックに作用荷重面に平行に8 *mm* ϕ の2本の円孔をうがち、その水平交差角を90°，75°，60°，45°，30°，15°に変化させた6つの場合について実験した。模型は電気恒温器中で温度125°C においてレバーによつて載荷され、応力の凍結が行われた。模型に用いた*Epoxy* 樹脂の光弾性常数はキャブレーションテストの結果 $K=0.25\,kg/cm$ であつた。

凍結された模型は図ー3・6・1に示すように坑道周辺応力の最大値を示すと思われる対角線方向にスライスし、浸漬法を用いて、すなわち*Epoxy* 樹脂と同一の屈折率を有する液中に浸して、通常の2次元光弾性装置によりそれぞれ明暗両視野の光弾性縞写真を撮影した。
浸漬液は α モノブロムナフタレンと流動パラフインとの混合液である。

写真ー3・6・1 ～ 写真ー3・6・4は以上の方法で凍結，切断，浸漬ののち撮影して得られた写真の一部であり、$\theta=90°$，78°，60°，45°　の場合を示している。

上で得られた写真より鋭角側交差端の応力集中度は次のようにして求められる。

すなわち、交差端応力集中度

$\sigma_A = nk/dp$

n：縞次数

d：スライス厚み（cm）

k：光弾性常数（0.25 kg/cm）

p：荷重強度（kg/cm^2）

いまcase 2（$\theta=75°$）の場合のn/d を求めるとつぎのようである。図－3・6・2において(a)は水平断面（X－X 断面）内における交差端の示すもので、これよりスライスの厚みの変化がわかり、(b)はこれを図表化したもので、縦軸に厚みd（mm），横軸に交差端より地山側の距離s（mm)がとられており、スライスの厚みdの変化は図のように表わされる。また同時にさきの明暗両視野写真から縞次数nと交差端よりの距離sの関係がn－曲線によつて示されると、同断面上のn/dが明確にプロットされる。このようにしてこの図から外挿法によつて、$s_{0.25} \rightarrow A$の範囲を図の破線のように曲線を外挿すれば、n/d の$d \rightarrow o$における極限値、すなわち求めんとするA点におけるn/d の値がえられる。この場合のA点のn/d の値は$n/d=36.9$である。つぎに光弾性感度は$k=0.25\ kg/cm$であり、case 2 の p の実験値は0.8677 であるので$k/p=0.288$となり従つてA点における応力集中度$\alpha_A=(n/d)\cdot(k/p)=36.9\times0.2881=10.63$ となる。以上のようにしてそれぞれの場合における応力集中度α_Aを求めると、その結果は図－3・6・3に示すようになる。

また荷重のため円孔の変形によつてA点における楕円形孔の長軸端縁の曲率半径がρAよりρ'_Aに変化し、応力集中度が実際より大きく出ているため、これらの結果に変形による補正をほどこさなければならない。

変形補正係数fは

$f=\rho A/\rho' A$

ただし　ρA：荷重前の楕円形長軸端の曲率半径

$\rho' A$：荷重後の楕円形長軸端の曲率半径

で表わされ、ρA は実測から算出すると表－3・6・1のようになる。したがって各場合について、$\alpha A\cdot f=\alpha'_A$の値を求めると図－3・6・3で示される結果がえられる。

6・2　実験結果の考察

上述の実験結果についてみると、まず単独の坑道における場合より2本の坑道が交差している場合の応力集中度は、いずれの場合も大きくなる。すなわちすでに理論計算や実験でえられている単独坑道の側壁集中応力（圧縮）$\alpha=2.7\sim3.0p$よりいずれも大きい値を示し、この一連の実

験でえられた最小応力値 $\theta = 90^\circ$ の場合でも $\alpha'_A = 6.77$ を示して約2倍以上の値を示している。

また交差の度合が大きくなるにしたがつて、すなわちこの場合 θ が順次減少してゆくにしたがつて応力集中度は比例的に断加。$\theta = 15^\circ$ に至つては急増の傾向を示して、α は単独坑道の場合のおよそ5倍以上になる。

表－３・６・１

Case	交差角 θ	ρ_A	ρ'_A	f	α_A	α'_A
1	90	0.288	0.221	0.77	8.66	6.77
2	75	0.244	0.185	0.76	10.63	8.06
3	60	0.200	0.152	0.76	12.65	9.61
4	45	0.138	0.102	0.74	14.51	10.74
5	30	0.103	0.070	0.72	17.11	12.32
6	15	0.052	0.038	0.73	19.91	14.53

したがつて以上のことから坑道交差部鋭角側には、2本の坑道の応力集中が干渉、加重して単独坑道の場合の少くとも2倍以上の応力集中を起す可能性があると考えられるので、実際の坑内において坑道を交差させる場合はできるだけ鋭角交差を避け、なるべく直交交差を採用する方が有利であると考えられる。また坑道分岐部、とくにその鋭角側の支保構造については充分注意しなければならず、交差部鋭角側附近にはポンプ座や坑内変圧器その他の重要施設の設置は避ける方が好ましい。なお比較のために上に述べたような交差部鋭角端を含む楕円形状の各場合にたいして、2次元弾性論によつて応力集中度を計算するとつぎのようになる。図－３・６・４のごとき楕円孔を有する無限板において荷重強度 p なる等分布荷重が作用する場合の A 点における応力は前述したように

$$\sigma_A = p(1+2\ a/b)$$

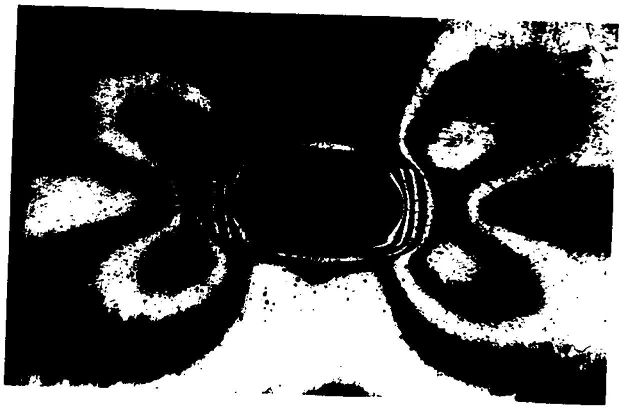
で表わされる。この式を用いて上で実験を行つた各場合における楕円形について A 点の周辺応力を求め図示すると、図－３・６・３の破線 σ_A－曲線のようである。

この場合には楕円坑道を含む地山を2次元的に考えているため、実際には坑道が水平に地山中にかなりの長さにわたつて掘削されている場合にあたるわけである。したがつて光弾性実験結果による A 点の応力集中度と直接比較は出来ないが、楕円形状の変化に伴う A 点の応力集中の変化は一応比較することが出来ると思われる。図－３・６・３の曲線を見れば判るように、実験によれば交差坑道の交差部鋭角端における応力集中は交差角の減少に伴なつてある程度まで一様に増加しているのに対して、2次元的な計算によると交差角 θ が 90° から 60° 程度までにあたる楕円形状にたいしては応力集中の変化は小さく、$\theta = 60^\circ \sim 15^\circ$ にたいする断面形状にたいしては

交差角の減少にしたがつて応力の集中する度合が急激に増大する。しかし比a/bが極端に大きくなるような楕円形断面形状を除けば、一般に交差坑道の場合がそれに対応する単独の楕円坑道の場合よりも応力集中度の高いことが認められ、互に交差し合う2つの坑道の相互影響による応力集中度の上昇は注意すべき問題であると思われる。

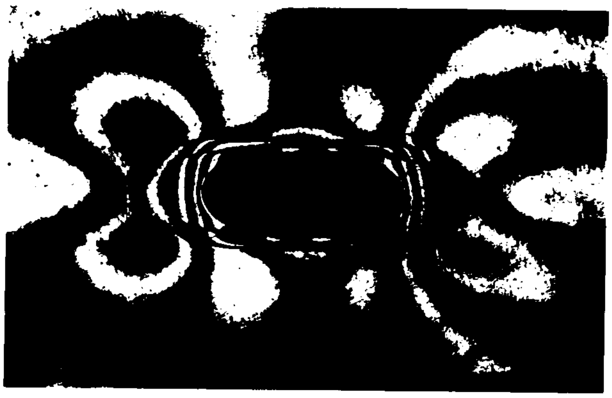
$\theta = 90°$, $p = 0.866\ ^{kg}/_{cm^2}$

写真 - 3・6・1



$\theta = 75°$, $p = 0.868\ ^{kg}/_{cm^2}$

写真 - 3・6・2

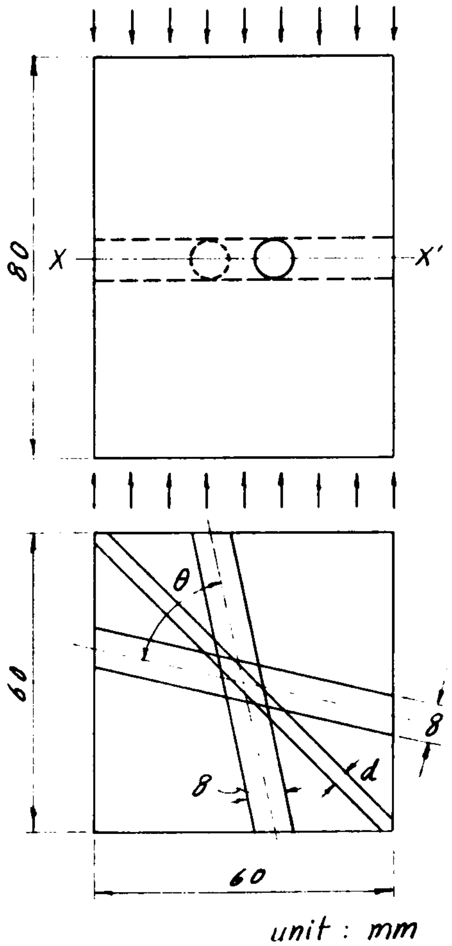


$\theta = 60°$, $p = 0.874\ ^{kg}/_{cm^2}$

写真 - 3・6・3

$\theta = 45°$, $p = 0.870\ ^{kg}/_{cm^2}$

写真 - 3・6・4



Case	θ
1	90°
2	75°
3	60°
4	45°
5	150°
6	165°

図－3・6・1　実験模型寸法

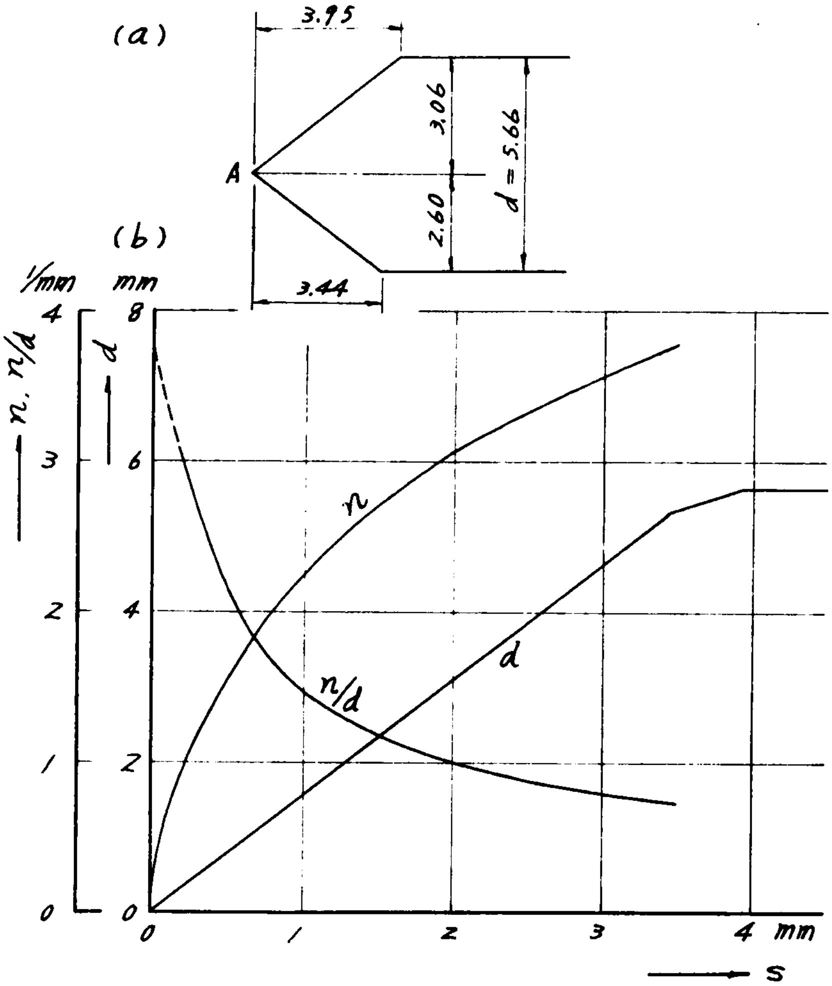
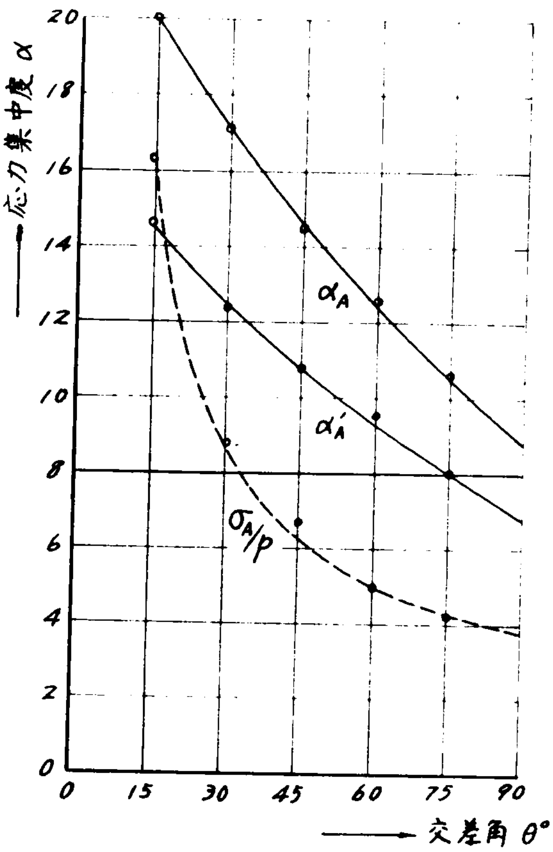
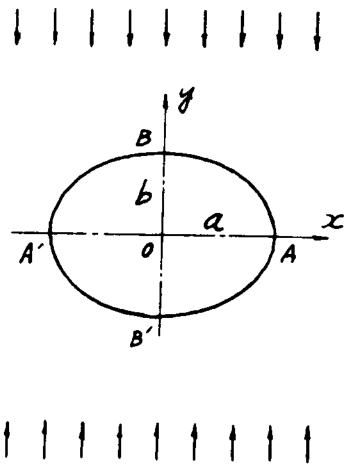


図-3・6・2　Case 2, $\theta = 75°$



応力集中度 α
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
15
30
45
60
75
90
交差角 θ°
α_A
α'_A
σ_A/p

図-3・6・3



y
B
b
a
x
A'
0
A
B'

図-3・6・4

才７章　結　語

第２章において通常よく用いられている坑道の断面に類似した４種類の一般的な断面形状について一連の実験を行い。断面形状と坑道応力との関係を明らかにするとともに。経済的な断面として頂点に引張応力を生じないような形状について考察し。側圧係数との関係を求めた。

つぎに２種の国鉄ずい道の標準断面形状についての実験を行い。そのずい道応力を一般的な形状にたいするものと比較した。それらの結果、つぎのことが明らかになつた。

(1)　鉛直荷重のみにたいしては頂点における引張応力はほぼ作用圧力pに等しく、断面の高さやアーチの形に無関係である。

(2)　しかし水平荷重のみにたいしては。頂点の圧縮応力は断面の高さおよびアーチの半径に関係し。断面高さが同一の場合にはアーチ半径が小さいほど圧縮応力を増大する。

(3)　またアーチの半径が同一のときには高さが大きくなるほど圧縮応力を増す。

(4)　したがつて経済的に適当な条件として頂点の応力が零になることを考えると。断面の高さが増すにつれて上部アーチの高さを低くすることが必要である。

(5)　アーチの半径が同一であるときには。下部の断面形が変化しても高さが同一であればアーチ部の応力状態はほとんどかわらない。

(6)　一般に側壁の応力は断面の高さが大きくなるほど小さくなり、曲線壁にたいするより、直線壁にたいする方が小さい。

(7)　側壁応力はアーチの高さの変化にたいしてあまり大きくは変化しない。とくに全断面の高さがアーチ高さに比して大きい断面ではアーチの形によつて壁応力はほとんど影響をうけない。

(8)　底面隅角部の応力集中度は曲線壁の場合が直線壁の場合より小さい。

(9)　国鉄ずい道標準断面にたいするずい道応力は。実験№１（直線壁の場合）と実験№２（円形壁の場合）の中間の値をとる。しかし底面隅角部の応力集中はある程度減少される。結局坑道応力は本質的には断面の高さと巾の比、アーチおよび側壁の曲率等によつて決定されるが。一般に馬蹄形断面と言われている国鉄ずい道標準断面のごとく。円形アーチを持つ矩形断面と考えられるような断面にたいしては。ここにおいて行つた実験結果が有効に利用されよう。なおインバート・アーチを有する断面に対してもここで述べた種々の性質がそのままあてはまるものと考える。

以上の実験は主圧力方向が鉛直および水平方向で。坑道断面に対して対称に圧力が作用した場合のみを取扱つているが、当然実際の地山中の坑道にたいしては偏圧の作用することも考えられるから。初期荷重の方向が坑道断面にたいして傾斜をもつ場合の坑道応力に関しても考察されねばならない。この点については平松，岡の光弾性実験による研究[25]がある。

第3章では光弾性被膜法の直交異方性弾性平板への適用について述べ、実験の1例として円孔を有する異方性平板が一軸方向に等分布荷重をうける場合についての結果を示した。この場合の円孔周辺におけるごとく自由境界上での異方性平板（下地材料）の応力値を、光弾性被膜における光弾性縞次数Nから算定するための式（3・3・18）を導いた。つぎに直交異方性材料としてエポキシ樹脂を母材とし、金属線を補強材とする合成材を用いて任意の主弾性係数比のものを作成しうることを示し、さらに光弾性被膜の材料およびその弾性性質について言及した。実験は$e = E_y/E_x = 2$，4の10cm ×12cm角の異方性平板（厚み1 3mm）の中央に直径12mmの円孔が開けられたものを用い、主弾性係数E_xの方向（金属線の方向に垂直な方向）が荷重方向に対して$\delta = 0^\circ$，22.5°，45°，67.5°，90°に傾いた場合に対して、反射式光弾性装置を用いて等色線縞を撮影した。反射式光弾性装置は3・3で述べたごときことを考慮して図ー3・3・5に示すようなものを作成した。実験結果を解析してえた円孔周縁の応力分布を第2篇3・2で行つた理論計算結果と比較して、かなりよい結果をえた。図に示した実験と理論における応力分布は厳密に比較できないが、それぞれの場合の応力分布の傾向や荷重の異方性の方向に対する傾きが応力分布状態に及ぼす傾向はほとんど一致することから、このような実験が今後異方性平板の応力解析に有利に利用され、とくに計算を行いがたい異方性地山中の任意形状の坑道あるいは双設坑道の周辺応力の解析にも適用されるものと思われる。しかしここに示した円孔周辺応力分布の差異について考察してみると、いろいろの点についてなお一層実験を進める必要があると考えられる。すなわち(1)光弾性被膜の性質（弾性係数や光弾性感度等）が温度に対してかなり不安定であるため、測定時の値をできるかぎり正確につかむようにすること。(2)異方性材料の弾性性質として、ここでは3・3で与えた計算式による値を用いたが、実際には作成された材料について測定を行つてえた弾性係数を用いれば誤差が小さくなるであろう。なおこの場合縞次数よりの応力解析には（3・3・18）式を用いないで、（3・3・11）式に示すようにG_{xy}を含んだ式を用いるようにすべきである。(3)異方性材料として任意のものをうるための方法を示したが、主弾性係数比eが大きくなつて金属線数が多くなると、eの測定値は理論値とかなり異なること、および極端に金属線数が小さい場合には金属線部分の応力集中が被膜を通じて平均化されにくいこと等を考慮して、さらに良好な任意の異方性材料を作成することが必要である。これらのことについては今後さらに研究を進めることにする。

第4章では層状地山における坑道の周辺応力に対する理論式の適用範囲について考察するため、同一種類の積層地山模型（エポキシ樹脂使用）について光弾性実験を行つた。その結果層厚が坑道半径あるいは坑道巾の1/4 以下の場合には第2篇で述べた理論式が層厚のいかんにかかわらず近似的に適用されることが明らかになつた。このことはさらに中間層を含む層状地山の場合にもあてはまるであろう。

つぎにゼラチン模型を用いて層状地山内の坑道応力および変形状態を実験的に求めた。ゼラチン模型による実験では変形が大きくなるため、坑道周辺応力分布は開削時の断面形状に対するものではなく、大きく変形した後の断面形状に対するものを与えている。したがつて実験における平面ヒズミ状態と平面応力状態の応力分布を直接比較することはできないが、また自重による坑道応力や変形状態がある程度明らかにされた。とくに層状地山中の坑道天盤における第1層の応力状態は、従来の梁理論によつて与えられる応力状態とは、大いに異なり、第1層は曲げをうけるとともに、かなり大きい側圧をうけるため、天盤の引張応力は減少し、第1層上部の圧縮応力がいちぢるしく増大する傾向があることが判つた。

第5章では点等方性弾性地山内の坑道周縁応力状態について実験的に考察を行つた。第2篇第5章で述べた理論的な解法は5・2の場合には一般に数学的な取扱いが困難であり、また5・3でもかなり手数のかゝる近似解であるため、こゝでは光弾性実験を適用して本問題に対する考察を行つた。すなわちまず点等方性弾性材料に対する光弾性実験法の適用について述べ、さらに理論的に考察を行つた二つの場合に対して光弾性実験より坑道周辺における応力分布の状態を求めた。その結果坑道がある程度深いところにある場合、地山が点等方性である場合か等質等方性であるときよりも坑道応力は全体的に大きく、またその場合下盤の引張応力が上盤のものより大きくなり、この傾向は坑道の浅いほど大きい。また側壁部の最大圧縮応力は点等方性の場合には側壁中央に生じないで、それよりいくぶん下寄りのところに生ずる。なおこれらの坑道応力は坑道中心の深さが小さくなるにつれてはゞ一様に増加する。つぎに地表面における等分布荷重による坑道応力は上盤の部分を除き計算値と実験値とではゞ同じような応力分布をし、地山が点等方性であるための応力変化も計算と実験とで同じ傾向を与えている。なおこの場合も前項の場合と同様点等方性のときが等質等方性のときよりも全体的に坑道応力は大きい値を示している。

第6章では、交差坑道の交差部における応力集中問題のうち、とくに鋭角側の応力集中度と交差角の問題について3次元光弾性実験より得られた解析結果について述べた。交差坑道の交差部には単独坑道の場合に比して2～5倍の高い圧縮応力の集中を惹起することが考察され、さらに2次元弾性理論による応力集中度の計算結果との比較からも同様なことが推察され、坑内の坑道分岐部における坑道支保についての一つの資料をうることが出来た。

第 4 篇　坑道覆工の応力状態に関する基礎的考察

才 / 章　概　　説

坑道の開削に伴つて生じる応力集中、いわゆる坑道周辺応力とともに、覆工内壁および内部における応力状態を明らかにすることは、覆工の設計および坑道の維持の点からも重要なことである。コンクリート覆工をほどこしたずい道においても、覆工材料の老朽劣化と土圧による覆工の亀裂、変状等によつて、案外その寿命が長くないことが指摘されているが[1]、ずい道の維持、管理の上からもまた安全のためにも合理的な覆工の設計、施工が望まれる。従来ずい道の覆工厚は、ずい道に及ぼす土圧をあらかじめ適確に把握することがむずかしいため、一般には掘削中の支保工におよぼす土圧の程度をみて、過去の実測に照して覆工厚をきめている。

近年建設機械の発達とともにずい道工法もかなり進歩し、大型断面のずい道では支保がコンクリート覆工内に埋め込まれ、また軟弱地質におけるずい道では支保にライナープレート等が使用されて、これまた覆工で巻立てられている。このような覆工では支保そのものが覆工の役目をするため覆工厚さはかなり減少している。

また鉱山における坑道支保はいままで一般に木材、I 型鋼、コンクリート支柱等によつて施工されているが、とくに長期間の維持を必要とする坑道や地圧が強い場合あるいは大断面の場合、さらに坑内の機械座および変電所等の周壁には本格的な覆工を構築することが有利な場合が多い。とくに炭鉱においては今後覆工の施工は深部開発問題に伴つて生ずる種々の技術的な問題の解決のためにもますます重要になるものと考えられる。

覆工応力の算定は従来もつぱら土圧論にもとずいて行われてきている。すなわち坑道の開削によつて弛緩せしめられた地山の土の重量によつて地圧が発生するとし、種々の仮説[2]のもとに土圧論的に覆土にかかる地圧を求め、それらの外力に対して構造力学的に覆工応力を算定している。これらの方法は、土質地山あるいはなんらかの原因で乱されている岩盤等でいわゆる粉状体とみなせる地山の場合に有効に用いられるだろう。設計に用いるべき地山の弛緩する高さ、したがつて地圧のとり方は容易ではないが、$K.Terzaghi$ が各種土質に対する土圧のとり方を提案している[3]。

一般に坑道の通過する地山の状態はきわめて複雑であり、覆工にかかる地圧を適確に把握することは容易なことではない。円環に対してはとくに荷重の不釣合が危険であり、これが大きいモーメントを惹起し、一方外圧の絶対的な大きさはあまり大きい役割をはたさないことなどから考えると、覆工に対しては偏圧の作用がきわめて危険であり、偏圧を充分に理解することが重要な問題となつてくるしかるにとくに軟弱な地山や攪乱された地山では覆工にかかる偏圧を充分に把握することがなかなか困難であり、理論的な取扱いもむづかしくなつてくる。したがつてこのような複雑な地山に対しては個々の場合に応じて模型実験あるいは実物実験を行い、覆工にかかる地圧について検討している[4][5][6]。

地山を弾性体あるいは弾塑性体とみなした場合の坑道応力の理論的な解法は、才2篇に示したとお

りであり、覆工応力を求めたものとしては水平円形坑道に対する谷本、[7] 円形坑道に対する小田、[8] 円形立坑に対する著者[9]の研究がある。これらの応力式は勿論複雑な状態の地山に対しては適用できないが、覆工応力に及ぼす地山の弾性性質や覆工厚の影響についての基本的な概念をうる上に充分利用される。

この点にかんがみ、著者は本章においてまず弾性地山中の水平円形坑道および弾性塑性地山中の円形立坑の覆工応力について理論的な考察を行い、とくに水円形坑道の場合の覆工応力が、地山の弾性係数および覆工の厚さによっていかに影響されるかについて論じた。ついで、膨脹性地山中に設けられたある実在水路ずい道の覆工の破壊状態を明らかにするため、理論的および実験的な考察を行い、さらに種々の断面形状の覆工に対して、その形状および地山の弾性係数の影響を明らかにするために光弾性実験を行った。

才 2 章　円形巻立坑道における覆工応力状態の理論的考察

概説においても述べたように、従来からの覆工応力の算定はもっぱら土圧論によつて論じられてきており、したがつて覆工の設計に際しては、用いる計算の仮定によつて覆工にかかる地圧の大きさおよび分布状態が種々に変つてくる。地山が軟弱な土質の場合とか、坑道が岩石破砕帯等を通過したり地形の関係から局部的な偏圧をうける場合には土圧論的な覆工応力の算定が有効に利用されよう。しかし地山が弾性体とみなされるごとき場合は弾性学的な方法で覆工応力を算定する方が適当である。実際の地山を弾性体と仮定することに対する批判は才1篇で述べているので省略するが、ここでは完全弾性地山中の円形水平坑道、立坑および弾塑性状態の地山中の立坑等の覆工応力について理論的に考察を行うことにする。なお立坑に対する解は $H\acute{e}im$ の提案している理論[10)]に従うような性質の地山状態の場合には、水平坑道に対しても適用されよう。弾性地山中の巻立坑道の応力問題に関する研究については才2篇才2章に述べたとおりであり、とくに覆工の内周辺応力分布を算出したものに円形坑道に対する谷本の研究、楕円形坑道に対する小田の研究がある。しかしこれらの計算は断面形が簡単であるにもかかわらずかなり面倒である。また *G.N. Sawin, Yi-Yuan Yu* 等は覆工を固定環とした巻立円形坑道の応力を算定しているのみで、その解では覆工そのものの応力、したがつて覆工厚を決定することができない、著者も直交異方性弾性地山中の巻立円形坑道に対する解を求めているが、この場合もやはり固定環を仮定しており、さらに弾性環に対する解法を試みたが、実用的な解をうることができなかつた。これらの覆工を固定環とみなした場合の解では覆工外壁にかかる地圧は求められるから、その地圧が弾性的な覆工に作用するものとして覆工応力を近似的に求めることも考えられるが、その場合にはかなり過大な覆工応力を与えるものと思われ不適当であろう。

この章ではまず覆工応力状態の基礎的な研究として坑道の覆工応力が地山の弾性係数によつていかに影響されるかを論じ、つぎに立坑の覆工応力を求める2、3の近似式を弾性地山および弾塑性地山に対して求め、地山状態の相違による覆工内部の応力状態について比較考察した。

2.1　弾性地山中の水平円形坑道の覆工応力

(1)　覆工における応力式

著者は才2篇2・2で巻立円形坑道が弾性地山中に水平に開削された場合の坑道周辺応力を求める一つの弾性理論解を示したが、そこでは坑道岩盤の周辺応力状態のみを算出し、地山と覆工との弾性係数の大きさがそれらの応力状態に及ぼす影響について考察した。そして坑道周辺応力のうち半径方向成分 q は覆工に作用する地圧に相当するものであり、とくにこれが地山の弾性性質によつていかに変化するかを調べ興味ある結果をえている。

さて覆工における応力状態も才2篇2・2(3)で示した解を用いて求めることができる。すなわち図2、2、9に示すごとく覆工の内外半径をそれぞれ b , a ,地山の弾性係数、ポアツソン比および覆工のそれらを E , ν および $\bar{E}$, $\bar{\nu}$ とし、x 軸を鉛直方向にとつて、その方向に一軸的に無限遠に

おいて等分布荷重 P が作用する場合を考えると、覆工部分 $(b \leqq r \leqq a)$ における応力式は（２、２、４０）のごとく与えられる。すなわち

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_r &= \bar{a}_0 r^{-2} + 2\bar{b}_0 - (2\bar{a}_2 + 6\bar{a}'_2 r^{-4} + 4\bar{b}'_2 r^{-2}) \cos 2\theta \\
\sigma_\theta &= -\bar{a}_0 r^{2} + 2\bar{b}_0 + (2\bar{a}_2 + 12\bar{b}_2 r^{2} + 6\bar{a}_2 r^{-4}) \cos 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= (2\bar{a}_2 + 6\bar{b}_2 r^{2} - 6\bar{a}'_2 r^{-4} - 2\bar{b}'_2 r^{-2}) \sin 2\theta
\end{aligned}
\right\} \quad (4.2.1.)
$$

上式で $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$ . . . $\bar{a}'_2$, $\bar{b}'_2$ 等は境界条件より定まる定数であつて、つぎの２つの極端な場合が考えられる。

条件(i) 覆工の裏込めが充分に行われていて、覆工が地山に完全に附着している場合であつて、覆工と地山との境界 $r=a$ において、両者の応力成分 σ_r, $\tau_{r\theta}$ 変位成分 u_r , u_θ がそれぞれ等しいと仮定される場合である。このときには（４、２、１）式中の各定数はつぎのようになる。

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{a}_0 &= -\frac{ap}{E} \Big/ \left\{ \frac{(1-\bar{\nu})}{\bar{E}} ab^{-2} + \frac{(1+\bar{\nu})}{\bar{E}} a^{-1} - \frac{(1+\nu)}{E} (a^{-1} - ab^{-2}) \right\} \\
\bar{b}_0 &= -b^{-2} \bar{a}_0 / 2 \\
\bar{a}_2 &= (\beta'\gamma - \beta\gamma') / (\alpha\beta' - \alpha'\beta), \quad \bar{b}_2 = -b^{-2} / 2\bar{a}_2 + b^{-2} \bar{b}'_2 / 3 \\
\bar{a}'_2 &= -b^{4} (\bar{a}_2 + 2b^{-2} \bar{b}_2^{-1}) / 3 \qquad \bar{b}'_2 = (\alpha'\gamma - \alpha\gamma') / (\alpha'\beta - \alpha\beta')
\end{aligned}
\right\} \quad (4.2.2.)
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 4(1 - a^2 b^{-2}) \{ (3-\nu)/E + (1+\bar{\nu})/\bar{E} \} \\
\beta &= 2a^{-2} \{ (3-\nu)(1 - a^4 b^{-4})/E - (1+\bar{\nu}) a^4 b^{-4}/\bar{E} - (3-\bar{\nu})/\bar{E} \} \\
\gamma &= -4p/E \\
\alpha' &= -2(1+\nu)(3-\nu)(a^{-4} b^{4} - 4a^2 b^{-2} + 3)/E + \{ 8(3+\nu\bar{\nu}) a^2 b^{-2} + \\
&\quad + 2(1+\bar{\nu})(3-\nu) a^{-4} b^{4} - 6(1+\nu)(1+\bar{\nu}) \}/\bar{E} \\
\beta' &= -4(1+\nu)(a^{-4} b^{2} - a^2 b^{-4})/E + \{ 4(3+\nu\bar{\nu}) a^2 b^{-4} + 4(1+\bar{\nu})(3-\nu) \\
&\quad a^{-4} b^{2} + 12(\nu-\bar{\nu}) a^{-2} \} / \bar{E} \\
\gamma' &= 6(1+\nu) p/E
\end{aligned}
\qquad (4.2.3.)
$$

条件(ii) 覆工の裏込めが充分でなかつたり、そのほかの原因で覆工と地山との附着が完全でない場合に与えられるもので、覆工と地山との境界線上で両者のせん断応力が零であると仮定される。この場合の（４、２、１）式中の定数はつぎのごとく与えられる。

$$
\left.
\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{pa}{E} \Big/ \left\{ \frac{(1-\bar{\nu})}{\bar{E}} a b^{-2} \quad \frac{(1+\bar{\nu})}{\bar{E}} a^{-1} \quad \frac{(1+\nu)}{E} (a^{-1} - a b^{-2}) \right\} \\
\bar{b}_0 &= -b^{2} \bar{a}_0 / 2 \\
\bar{a}_2 &= \beta'\gamma (\alpha\beta' - \alpha'\beta), \quad \bar{b}_2 = -b^{-2} (2a_2 + b^{-2} \bar{b}'_2) / 3
\end{aligned}
\right\} \quad (4.2.4.)
$$

$$\bar{a}'_2 = -b^4 \left(\bar{a}^2 + 2b^{-2}\, \bar{b}'_2 \right) / 3 \qquad \bar{b}'_2 = \alpha'\beta / (\alpha'\beta - \alpha\beta')$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha = -(5-\nu)\,(a^{-4}\,b^4 - 1)/E + (1+\bar{\nu})\,(a^{-4}\,b^4 + 3)/\bar{E} - 4\bar{\nu}a^2\,b^{-2}/\bar{E}\\
&\beta = 2a^{-2}\{-(5-\nu)\,(a^2\,b^{2}-1)/E - (\bar{\nu}a^4\,b^{-4} + 3)/\bar{E} + (1+\bar{\nu})\,\bar{a}^2\,b^2/\bar{E}\\
&\gamma = -3p/E\\
&\alpha' = (a^{-4}\,b^4 - 2a^2\,b^2 + 1), \qquad \beta' = -(a^2\,b^{-4} + a^{-2} - 2a^{-4}\,b^2)
\end{aligned}\right\} \quad (4.2.5)$$

上で示した条件はいずれも極端な場合であつて、実際の地山状態ではその中間にあるるとはもちろんである。

(2) 数値計算結果とその考察

地山の弾性係数の変化による覆工内周辺応力分布、内部応力分布の相違をしらべるために、覆土コンクリートの弾性係数 $\bar{E}=2$、0×10^5 Kg/cm² ポアツソン比 $\bar{\nu}=1/4$ とし、それに対して地山のそれらを $E=4.0\times10^4$, 1.0×10^5, 2.0×10^5 Kg/cm², 4.0×10^5 Kg/cm², $\nu=1/4$ と変化させた場合について計算を行い、つぎに覆工厚さが応力の大きさおよび分布状態に及ぼす影響を明らかにするために、覆工の外径 $a=4.0$ に対して内径 $b=3.0$, 3.2, 3.4, 3.6 の場合について応力の計算を行つた。計算結果より、まず $E/\bar{E}$ をパラメーターとして $=3$ および 3.6 のときの覆工内周辺に沿う応力分布を示すと図－4、2、1および図－4、2、2のようになる。また覆工厚（$a-b$）$/a$ と内壁各点における応力との関係を $E/\bar{E}=0.2$、2.0 の場合について求めれば図4.2.3および図－4.2.4のようである。これらの図よりつぎのようなことが明らかにされる。$b=3$ の場合には、条件(ii)の場合が条件(i)の場合に比して周辺応力は内壁全体にわたつて小さくとくに頂部の引張応力は $E/\bar{E}>0.5$ の場合にはいちぢるしく小さくなり、$E/\bar{E}$ の大きいときには圧縮応力を生ずるようになる。$b=3.6$ m になれば応力分布状態は、条件(i)の場合には $b=3$ m の場合より大きくは変化しないが、条件(ii)の場合ではかなり変化を示し、側壁では圧縮応力を減少し、頂部では引張応力から圧縮応力に変化して内壁全体にわたつて圧縮応力となり、分布状態は均一化される傾向にある。条件 (i)(ii) の場合とも覆工内周辺応力は地山の弾性係数の増大に伴つて減少するが、側壁部では両者同じような傾向の減少る示すのに対して頂部では条件(ii)の場合の応力減少が急激である。地山の弾性係数が応力状態に及ぼす影響は覆工の厚みによつて異なるが、図－4.2.5および図－4.2.6からも明らかである。一般に条件(i)の場合はその地山の弾性係数の影響は覆工厚によつてあまり変らないが、条件(ii)ではかなり変化し、とくに頂部においてはその傾向ははなはだしい。

覆工の厚さが応力状態に及ぼす影響は条件(i)の場合は小さく、内壁全体にわたつて一様に応力値を変化する。すなわち $E/\bar{E}=1.0$ を境にして $E/\bar{E}>1.0$ では覆工厚の増大によつて応力を増加し、逆に $E/\bar{E}>1.0$ ではそれを減少する、しかし応力分布形状は覆工厚の変化によつてもほとんど変

らず、とくに$E'/E>0.5$の場合には応力状態はこの計算で用いた範囲内での覆工の厚みにほとんど無関係であるとみてよい。これに反して条件(ii)の場合では覆工の厚みによつて応力状態はかなり変化し、$E'/E>1.0$の場合にはいづれの場工厚に対しても内壁に引張応力を生じないようになる。

つぎに覆工内部の応力分布について考察するために、$\theta=0°\ 45°\ 90°$ の断面に沿う内部応力成分を算出した。その結果を図示すると図一4.2.7および図一4.2.8のようである。いすれの場合もσ_r および$\tau_{r\theta}$はσ_θ に比してきわめて小さい。条件(i)の場合は覆工の内壁頂部近傍に引張応力を生ずるのみで、ほかの部分はすべて圧縮応力を生じるが、条件(ii)の場合には内壁頂部だけでなく外側壁部の近傍にも引張応力を生ずる。またこの場合は頂部外壁にかなり大きい圧縮応力を生ずることも見逃せないことである。条件(i)(ii) の場合とも$E'/E=2.0$のときはσ_θ は覆工厚の大きさによつてもほとんど変化していないが、$E'/E=0.2$のときには、条件(i)の場合は覆工厚の減少にともなつて側壁部の圧縮応力 σ_θを増加し、頂部の σ_θは引張応力のみとなる傾向がある。これに対して条件 の場合では、$\theta=45$ 附近の断面では覆工の厚さによつてσ_θ は大きくは変化しないが、覆工厚の減少にともなつて内壁頂部および外側壁部の引張応力が圧縮応力に変化し、また頂部断面および側壁部断面に沿う σ_θは減少する傾向がある。

2.2. 円形立坑の覆工応力状態

(1) 弾性地山の場合

弾性地山中の巻立を施した立坑の応力状態については才2篇9・1に近似解法を示しているが、その解を用いれば覆工の各成分応力は次式で与えられる。(図一2.9.2.参照)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= A/r^2+2C\\ \sigma_\theta &= -A/r^2+2C\\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(4.2.6.)$$

上式でA、C は地山および覆工の条件によつて決まる定数であつて、覆工と地山とがその境界面で完全に附着していると仮定して、地山の弾性係数E、ポアッソン比ν、単位体積重量γ、覆工のそれらをE'、ν' 覆工の外、内径を a、bとすれば、地表面よりzなる深さにおける覆工に対して次式のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}A &= \frac{2(1-\nu)E_o b^2 Wz}{D}\\ C &= -\frac{(1-\nu)E_o Wz}{D}\end{aligned}\right\}\qquad(4.2.7.)$$

ここに

$$D=\frac{1+\nu'}{1+\nu}(2-2\nu'+r_o^2)+(1-r_o^2)E_o$$

$$E_o=E'/E\quad r_o=b/a\quad W=\frac{\nu}{1-\nu}\gamma$$

したがつていま

$$K_1=\frac{2(1-\nu)E_o}{D}\qquad R=b/r\qquad(4.2.8.)$$

とおけば、$z=H$における覆工の各成分応力は次式のように表わされる。

$$\sigma_r = -WHK_1(1-R^2)$$
$$\sigma_\theta = -WHK_1(1+R^2) \qquad (4.2.9.)$$
$$\tau_{r\theta} = 0$$

とくに覆工内周辺においては$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$となり、$\sigma_\theta$ は

$$\sigma_\theta = -2WHK_1 \qquad (4.2.10.)$$

となる。

いま才2篇9・1で行つた数値計算の場合と同じ条件で覆工の内部応力を算定する。計算に用いた諸条件を列記すると、覆工外径 $a=2.9m$、内径 $b=$ 2.5 m、地山岩盤の単位体積重量$\gamma=$ 2.4 t/m^3 である。1例として$H=300$ mの水平面における覆工内の応力分布を示すと図ー4.2.9のようにきる。覆工内のσ_rはσ_θに比してかなり小さい。ここでは数値計算例として一つの場合しか示していないが、ここで述べた近似解法は結局は2・1で述べた解を重畳して得られる特別な場合であり、したがつて地山と覆工との弾性係数比E/E'や覆工厚さに対する応力状態の変化も2・2の結果から求めることができる。この場合には覆工円環には静水圧的な荷重が作用するから引張応力を生じないことは明らかである。

(2) 弾塑性地山の場合

この場合の覆工を施した立坑の周辺応力問題については才2篇9・2で地山材料を非圧縮性と考えた場合の近似解法を示しているが、それによれば覆工内の応力成分は次式で与えられる。(図ー2.9.4参照)

$$\sigma_r = \frac{a^2}{a^2-b^2}\left\{k\left(1-2\log\frac{a}{\rho}\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\nu z\right\}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) \qquad (4.2.11.)$$
$$\sigma_\theta = \frac{a^2}{a^2-b^2}\left\{k\left(1-2\log\frac{a}{\rho}\right)-\frac{\nu}{1-\nu}\nu z\right\}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)$$

上式の記号は(1)の場合に用いたものと同じであり、またkは地山材料の単純せん断の時の降伏限度ρは弾塑性境界の半径であつて、次式から求められる。

$$M\rho^2 + \log\rho - F = 0$$

ここに

$$M = \frac{a^2-b^2}{2a^2}\cdot\frac{1}{\{b^2+(1-2\nu')a^2\}}\cdot\frac{(1+\nu)E'}{(1+\nu')E} \qquad (4.2.12)$$
$$F = \log a - \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\nu z}{k}$$

したがつて地山および覆工の条件が与えられれば(4.2.12.)式より弾塑性境界の半径ρが定まるから、その値を(4.2 11)に用いて覆工内の応力状態を求めることができる。

上に示した応力式を用いて数値計算を行つた結果を示すとつぎのようである。いま覆工の外径$=2.9$ m、内径$a=2.5$ mとし、地山材料として$b=1.5\times10^5\ \mathrm{Kg/cm^2}$ $\nu=0.3$ $k=25\ \mathrm{Kg/cm^2}$ $\gamma=2.4\ t/m^3$の岩盤を考える。また覆工のコンクリートにたいしては$E \fallingdotseq 2.0\times10^5\ \mathrm{Kg/cm^2}$、$\nu'=$ 0.15をとるものとして、$z=500$ mの水平面における覆工内の応力分布を求める。これらの数

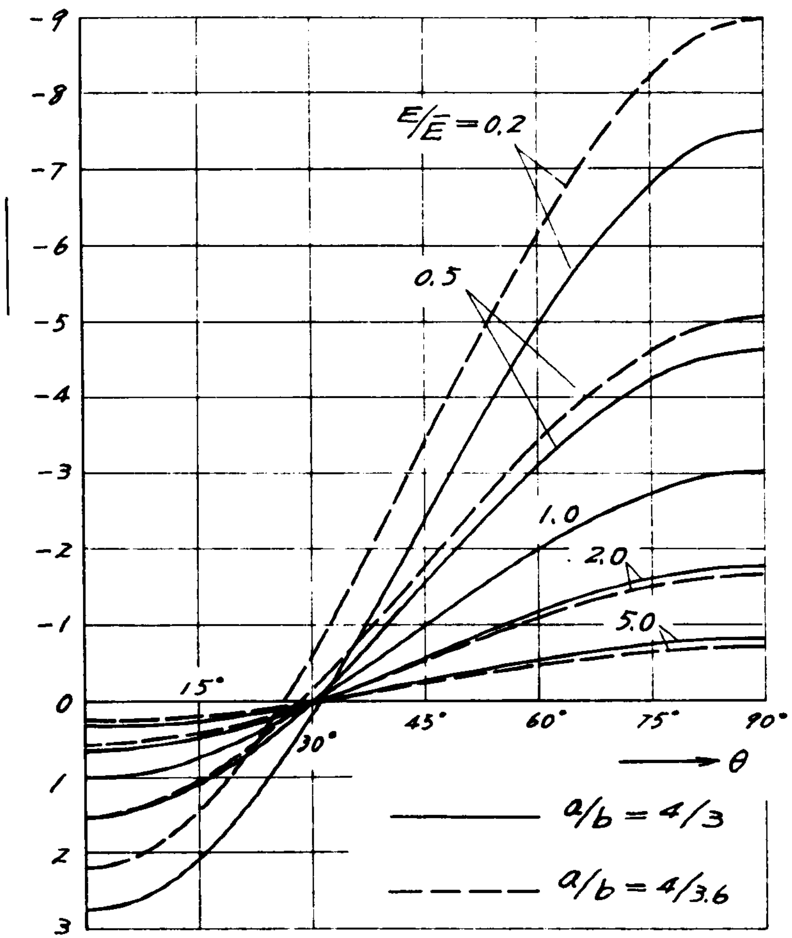
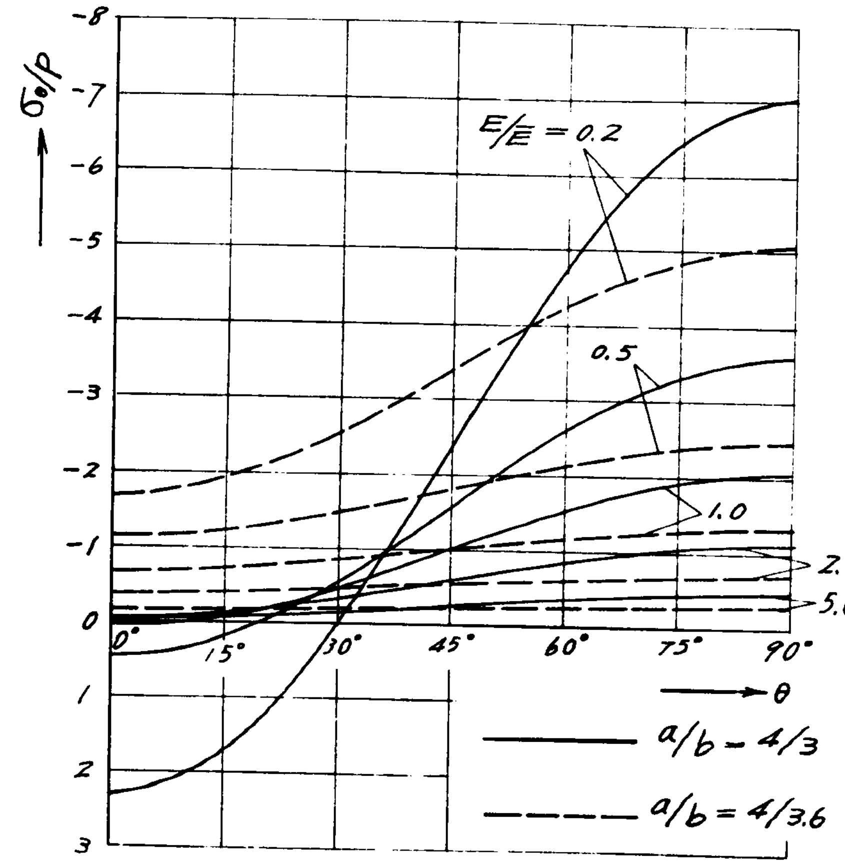
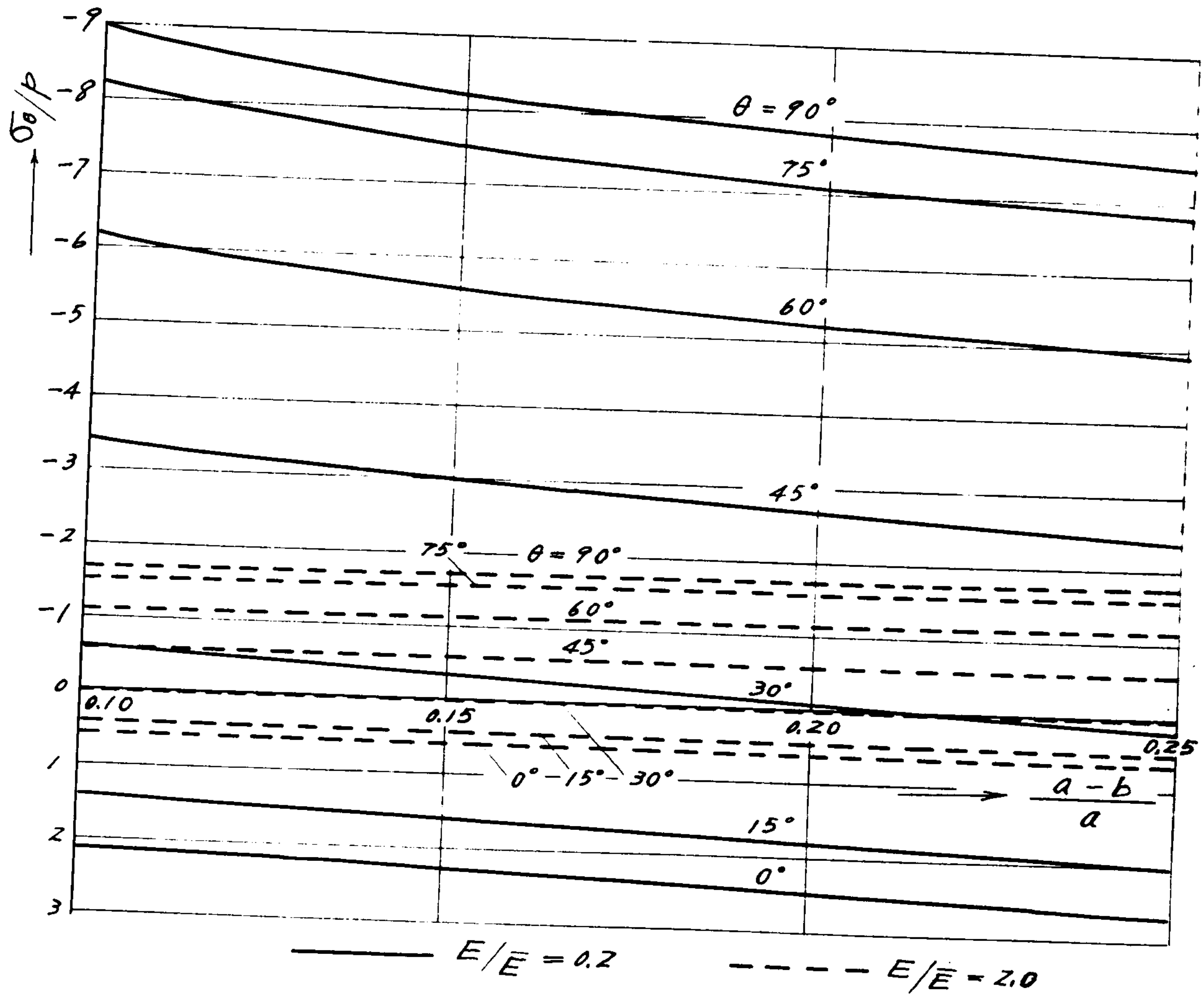


図-4・2・1　条件(i)の場合



図－4・2・2　条件（ii）の場合



σ_θ/p
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
$\theta=90°$
75°
60°
45°
75°
$\theta=90°$
60°
45°
30°
0.10
0.15
0.20
0.25
0°
15°
30°
15°
0°
$\frac{a-b}{a}$
$E/\bar{E}=0.2$
$E/\bar{E}=2.0$

図-4・2・3　条件(i)の場合

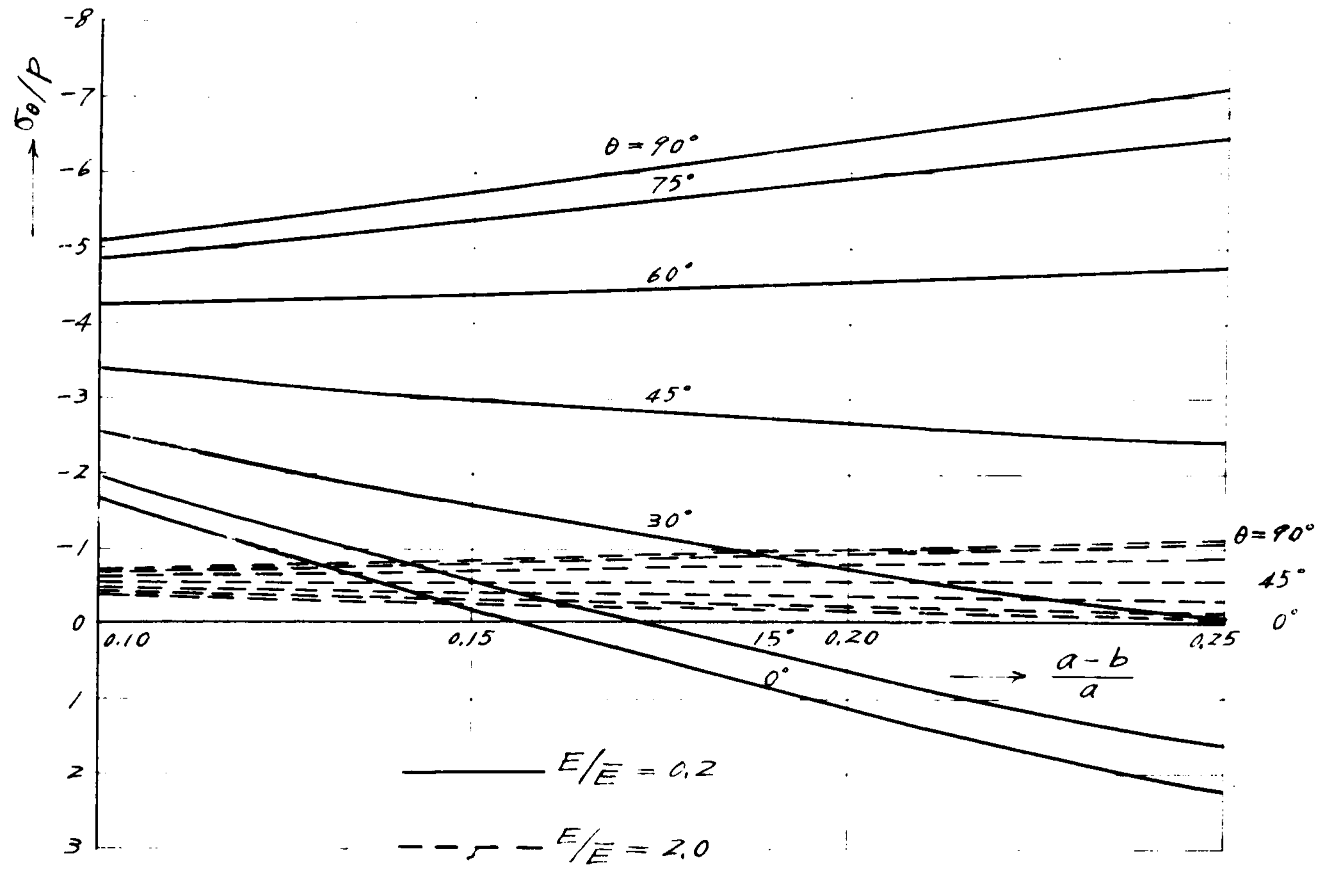


図-4·2·4 条件(ii)の場合

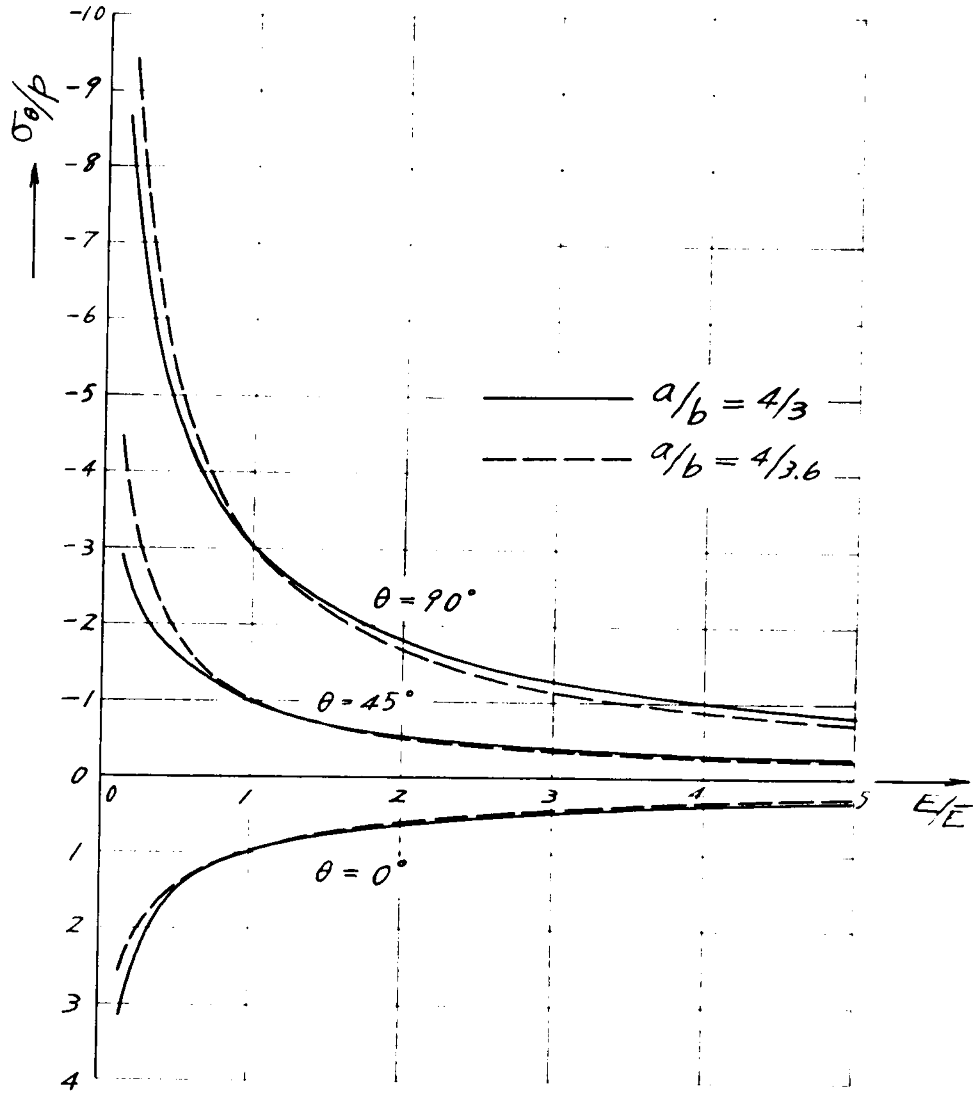


図-4·2·5　条件(i)の場合

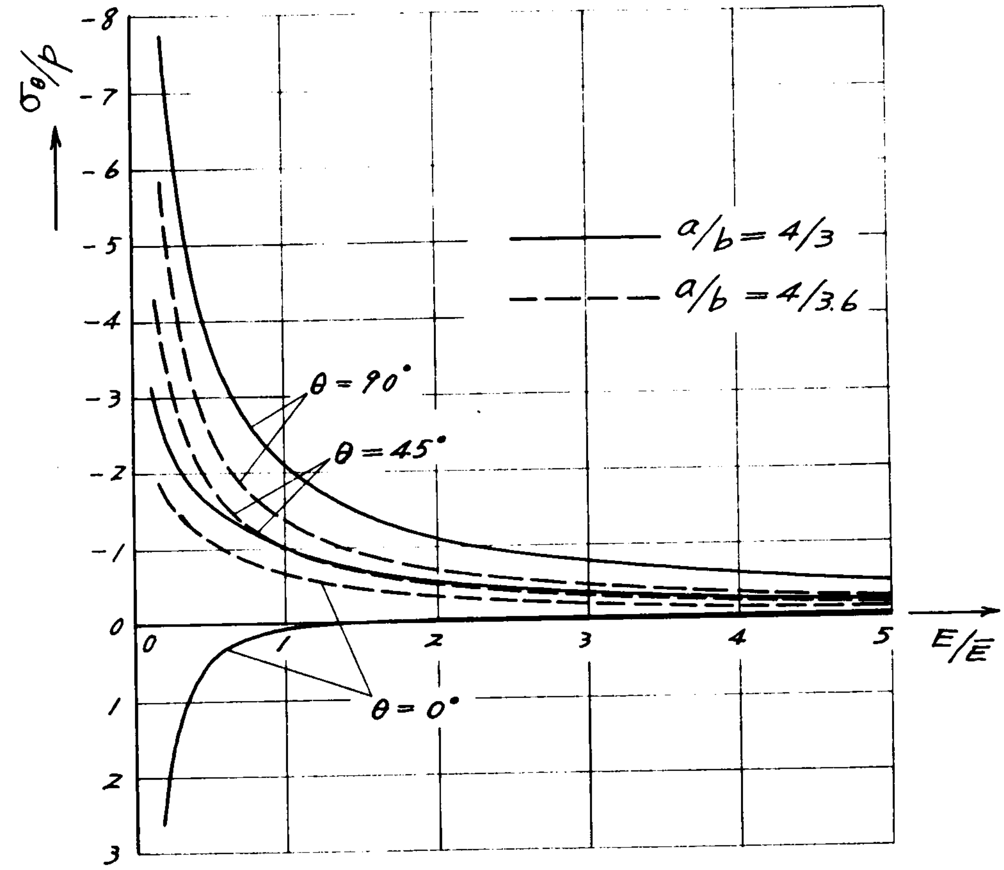
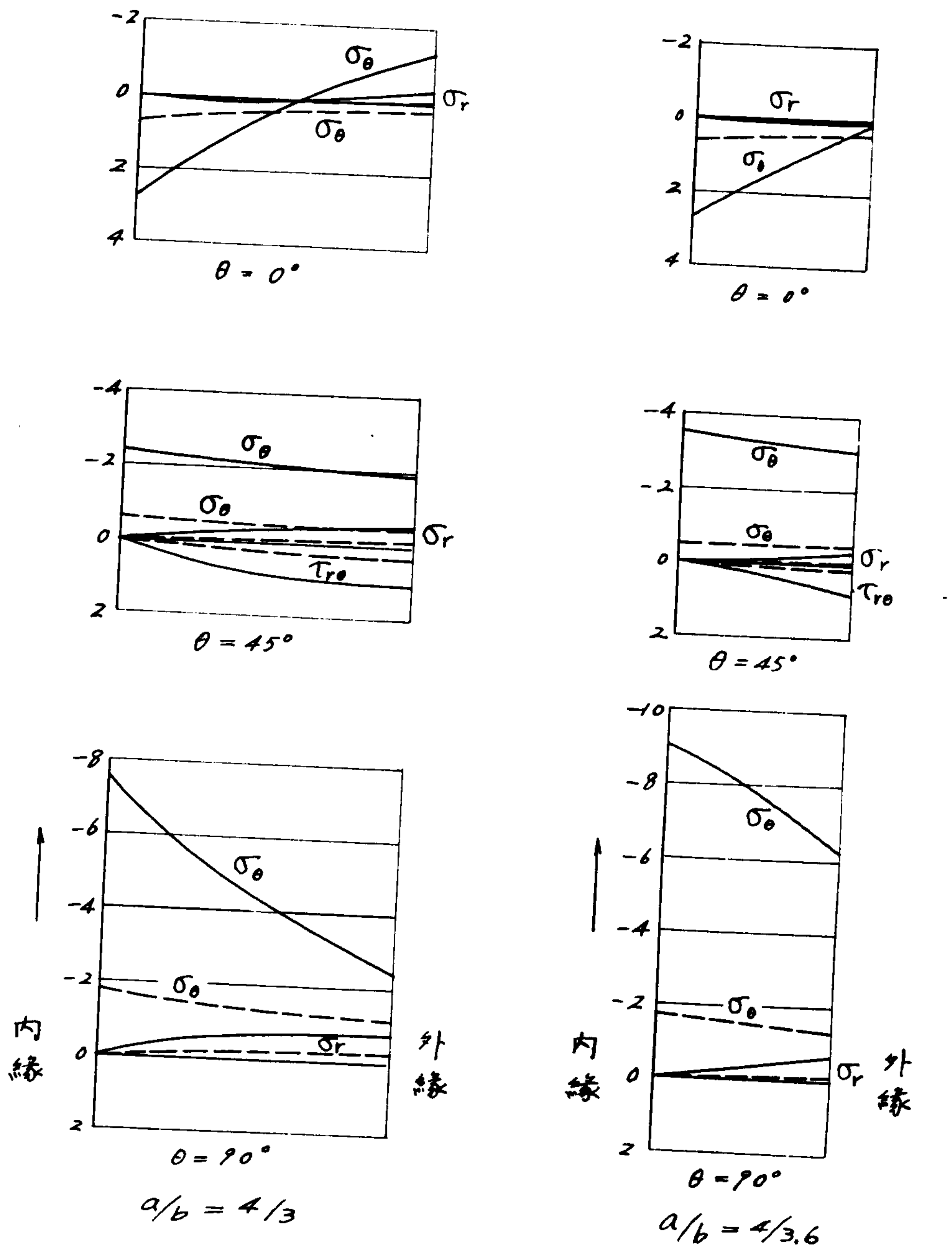


図-4・2・6　条件(ii)の場合



———— $E/\bar{E} = 0.2$

- - - - - $E/\bar{E} = 2.0$

図-4・2・7　条件(i)の場合

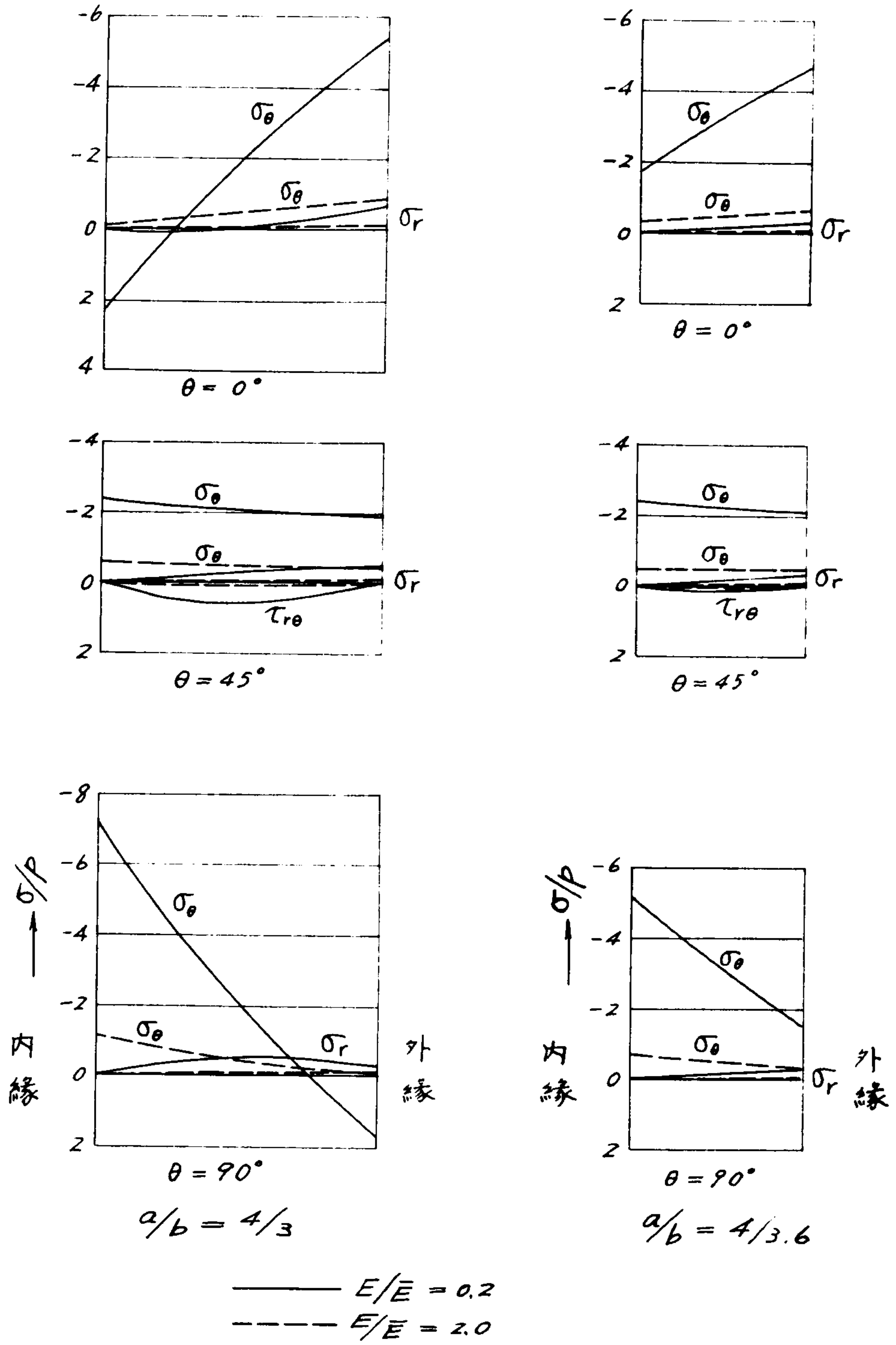
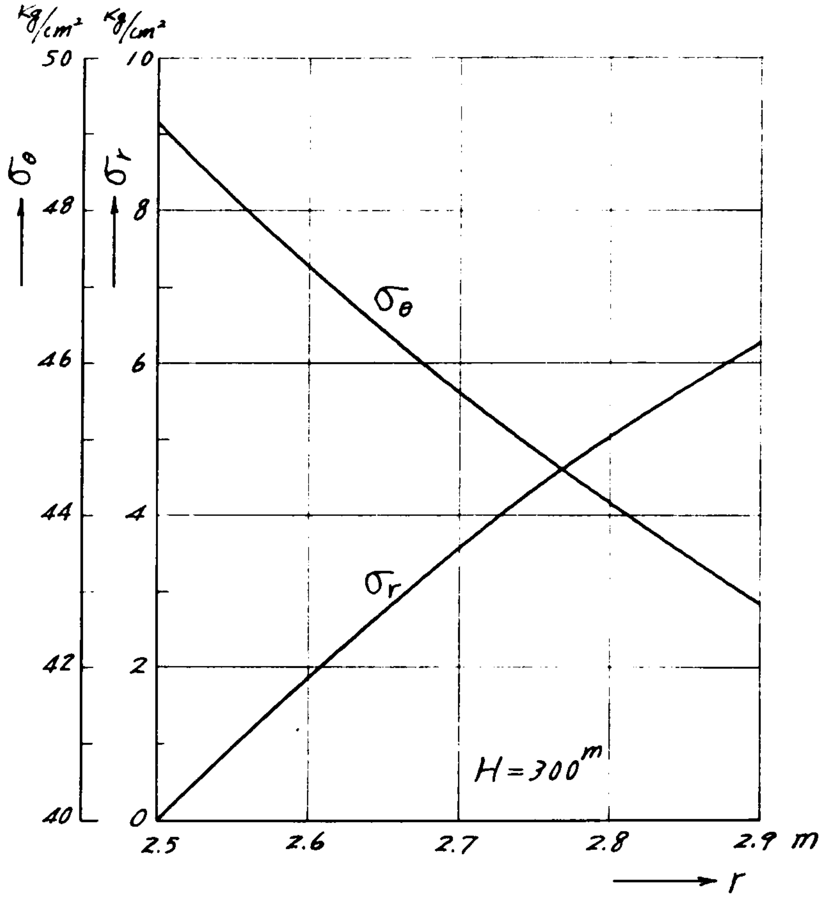
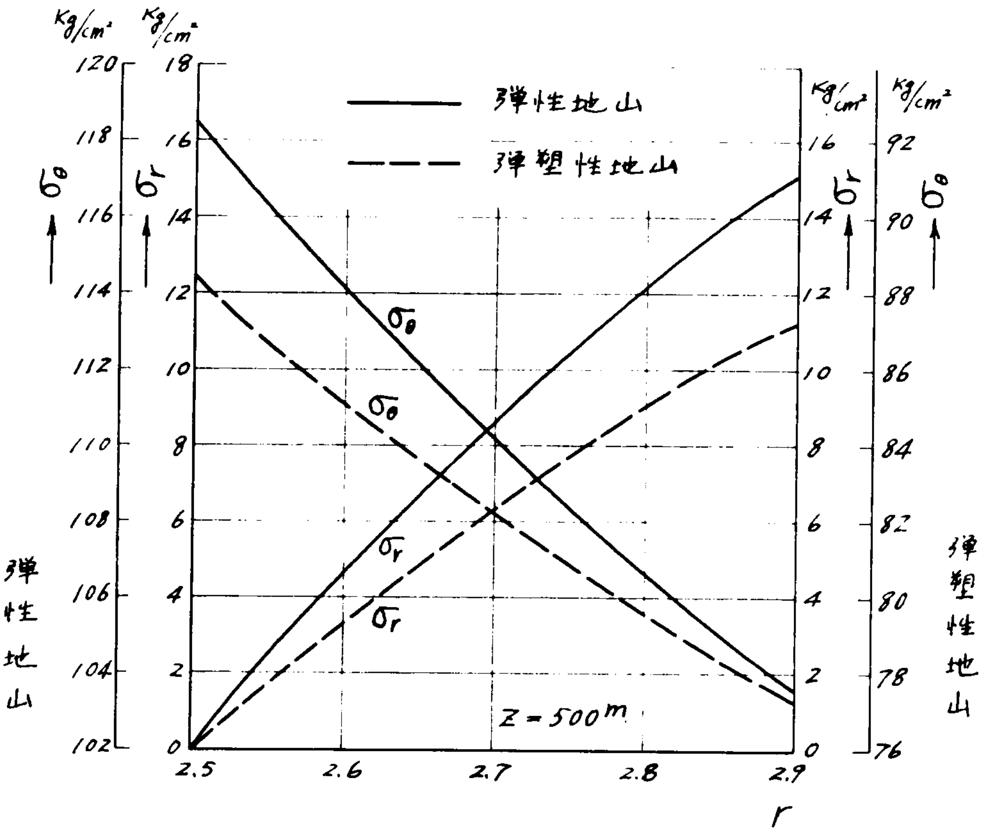


図-4・2・8　条件(ii)の場合



Kg/cm²
Kg/cm²
50
10
48
8
46
6
44
4
42
2
40
0
σθ
σr
σθ
σr
H=300m
2.5
2.6
2.7
2.8
2.9 m
r

図 - 4・2・9



Kg/cm²
Kg/cm²
120
118
116
114
112
110
108
106
104
102
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
σθ
σr
弾性地山
弾塑性地山
σθ
σθ
σr
σr
Z = 500m
Kg/cm²
Kg/cm²
16
14
12
10
8
6
4
2
0
92
90
88
86
84
82
80
78
76
σr
σθ
弾性地山
弾塑性地山
2.5
2.6
2.7
2.8
2.9
r

図－4・2・10

値を（4.2.12）式に用い、図式的にそれを解けば $\rho=3.91m$ をうる。そしてこの場合の覆工内の応力分布は図－4.2.1 0.に示すごとく得られる。なお比較のために地山の k が大きく、立坑周辺の地山がなお弾性状態を保っていると考えた場合の覆工内の応力分布を、厚肉内管にたいする式より計算し、同時に図示した。一般に立坑周囲の地山が弾塑性応力状態になると、弾性応力応態にある場合よりも立坑周辺応力が減少することは才2篇9・2で述べたとおりであるが、覆工内の応力 σ_r も σ_θ も同時に減少することが図－4.2.1 0より明らかにされる。なお立坑周囲の地山が弾塑性状態になつたための覆工内の応力の減少は、地山内の応力の減少と同様に、地山材料の k の値や立坑の深さ h によつて異なる。言いかえればある深さにおいては弾塑性領域の境界半径 ρ に関係してくる。

才３章　膨脹性地山における坑道覆工周辺応力に関する一考察

軟弱な地質、たとえば温泉余土や風化した頁岩などからなる地山中に坑道を開削する場合、しばしば地山の膨脹に伴つて強大な土圧を生じ、断面を縮少して支保工や覆工を破壊するような例が少くない。このように強い側圧と盤膨れを伴うような地山を膨脹性地山と呼んでいるが、この場合の地圧を適確に把握することはきわめて困難なことである。膨脹性地山におけるずい道の土圧に関しては野沢[11]が長期間にわたる現場実測によるかなり詳細な資料を報告しており、その結果より適切な施工法について述べているが、ここではある膨脹性地山におけるずい道覆工の破壊状態より、地圧の状態について弾性理論的および光弾性実験的に考察を行つた。

本研究において対象とされた水路ずい道は白土化した蛇紋岩あるいは流紋岩地質の地山を通過し、それらの地質がずい道開削に伴う吸湿によつて一様な膨脹を惹起し、覆工は均一ないちぢるしい圧力をうけた。そのためずい道施工中覆工の拱頂にいちぢるしい圧縮亀裂が発生し、補強鉄筋を挫屈し、また拱$1/4$点附近に引張亀裂が発生した。この点にかんがみ、このように掘削面が一様に膨脹して均一圧力を及ぼすずい道覆工の内周辺応力状態を研明し、亀裂の発生原因を明らかにするために、つぎのような理論的および実験的考察を行つた。

3・1　理論的考察

ずい道断面は図－4.3 1 に示すように、標準馬蹄形断面であつて円形に近い。したがつて理論的に基礎考察を行うためには、円形として取り扱うのが便利である。それゆえつぎのずい道覆工を表わす円環、インバートが未完成の場合に相当する切目のある円環および覆工上部の半円形アーチについて、若干の荷重状態を仮定して計算を行つた。この仮定した荷重分布は概念的なものがあつて、計算を簡単にするため作用方向はすべて半径方向であつて、それ自身釣合を保つように定めた。

(1)　円環の応力分布

まず基礎的考察として、円形のずい道覆工（外径a、内径b、図－4・3・2（a）参照）が種々の分布荷重をうける場合の周辺応力を計算する。

i)　等分布荷重1が作用する場合（図－4・3・3参照）掘削面が一様に膨脹する場合、その中に存在する構造物が円環のようにあらゆる方向の剛性が等しいならば、等分布の荷重1が作用すると考えられる。このような場合の円環内の応力状態を表わす$Airy$の応力関数は、

$$F = A_0 r^2 + B_0 \log r \qquad (4.3.1)$$

で、境界条件は、

$$\left.\begin{aligned} r=a\text{において}\quad & \sigma_r = const = 1,\ \tau_{r\theta} = 0 \\ r=b\text{において、}\quad & \sigma_r = 0,\quad \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.2)$$

で表わされる。これより$b/a = 0.8142$ の場合の周辺応力を求めれば、

$$(\sigma_\theta)_{r=b} = -2a^2/(a^2-b^2) = -5.935 \qquad (4.3.3)$$

となる。すなわちこれを図示すれば、図－4・3・4 (a) 1図曲線のように周辺一様な圧縮応力分布がえられるのであつて、その大きさは等分布外荷重の 5.935 倍である。

ii) 分布荷重2が作用する場合

円環に作用する分布荷重2による周辺応力を求めよう。この仮定した荷重分布曲線は、円環が上と同じ均一な地圧状態の中にあり、しかもその頂部の施工後の裏込めが完全でなく、中心角約60°の区間に間隙があり、この部分に地圧が作用しない場合に想像せられるものである。このような場合の $Airy$ の応力関数は

$$F=A_{\circ}r^2+B_{\circ}\log r+\sum_{n=2}^{\infty}\{A_n r^{n+2}+B_n r^{-n}+C_n r^n+D_n r^{-n+2}\}\cos n\theta \quad (4.3.4)$$

で、境界条件は、

において

$$r=a \text{ において、} \sigma_r=a_{\circ}+a_{\circ}+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n \cos n\theta)$$

$$\tau_{r\theta}=0 \qquad (4.3.5.)$$

$$r=b \text{ において、} \sigma_r=0\ ,\ \tau_{r\theta}=0$$

で表わされる。すなわち、荷重分布を $cosine$ 級数（１２項）で展開すれば (i) と同様にして周辺応力 $(\sigma_\theta)_{r=b}$ を求めることができるのであつて

$$(\sigma_\theta)_{r=b}=2A_{\circ}-B_{\circ}b^{-2}+\sum_{n=2}^{\infty}\{(n+1)(n+2)A_n b^n$$
$$+n(n+1)B_n b^{-2-n}+n(n-1)C_n b^{n-2}$$
$$+(n-1)(+2)D_n b^{-n}\}\cos n\theta \qquad (4.3.6)$$

となる。この数値計算る図示すれば図－4・3・4(i)2曲線のようである。すなわち頂部および底部には等分布荷重強度の 2.758 倍の圧縮応力が惹起され、$\theta=45°\sim115°$ の範囲で最大 13.29 倍の引張応力が惹起せられる。しかしこの引張応力の位置から考えて、これによつてここで対象とする亀裂は説明できないように思われる。

iii) 分布荷重3が作用する場合

つぎに実際に惹起せられた亀裂の発生を説明するに好都合であると考えられる荷重分布3による円環周辺応力について考察する。この場合の周辺応力も上と全く同様にしてつぎのように求めることができる。ただし荷重の cosine 級数による展開式は $\theta=170°$以上の領域でその精度をかなり抵下するが、計算の煩雑を避けるために一応１２項展開を採用した。この場合における周辺応力 $(\sigma_\theta)_{r=b}$ を与える式は（４・３・６）式と全く同じであつて、分布荷重３にたいして求められる常数 A_n, B_n, C_n, D_n 等を用いればよい。これを図示すれば図－４・３・４(a) ３曲線のようである。すなわち頂部および $\theta=30°-90°$ の範囲で等分布荷重強度の 14.01 倍および 4.70 倍の圧縮または引張応力が惹起せられ、さらに底部にかなりの引張応力が惹起せられる。この応力状態は亀裂を説明するのに好都合であるが、円環にこのような荷重が作用する可能性が少ないことおよび亀裂はインバース未完成時に発生したことに留意しなければならない。

(2) 切れ目のある円環の応力分布

図ー4・3・2(b) に示すように180°の位置に切れ目がある円環が均一膨脹性の地山中にあり、しかも頂部に中心角約60°の領域に空隙が存在する場合、これに作用する地圧は、簡単のためすべて半径方向に作用し、それ自身釣合を保っているものと考えれば、分布荷重3のように仮定することができる。これは円環の下部には切れ目があり、この附近では構造物の変形が比較的容易に惹起され、膨脹に対する拘束が小さいと考えられるからである。このように仮定すれば応力関数は、[12)]

$$F=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k r^{\frac{2k+1}{2}}+B_k r^{\frac{2k+1}{2}}+C_k r^{\frac{2k+5}{2}}+D_k r^{-\frac{2k-8}{2}}\right)\cos\frac{2k+1}{2}\theta \qquad (4.3.7.)$$

となり、荷重分布を $\cos\frac{2k+1}{2}\theta$ の項の級数で展開すれば、上と同様の計算過程を経て、周辺応力をつぎのように求めることができる。

$$(\sigma\theta)_{r=b}=\sum_{k=0.1.2.}^{\infty}\left\{\cos\frac{2k+1}{2}\theta\,(2k+1)\,a_k\,\frac{\alpha^{\frac{2k-8}{2}}(\alpha^{2k+1})(\alpha^{2}-1)}{(\alpha^{2k+3}-1)-\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{2}\alpha^{2k-1}(\alpha^{2}-1)^{2}}\right. \qquad (4.3.8.)$$

ここに $\alpha=a/b$

ただしこの式を導くにあたつては、切れ目の面におけるせん断応力を無視しているのであるが、実際には上述のような荷重分布にたいしてはこの面にあまり大きなせん断応力が働くとは思われないから、この場合（4・3・8）式を用いて合理的だと思われる。

この計算結果を図示すれば、図ー4・3・4( ) のようである。

以上の結果から、実際のずい道覆工に惹起せられた拱頂部の圧縮破壊、拱¼点の引張破壊を説明しうる状態は円環に分布荷重3で表わされる荷重が載荷せられた場合のみである。しかし均一膨性の地山内でこのような荷重分布が惹起せられる可能性が少いことおよび施工中インバートが未完成のときに亀裂が惹起せられたこと等から考え、これによつてこの亀裂現象を説明できないように思われる。まして切れ目のある円環すなわちインバートがない覆工構造においては、図ー4・3・4(b)よりも明らかなように引張亀裂はまつたく惹起されない。それゆえ覆工の半円アーチと側壁とは一体として1つの構造を形成していないと思われるのであつて、両者の接続部はモーメントには抵抗しえず、ただせん断に対してのみ抵抗しうるように考えられる。それゆえつぎに標準馬　形断面の上部半円アーチの応力状態を支持条件を種々変化して考慮してみることにする。

(3) 半円アーチの応力分布

ここで述べる半円形アーチの応力計算は、煩雑を避けるため構造力学的に取組扱うこととし、荷重状態は(1)半径方向等分布荷重および(2)頂部60°領域は無荷重で他の部分に同様の等分布荷重が作用するものとする。支持状態は単純支持、固定、鉸、繋材支持であつて、計算結果は図ー4・3・5（$a\sim d$）のようである。図中実線は荷重状態(1)、破線は(2)の場合である。これらの結果からつぎの事項が明らかになる。

1. 半円アーチが等分布荷重をうける場合、その内周辺応力は支持条件のいかんに関せずほぼ同じ

である。

2. 拱頂部に中心角60° の空隙が存在する場合

(a) 単純支持では拱頂にいちぢるしい圧縮応力が惹起せられ、内周辺応力はすべて圧縮であり支持部に向つてその値を減じている。

(b) その他の支持状態の場合では $\theta = 30° \sim (75° \sim 85°)$ の領域に引張応力、拱頂および支持部附近に圧縮応力が惹起せられる。その各々の応力値は およぴ繋材支持の場合よく類似しているが、固定支持の場合前2者と若干異つている。

このように半円アーチの拱頂に圧縮力、拱¼点附近に引張応力があらわれるのは、とくにいちぢるしい偏圧が作用しないかぎり、固定、鉸、繋材支持の半円アーチの拱頂における裏込めの不完全さにもとずくものと考えられる。それゆえこの影響をさらに明らかにするため、発生亀裂をもつともよく説明することのできる両 鉸支持の場合については、図―4・3・6(a)に示すように拱頂より θ の位置まで無荷重とし、θ より90° まで等分布荷重が作用するものとして周辺応力を計算によつて求めた。この結果を図示すれば図―4・3・6(b)のようになる。これら θ と拱頂における最大圧縮応力 σ_c、最大引張応力 σ_t および σ_t が惹起せられる中心線からの角度 との関係を図示すれば、それぞれ図―4・3・7(a)(b)のようになる。すなわち

(1) 拱頂における最大圧縮応力は $\theta = 30°$、周辺引張応力は $\theta = 45°$ の場合最大となる。

(2) 内周辺引張応力の惹起せられる位置 θ' は図―4・3・7(b)に示すようにやや複雑な変化をする。

以上の理論的な諸考察によつて、発生亀裂は、覆工が1つの構造物として作用せず半円アーチとして作用し、その側壁と接する所で 支持のように作用し、これに拱頂の空隙の存在による不連続等分布荷重が作用したためと考えられる。

3・2 模型実験

(1) 模型材料の性質

上述の理論的計算と並行して2次元光弾性による模型実験を行つた。すなわちずい道コンクリート覆工を光弾性材料であるフエノライトで作製し、これを石膏材料中に埋設して1辺11 cmの正方形模型をつくり、鉛直および水平方何から等分布荷重を載荷してフエノライト覆工の内周辺応力を求めた。弾性領域では周辺一様の圧縮荷重による応力を求めるためには、この両者の結果を加算すればよい。つぎに模型材料の諸性質について若干考察しよう。

(I) フエノライト材料

実験に使用したフエノライト材料の厚みは0.61 cm でその光弾性常数は 11.08 Kg/cm であつた。スパン10 cm 、高さ2.05 cm の梁で中央集中荷重による撓み試験を行つて弾性係数を求めたが、3回の実験結果の平均は $E_p = 10800$ Kg/cm² であつた。

( ) 石膏材料

石膏材料の配合は、

石膏:硅藻土:水=1.15:0.22:1 である。この材料は打設後かなりの時間を経過するまで載荷によ

つて著しいクリープを惹起する。それゆえ実験結果に理論的な考察を加えるためには、材料が完全に乾燥するのをまつて載荷しなければならないのであるが、フエノライト材料の初期応力の成長を防止するため、加熱も時間の経過も許されなかつた。したがつて打設後４０分に実験荷重を載荷して時間とヒズミの増大との関係すなわちクリープ特性の把握に努めた。実験結果（供試体寸法１１×11×0.61 cm　荷重強度1438 Kg/cm² の１例を掲げれば図―４・３・８のようである。載荷直後ヒズミは急速に増大するが、時間の経過とともにヒズミ増大の割合は減少し、およそ１０分後に安定したヒズミ状態14×10^{-4}に到達する。その後５分間にはほとんどヒズミの増大は認められないが、１５分経過後荷重を除去するとヒズミは除々に回復し始め、５分経過後再び同一荷重を載荷すると２分程度でもとのヒズミ状態に到達する。それゆえ実験は打設後４０分に載荷し、１５分間放置してただちに写真を撮影し、載荷を除去して模型に加工を行い、５分後再び載荷し、さらに５分後に写真を撮影することとした。それゆえ材料の弾性係数としては初期載荷後１５分におけるヒズミを採用して求めた。この値は11000 Kg/cm² であつた。

(2)　円環の応力分布

模型実験の基礎的考察としてまず円環の場合を取り扱つた。すなわち円環の頂部に中心角＝0°30°、60°、90°の空隙を順次設け、これに鉛直および水平より等分布荷重を載荷して周辺応力を求めた。$\theta=30°$ 鉛直方向載荷の場合の等色写真の１例を掲げれば写真―４・３・１(a)（比較のため標準馬蹄形断面の場合を(b)に掲げた）のようであり、解析結果を一括図示すれば図―４・３・９(a)および４・３・１０(b)のようである。円環に半径方向等分布荷重が作用する場合は両者の結果を加算すれば近似的に求められる。いま$\theta=0°$ の場合について加算して求めた結果を示せば図４・３・９(a)点線のようになる。すなわちこの場合半径方向等分布荷重強度の約１、６倍のほぼ一様な周辺応力が作用することとなる。

いま円環体の弾性常数をE', ν' その周辺の弾性体のそれをE, νとし、無限遠に等分布半径方向荷重fが作用する場合（図―４・３・１１参照）の$b\leqq r\leqq a$領域の内周辺応力は、境界条件を、

$r=\infty$において、　$\sigma_r=\sigma_\theta=-f\quad \tau_{r\theta}=0$

$r=a$において、　$\sigma_r=\sigma'_r\ ,\quad \tau_{r\theta}=\tau'_{r\theta}=0\quad u_r=u'_r$

$r=b$において、　$\sigma'_r=\tau'_{r\theta}=0$とすれば

$$(\sigma'_\theta)_{r=b}=2A'_0-B'_0\,b^{-2}$$

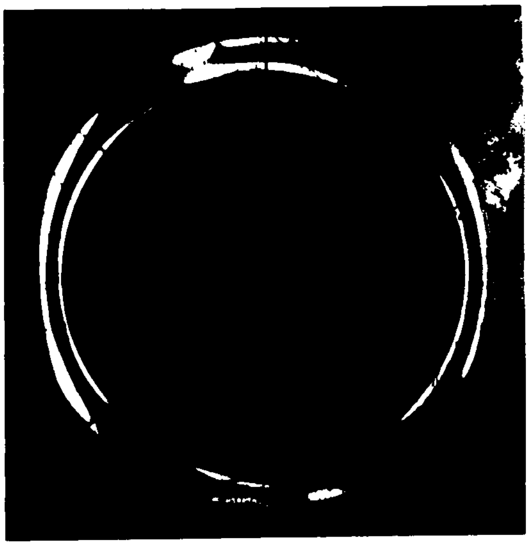
$$A'_0=-b^{-2}B'_0/2\qquad B'_0=2ef/\{e(1+\nu)(a^{-2}-b^{-2})$$

$$-b^{-2}(1-\nu')-a^{-2}(1+\nu')\}$$

$$e=E'/E$$

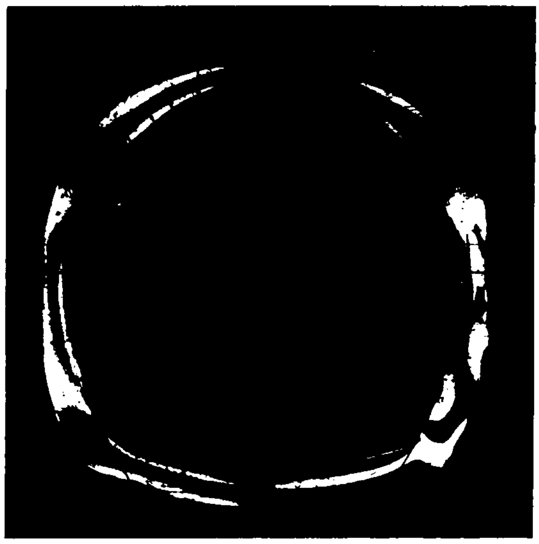
で与えられる。それゆえ$\nu=\nu'=1/4=0.25$、$f=1$, $e=5$、2、1、1/2 1/3 1/5　として計算を遂行すれば$(\sigma'_\theta)_{r=b}$　とeとの関係は図―４・３・１２のようになる。

これより上述の実験は$e=0.8$ の場合に相当すると考えられるが、このことはフエノライトの弾性係数／石膏の弾性係数＝１０.８００／１０.０００＝1.08という事実とかなりよく一致している。



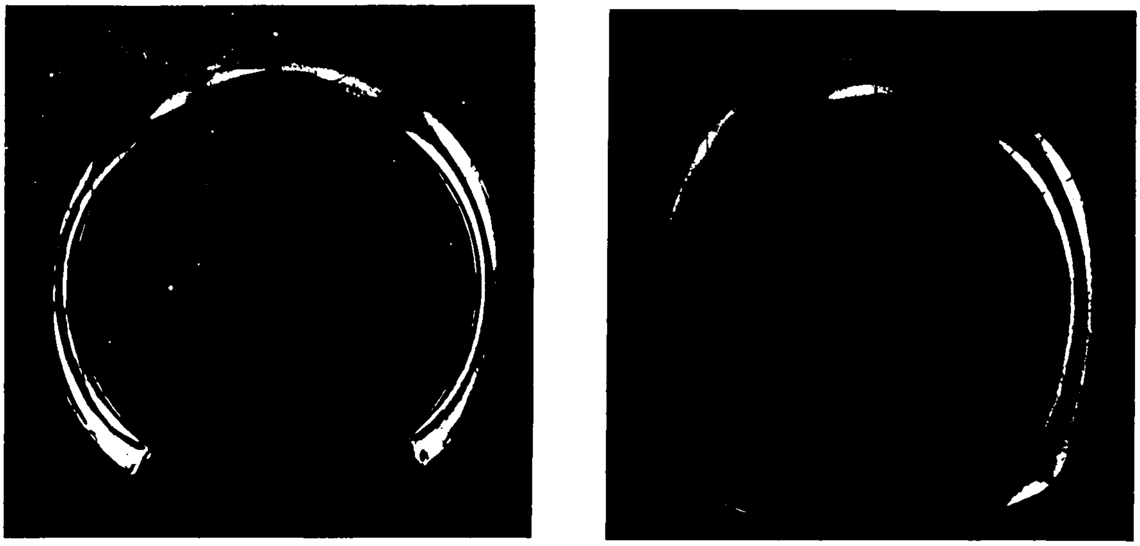
(a) 鉛直荷重

(b_1) 鉛直荷重



(b_2) 水平荷重

写真-4・3・1



(a) (b)

写真－4・3・2

(a) 鉛直荷重 (b) 水平荷重

写真－4・3・3

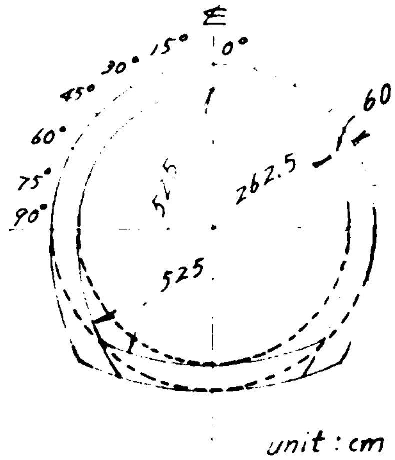


図 - 4・3・1

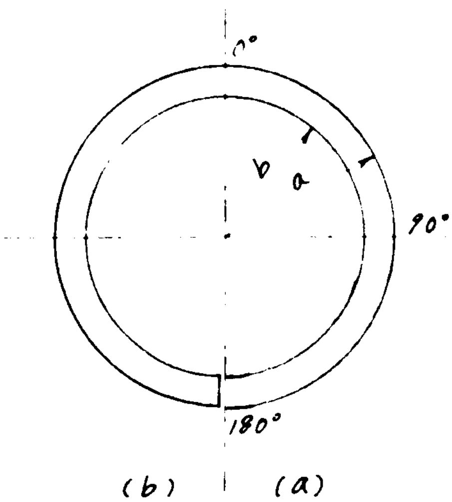


図 - 4・3・2

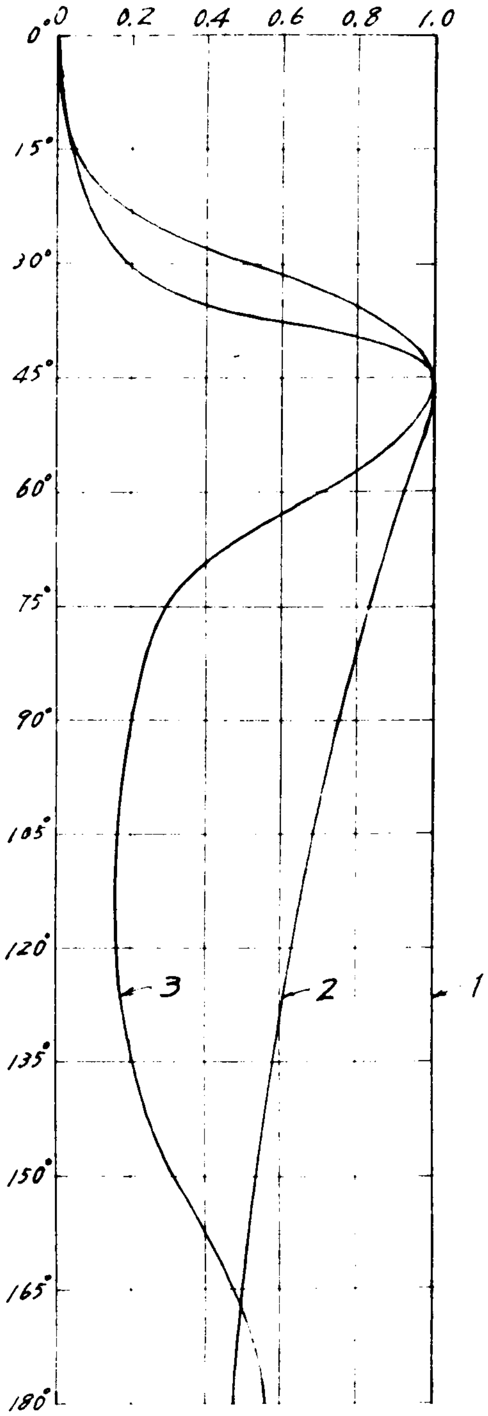

0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
0°
15°
30°
45°
60°
75°
90°
105°
120°
135°
150°
165°
180°
3
2
1

図-4·3·3

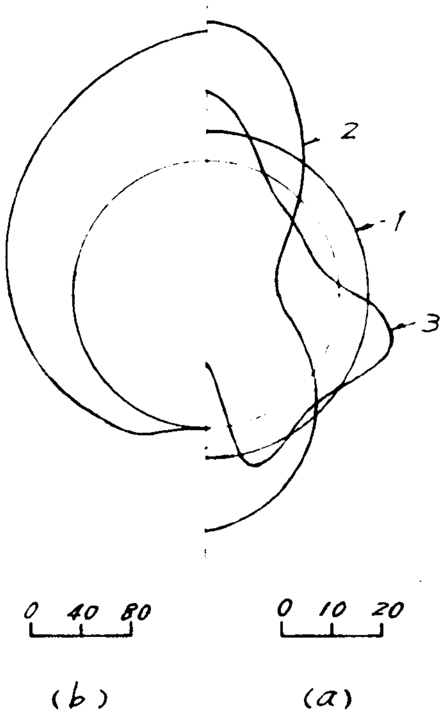
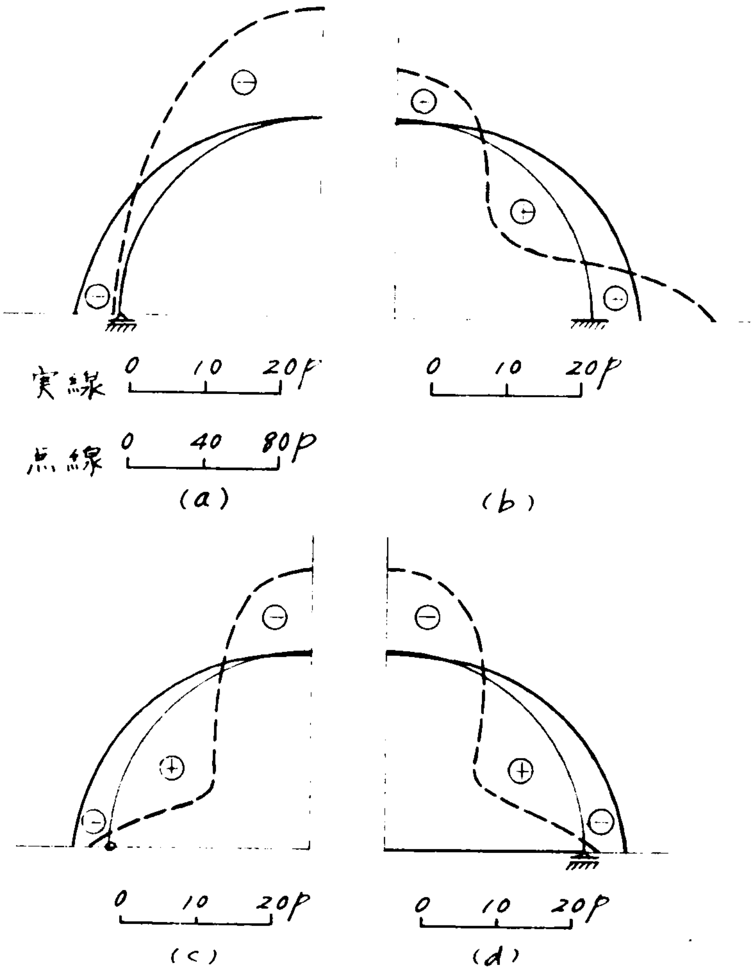
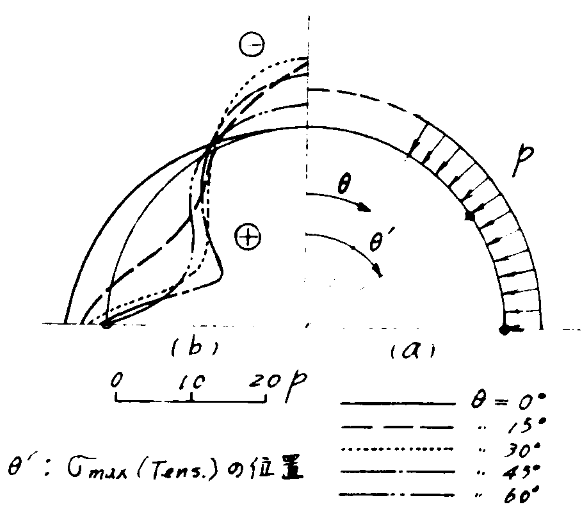

2
1
3
0 40 80
0 10 20
(b)
(a)

図-4·3·4



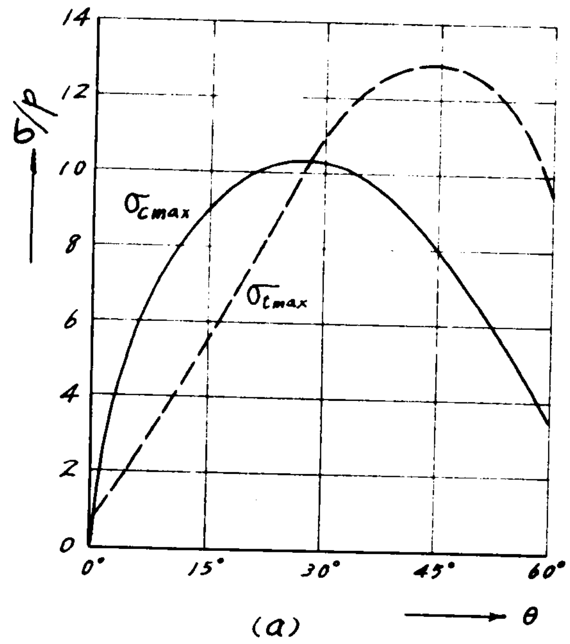
⊖
⊖
⊕
⊖
⊖
実線 0 10 20p
点線 0 40 80p
(a)
0 10 20p
(b)
⊖
⊕
⊖
⊖
⊕
⊖
0 10 20p
(c)
0 10 20p
(d)

図-4・3・5



⊖
⊕
p
θ
θ'
(b)
(a)
0 10 20p
θ = 0°
" 15°
" 30°
" 45°
" 60°
θ' : σmax (Tens.) の位置

図-4・3・6


σ/p
14
12
10
8
6
4
2
0
$\sigma_{c\,max}$
$\sigma_{t\,max}$
0°
15°
30°
45°
60°
(a)
θ

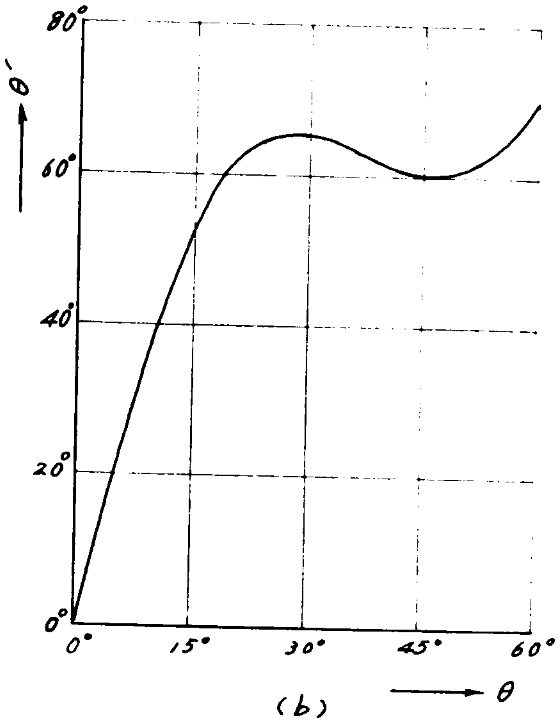

θ'
80°
60°
40°
20°
0°
0°
15°
30°
45°
60°
(b)
θ

図-4・3・7

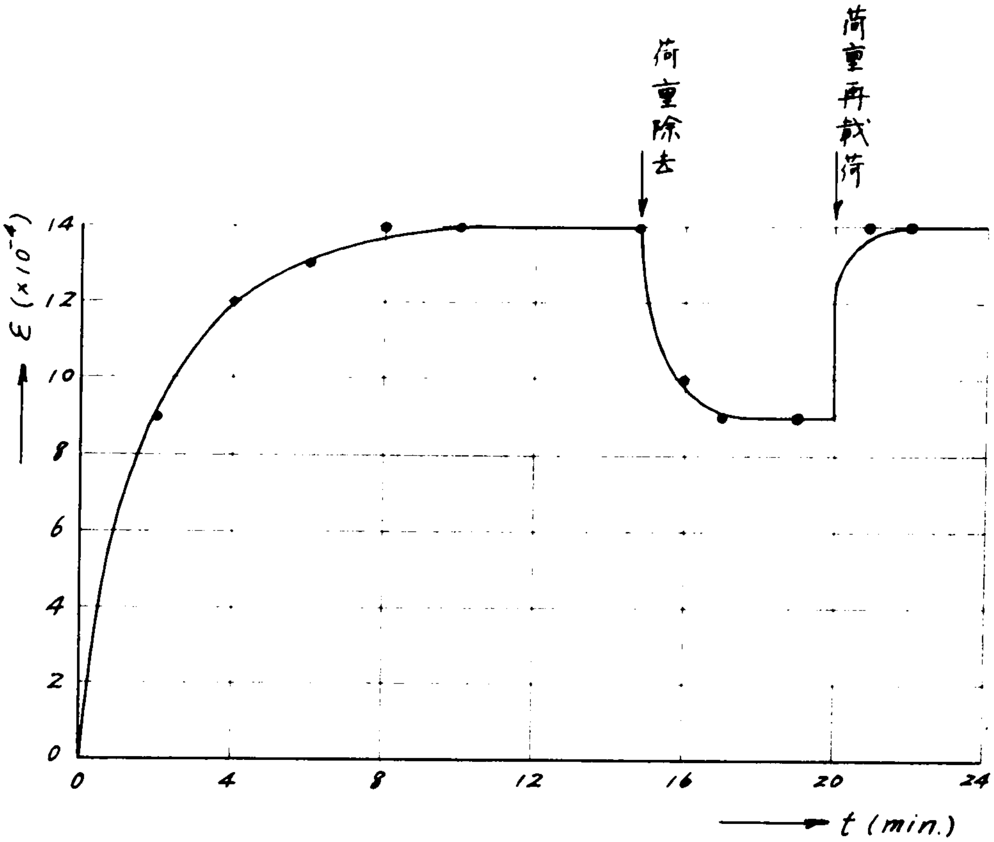


図 − 4・3・8

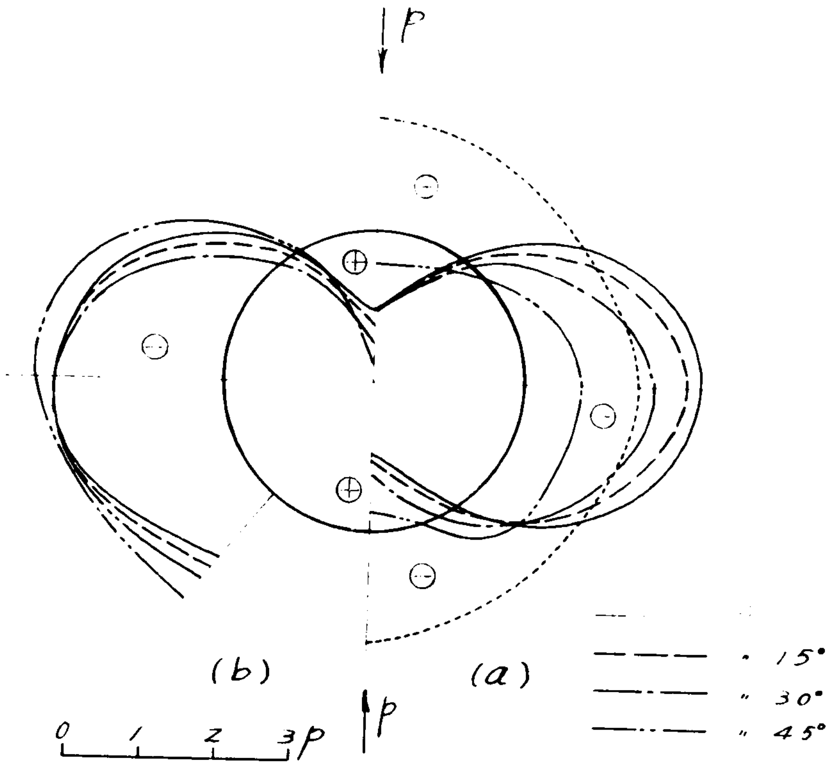


図-4.3.9

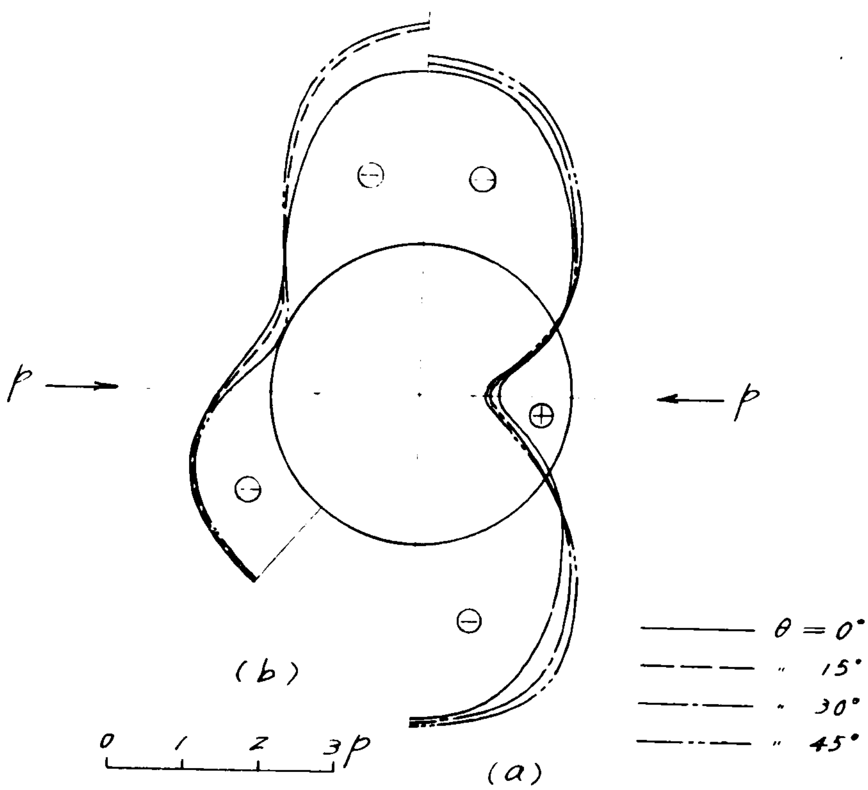


図-4.3.10

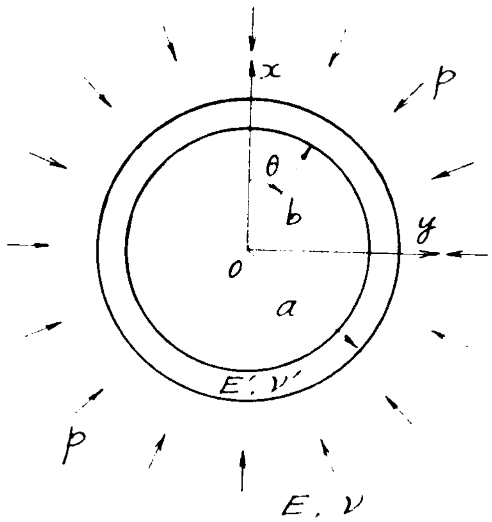


図 - 4・3・11

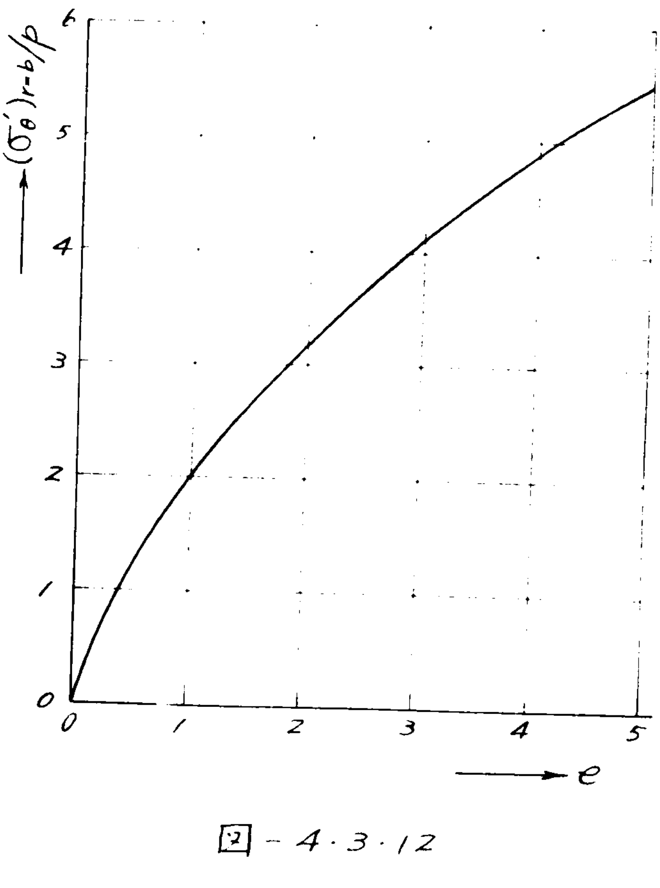


図 - 4・3・12

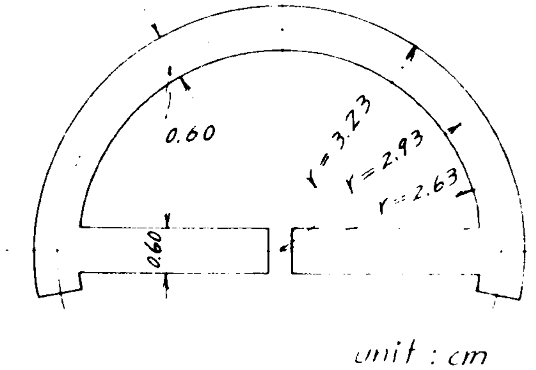


図 - 4・3・13

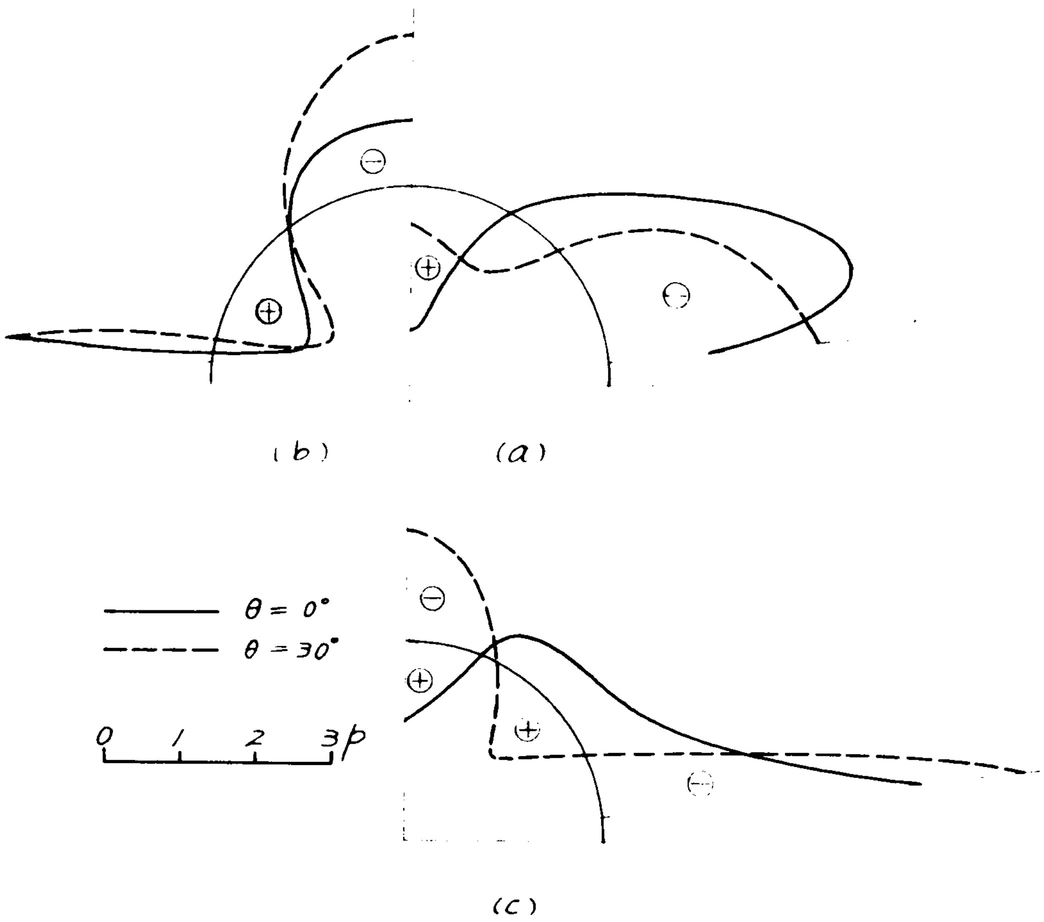


図 - 4・3・14

したがつて、石膏はかなりのクリープを惹起するが、鉛直および水平方向載荷の結果を加算して、およそ半径方向分布荷重による応力を求めることができると考えられる。

(3) 切れ目のある円環の応力分布

切れ目のある円環について上と同様の実験を行つた。

写真4・3・2(a)(比較のため標準馬蹄形のインバートがない場合を(b)に掲げた)は等色線写真の1例であり、解析結果の内周辺応力分布は図一4・3・9(b)、10(b)のようである。

以上の諸実験結果から、上述の等分布半径方向荷重のもとでは、このような構造物の内周辺に引張応力は惹起されないことが明らかになる。

(4) 半円アーチの応力分布

上述の(2)、(3)の結果に基ずき、半円アーチについて同様の実験を行つた。この場合$\theta=0°\ 60°$の2種とし、実験操作の都合上繋材を附し、それを中央で切断した模型を用いた(図一4・3・13参照)$\theta=60°$鉛直方向載荷の場合の等色線を示せば写真一4・3・3のようである。鉛直および水平方向載荷の場合の周辺応力分布は図一4・3・14(a)、(b)のようになり、両者の和は同図(c)のようになる。

この結果から半円アーチの頂部における空隙の存在が応力分布にいちぢるしい影響を及ぼすのであつて、実際に観察せられた亀裂を十分説明するように考えられる。

オ4章　種々の曲線のインバートアーチをもつ半円形断面の坑道覆工応力の光弾性実験による考察

もつとも基本的な断面形状である円形の坑道における覆工の応力状態については、さきに述べたごとく理論的に求めることは比較的容易であるが、断面形状が複雑な場合には、素堀坑道の応力状態の算定以上に覆工の応力算定は困難である。水路ずい道や鉱山における坑道においては半円形ないしは円形断面を含むところの、底面にある曲率の曲線部分を有する半円形断面がよく用いられる。この場合の断面形状は利用断面より選択されるばかりでなく、その地点の地質や地圧状態等をも考慮されて選ばれるのは当然である。坑道覆工の合理的な設計に当つては、覆工に作用する地圧を適確に把握しなければならず、いままでにも実際の覆工設計に際して模型実験による研究が行われてきていることはさきにも述べたとおりである。これらの実験では、計画坑道が不良地質の地山を通過するので、それに対処するために模型実験を行つているものであり、主として覆工にかかる土圧の見積りを目的としている。これに対して通常の岩盤よりなる地山中を通る坑道における覆工の応力状態を求め、覆工応力に関する一般的な概念をうることは、覆工を合理的に設計する上において重要なことであろう。ここにおいては種々断面形状をもつ坑道の覆工応力状態について考察するため、基本的な形状として曲率を異にするインバートアーチを有する半円形断面の坑道を選び、その覆工応力を光弾性模型実験によつて求め、覆工の合理的な設計に対する一つの資料をえた。この場合実験はオ3章の模型実験と同様の方法で行われた。覆工模型には光弾性材料が用いられ、岩盤には石膏と硅藻土との混合材が用いられて、その配合比を種々変化させることにより、地山と覆工コンクリートとの弾性係数比を変化させた。また覆工応力分布に及ぼす坑道断面形状の影響について実験的に考察するとともに、とくに円形坑道に対してはここで求めた実験値をオ2章で示した理論計算値と対比検討した。

4・1　実験方法および実験結果

実験に用いられた覆工模型の形状は図一4・4・1に示すように円形断面より順次底面に曲率半径の大きいインバートアーチをつけ、最後に半円形断面になるようにしたものを用いた。図一4・4・1に示されている数値はいずれも覆工模型（エポキシ樹脂）の内径の値である。これに対して岩盤材料としては石膏と硅藻土とを用い、これらを種々の配合比で混合することにより弾性係数を変化させるとともに、硬化時間を延ばし模型の作成を容易ならしめた。模型の作成および実験方法はオ3章で示したものと同一である。

まず石膏、硅藻土および水の配合比と弾性係数との関係を示すと図一4・4・2ようである。配合はつねに（石膏十硅藻土）：水＝1、5；1の割合で行われ、硅藻土を除々に増加させて（したがつて石膏は減少）弾性係数を変化させている。この図より硅藻土の増加によつて弾性係数Eの減少する様子が明かであり、今後はこの図より模型に用いた地山の弾性係数を算定した。つぎにこの材料は打設後かなりの時間を経過するまで荷重を加えることによつていちぢるしいクリープを惹起する性質があり、したがつて実験結果に正しい考察を加えるために各配合における材料のクリープ特性を把

握する必要があるが、才3章で用いた地山模型の材料と配合比に大差がないことより、この場合のクリープ特性も図－4・3・8と類似すると考えられるので、さきと同様の方法で載荷し光弾性縞写真を撮つた。

等色線写真の例を示せば写真－4・4・1、4・4・2(a)、(b)4・4・3 (a)、(b)、4・4・4(a)(b)のようであり、それらより覆工の内周辺における応力分布を求め図示すれば、図－4・4・3 (a)(b)、4・4・4(a)、(b)、4・4・5(a)(b)、4・4・6(a)、(b)のようになる。これらの応力分布はいずれも鉛直方向あるいは水平方向に一軸的に荷重がかかつた場合のものであり、実際の地山におけるごとく2軸的な初期応力状態に対しては、これらの結果を適当に重ね合せればよい。

4・2　実験結果の考察

(1)円形覆覆工（$h/r=1.0$）の場合

図－4・4・3より判るように鉛直方向から一軸的に荷重が作用するときは、素堀坑道の場合と同様に、頂部および底部に引張り、側壁に圧縮応力を生ずる。覆工内縁に沿う応力分布が地山の弾性係数の変化によつてどのように変るかを明かにするために覆工内縁の頂部および底部中点A、E、起拱点C、拱部¼点B、底部¼点D等の位置における応力値と、覆工と地山の弾性係数比$\frac{\overline{E}}{E}$との関係を図示すれば、図－4・4・7のようになる。この図は初期応力状態が鉛直方向に一軸的な場合に対するものである。図より判るように覆工の弾性係数に対する地山の弾性係数が小さくなるほど頂底部の引張応力および側壁部の圧縮応力を増大するが、拱¼点のBおよび底部¼点のDにおける応力は地山の弾性係数のいかんにかかわらず一定である。

つぎに覆工内縁の各位置における実験応力値を2種の$\frac{\overline{E}}{E}$に対して図示し、同時に比較のために才2章で示した理論計算を用いて求めた応力値を示せば、図－4・4・8のようである。理論計算結果と比較すると、応力分布および弾性係数比の変化に対する応力増減の傾向はきわめてよく類似していることが認められる。とくに頂部における実験応力値は計算値の条件(i)の場合と条件(ii)の場合との中間にあつて、計算結果とよく一致していることを示し、実験においては覆工と地山との附着が完全でないが、かなりの摩さつが作用していることを裏書きしているように思われる。しかし側壁部の実験応力は計算値よりもかなり小さい値を示している。これらの実験値と計算値との差異は実験上載荷した場合に、模型と支持枠との間の摩さつや、模型作製時の石膏の収縮等による影響によるものと思われるが、応力変化の傾向はよく類似しているため、今後断面形状や地山の弾性係数の変化に伴う覆工応力の変化を比較するためには、この実験が有効に適用されよう。

なお円形覆工内縁応力分布が覆工の厚み、$\frac{\overline{E}}{E}$および地山との附着条件によつていかに変化するかの考察は、才2章で述べられているとおりであり、ここでは実験値と理論値の比較のみにとどめておく

(2)　$h/r=0.67$のインバートアーチを有する半円形覆工の場合

さきの場合と同様に頂部A、底部E、側壁部C、および¼点B、Dにおける周辺応力と弾性係数比$\frac{\overline{E}}{E}$との関係を図示すれば、図示4・4・9のようである。各点の$\frac{\overline{E}}{E}$に対する応力変化は円形覆工の場合とほとんど同じ傾向を示し、B点では$\frac{\overline{E}}{E}$の増加に伴つてわずかに応力値が増大するが、D点ではいずれの$\frac{\overline{E}}{E}$に対しても応力値はほぼ零を示している。また頂部と底部では地山の弾性係数が小さい場合

にはある程度異なるが、地山の弾性係数が大きくなる（ $\frac{\bar{E}}{E}$ <2.4 ）とほとんど同じ値をとるようになる。C 点においては円形の場合よりも応力は増大するが、この断面形がは全体的に円形の場合とほとんど応力分布はかわらない。

(3) $h/r=033$のインバートアーチを有する半円形覆工の場合

覆工内縁の各点における応力値と$\frac{\bar{E}}{E}$との関係は図－4・4・10に示されるとおりである。このような断面形になるとD点における応力は引張応力となり、アーチ部（ $A\sim C$ ）の圧縮応力はさきの場合よりもわずかに増加する。各応力が地山の弾性係数の減少にともなつて一様に増加する傾向はさきの場合と同様である。

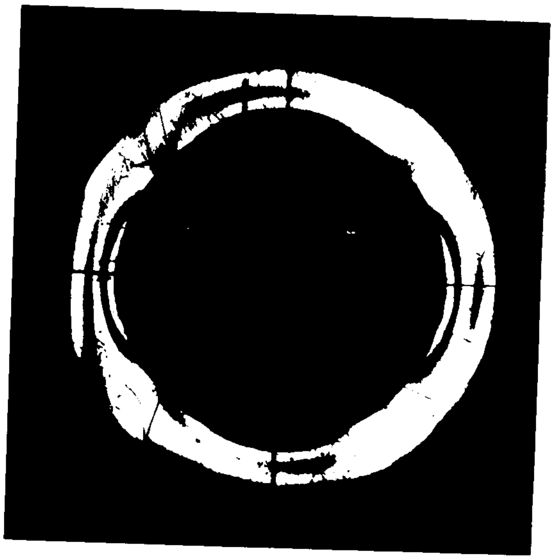
(4) 半円形覆工（$h/r=0$）の場合

覆工内壁の各位置における応力値の$\frac{\bar{E}}{E}$ に対する変化は図－4・4・11に示されたとおりである頂部A、底部Aおよび¼点Dにおける応力変化は$h/r=033$の場合とまつたく同一である。この場合にはアーチ部の応力はかなり増加し、その傾向は地山の弾性係数が小さいほど大きい。とくに起拱点における応力集中がいちぢるしくなる。

(5) 各種坑道覆工の応力状態の比較

以上各種の坑道断面形状の変化に対して、覆工の内用縁上の各点における応力がいかに増減するかを見るために、いま $c/(b+c)=0/1.5$ と $c/(b+c)=020/1.5$の場合、すなわち $\frac{\bar{E}}{E}=1.72$ と $\frac{\bar{E}}{E}=384$ の場合について断面形状h/rと応力値との関係を示せば図－4・4・12 (a)、(b) のようになる。弾性係数比$\frac{\bar{E}}{E}$が異なる場合でもh/rの変化に対する応力値の変化傾向はまつたく同一である。頂部および底部の中点AおよびBにおける引張応力は断面形状に無関係にほぼ一定の値をとるが、素堀坑道の上盤および下盤における応力状態と似た傾向[13)]をもつことが判る。しかし巻立坑道では素掘の場合のごとく頂、底部における応力は等しくならず、頂部で大である。側壁Cにおける圧縮応力は主として断面形状にもとずく応力集中のために h/r が小さくなるほど増大する。B点およびD点の応力は h/r の大きさにしたがつてかなり変化し、B点では半円形覆工（$h/r=0$）の場合は円形覆工（$h/r=1$）の約4倍に増大し、D点では引張応力から圧縮応力に変化する。

なお、水平方向に一軸的に初期荷重が作用した場合の頂、底部の応力変化を同時に点線で示しているが、この変化の傾向はさきに述べた素堀坑道の場合と全く同じであり、曲率半径の大きい底部の応力が一般に頂部より小さい。この水平荷重の大きさは、弾性地山では一般に地山材料のポアツソン比に関係してくるが、いま水平荷重が覆工の頂、底部における応力に及ぼす影響を明らかにするために鉛直初期応力Pを1にとり、水平方向のそれは$q=0\sim1$にとつて、それらが同時に作用する場合を考え、そのときのA、E 点の応力変化を示すと図－4・4・13 (a)、(b)のようになる。この図より頂部および底部に引張応力を生じないような断面形状 h/rが q/p との関係において求められる。

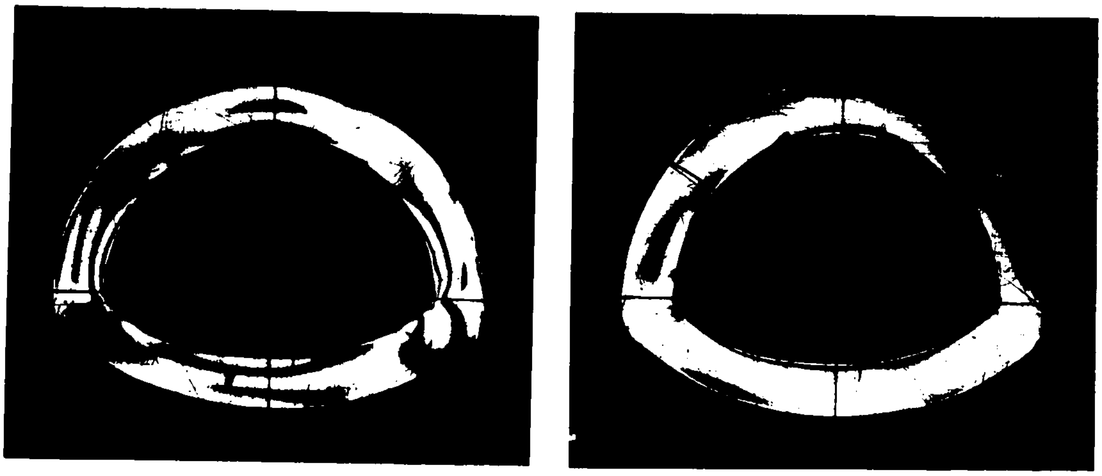


鉛直荷重

写真-4.4.1 $h/r = 1.0$, $\bar{E}/E = 3.84$

(a) 鉛直荷重　　(b) 水平荷重

写真-4.4.2 $h/r = 0.67$, $\bar{E}/E = 3.84$



(a) 鉛直荷重　　　(b) 水平荷重

写真-4.4.3　$h/r = 0.33$, $E/E = 3.01$

(a) 鉛直荷重　　　(b) 水平荷重

写真-4.4.4　$h/r = 0$, $E/E = 3.84$

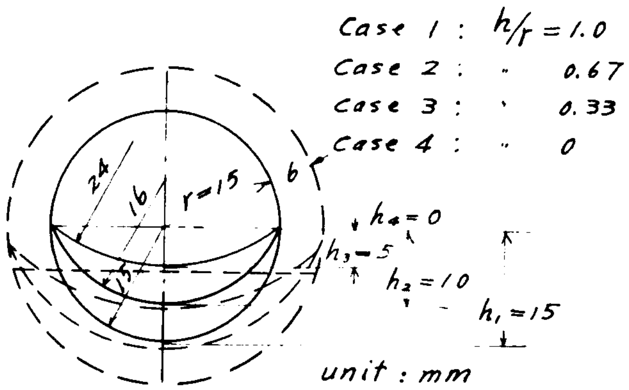

Case 1 : h/r = 1.0
Case 2 : 〃 0.67
Case 3 : 〃 0.33
Case 4 : 〃 0
24
16
r=15
6
h4=0
h3=5
h2=10
h1=15
15
unit : mm

図-4·4·1

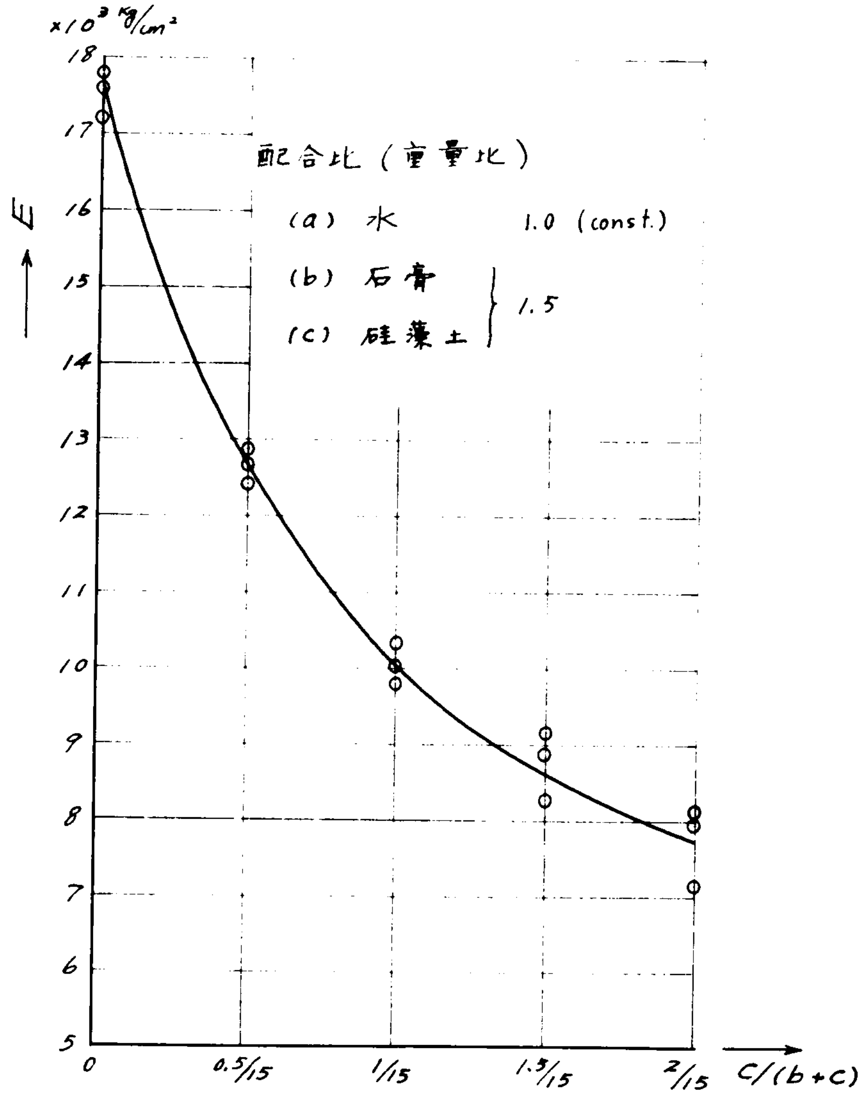
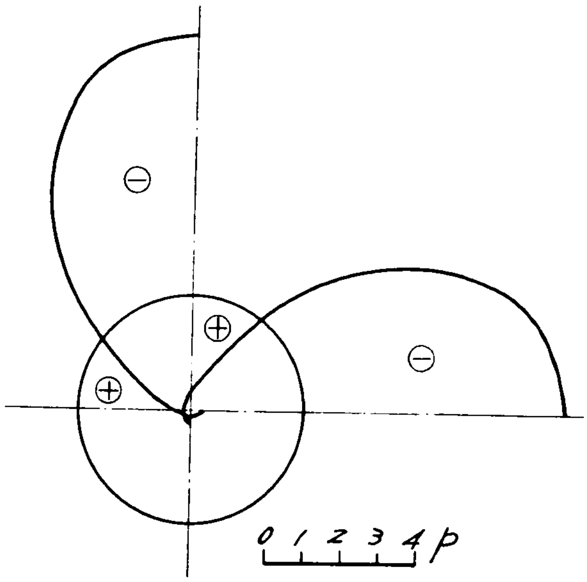
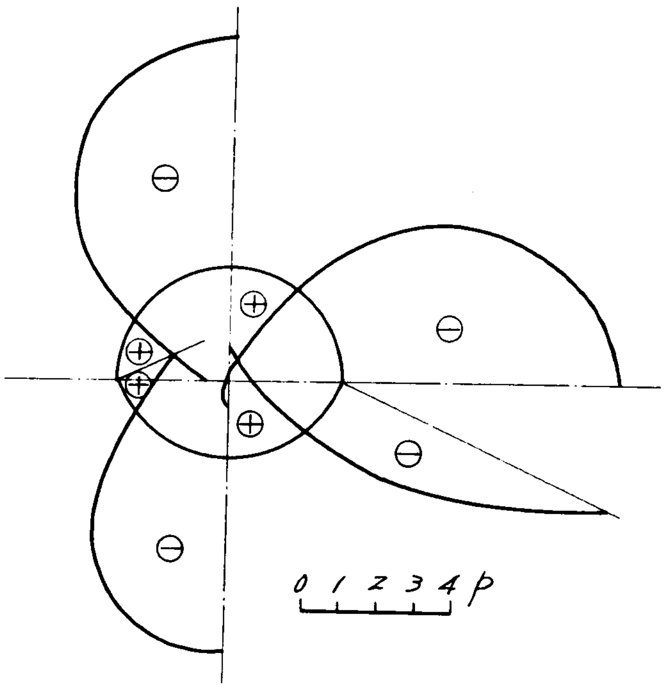


図-4·4·2 配合比と弾性係数との関係



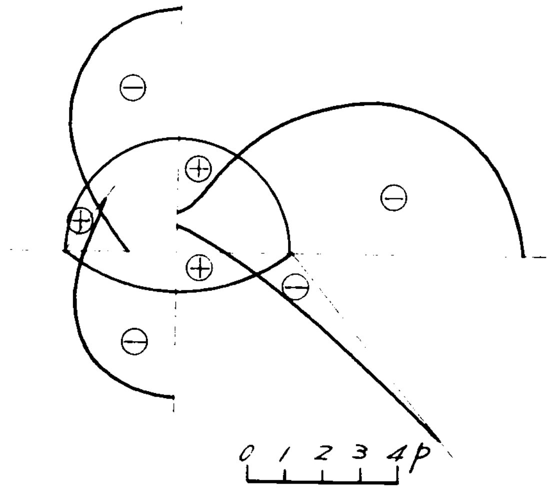
(b) 水平荷重　　　(a) 鉛直荷重

図-4·4·3　$h/r = 1.0$,　$\bar{E}/E = 3.84$



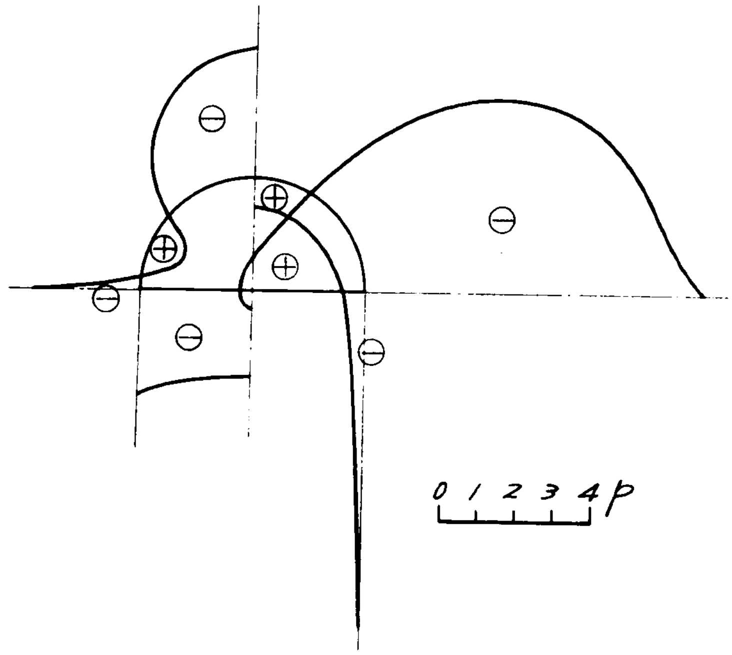
(b) 水平荷重　　　(a) 鉛直荷重

図-4·4·4　$h/r = 0.67$,　$\bar{E}/E = 3.84$



(b) 水平荷重　(a) 鉛直荷重

図-4.4.5　$h/r = 0.33$,　$\bar{E}/E = 3.01$



(b) 水平荷重　(a) 鉛直荷重

図-4.4.6　$h/r = 0$,　$\bar{E}/E = 3.84$

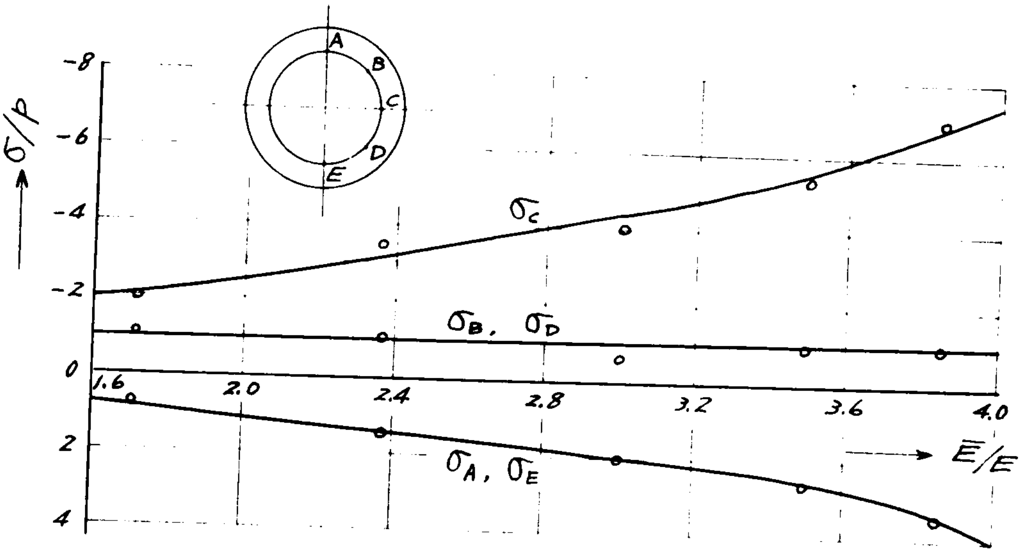


図-4·4·7　h/r = 1.0

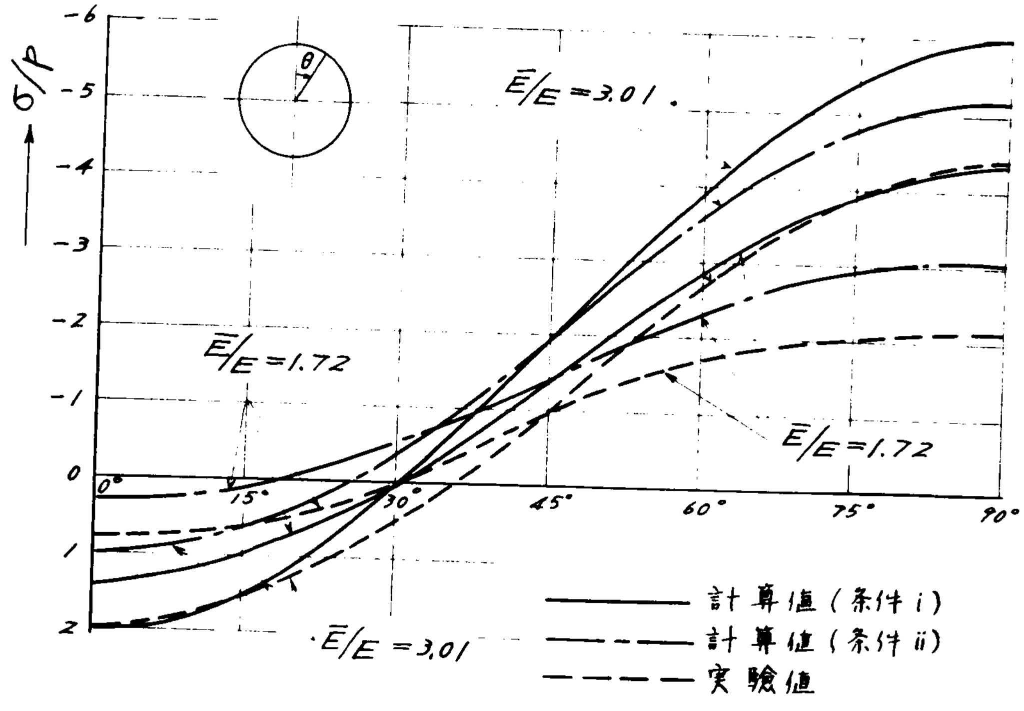


図-4·4·8

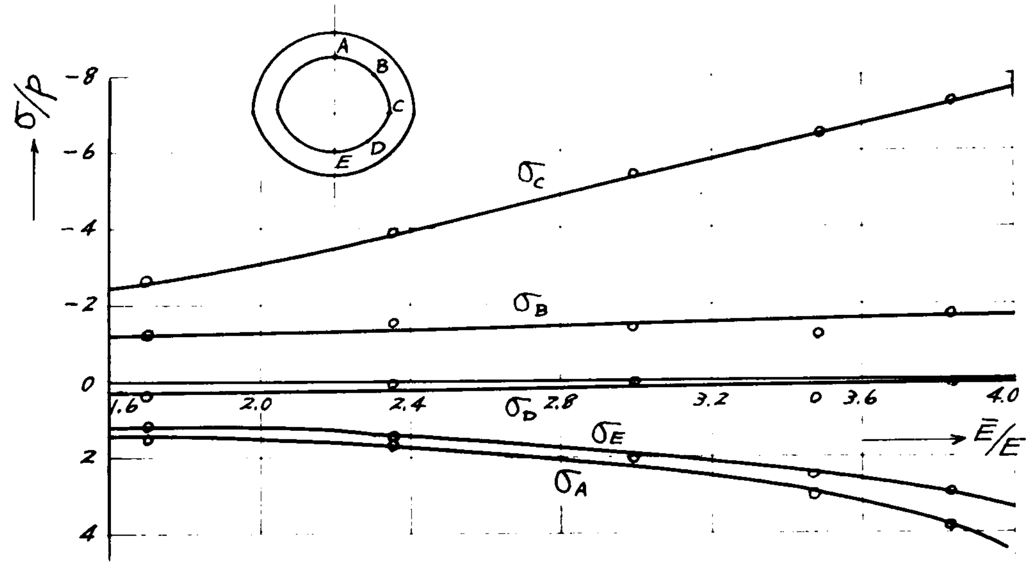


図-4·4·9　　h/r = 0.67

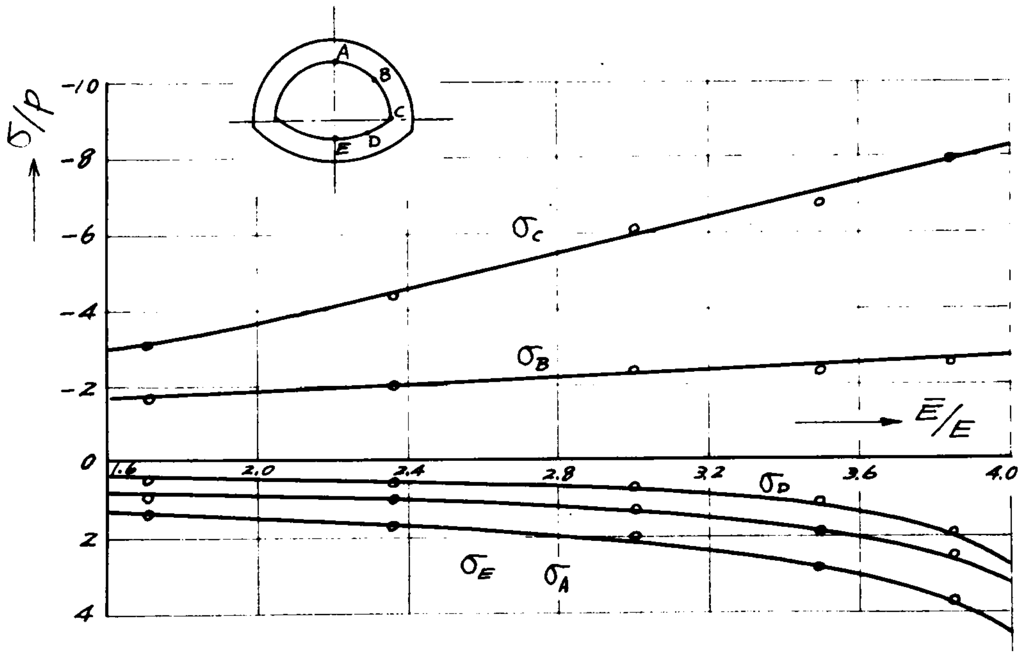


図-4·4·10　　h/r = 0.33

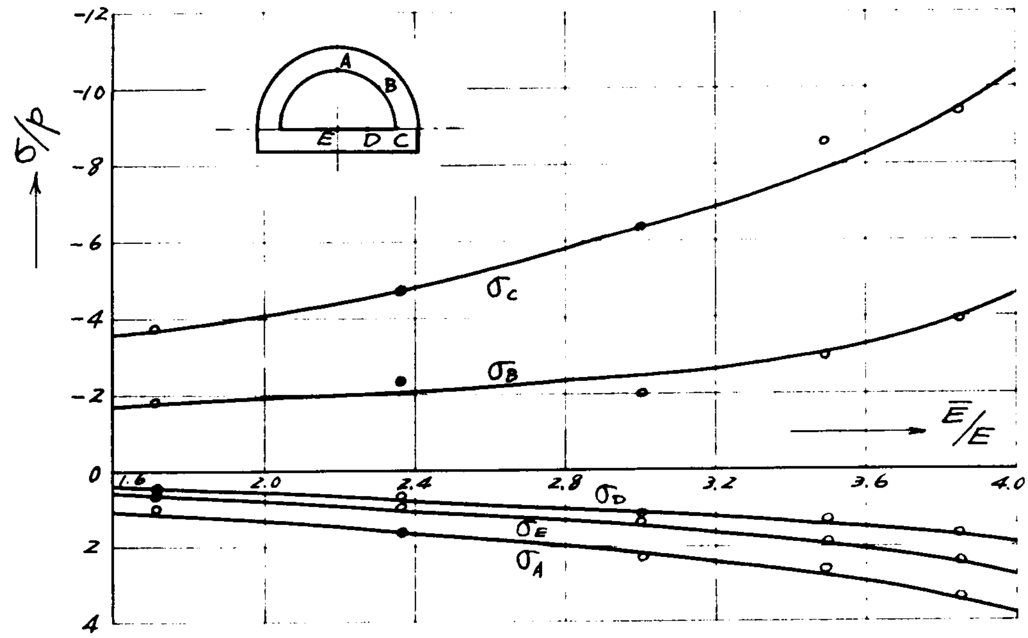
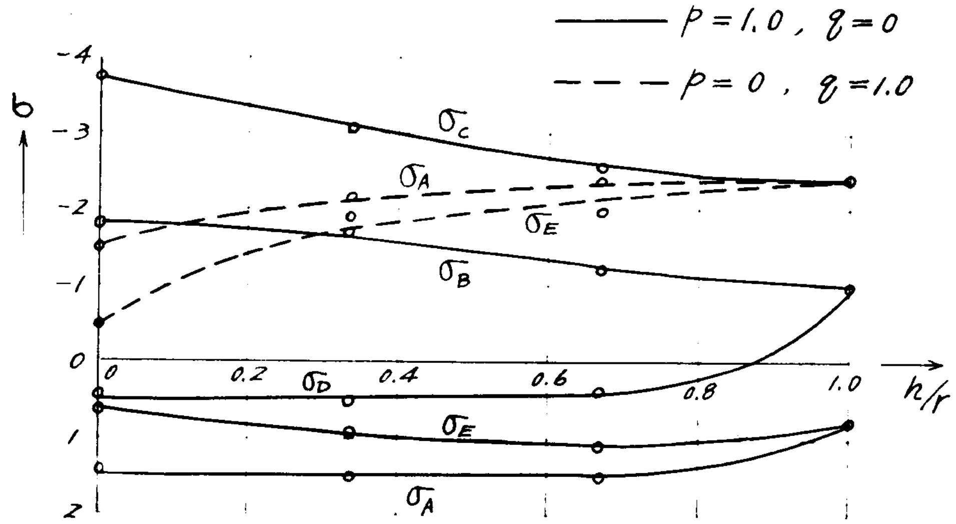
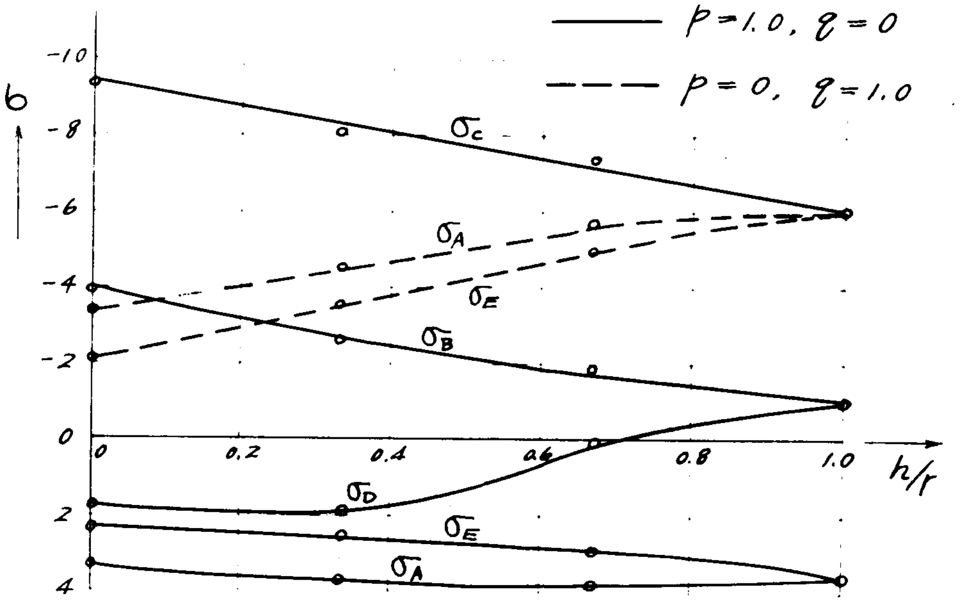


図-4・4・11　h/r = 0

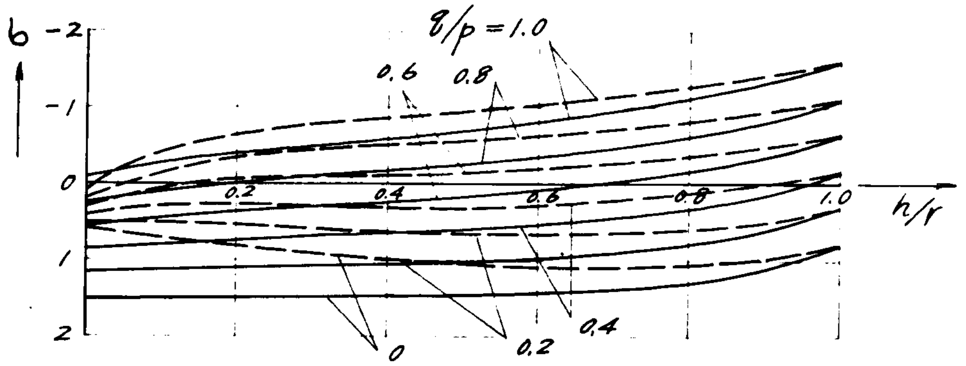


(a) c/(b+c) = 0/15 , $\bar{E}/E$ = 1.72

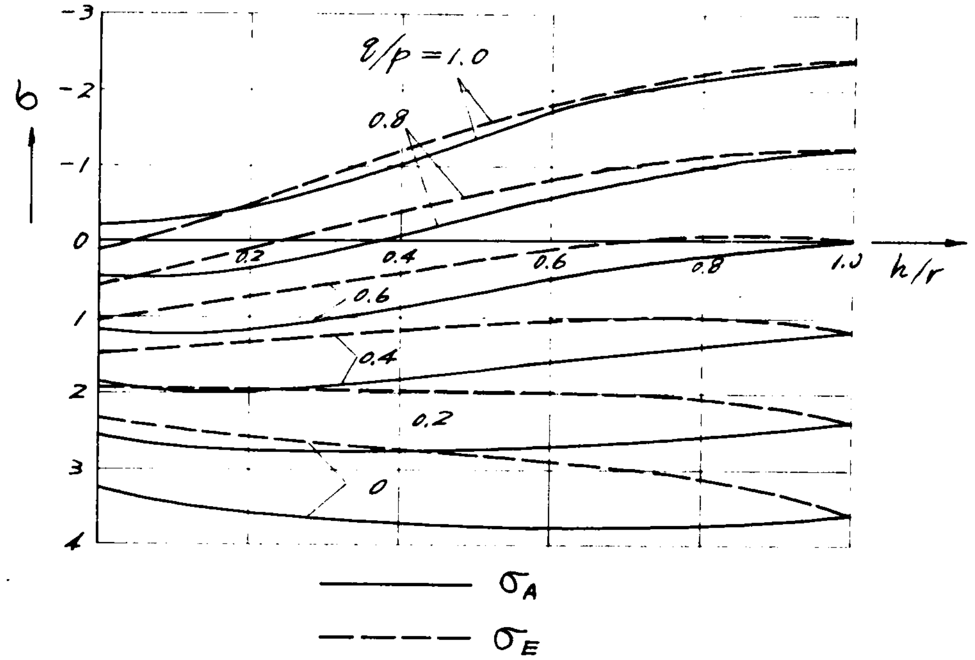


(b) c/(b+c) = 2/15 , $\bar{E}/E$ = 3.84

図 - 4·4·12



(a) $\bar{E}/E = 1.72$



(b) $\bar{E}/E = 3.84$

図-4·4·13

才5章　結　　　語

才２章ではまず弾性地山中の水平円形坑道の覆工応力に対して、地山が種々の弾性係数をもち、また覆工の厚さが変つた場合について理論計算を行つた。理論計算は覆工と地山との間の附着が完全な場合と摩さつの働かない場合の２つの極端な条件に対して行われた。その結果から覆工内周辺に沿う応力分布状態が地山と覆工の弾性係数比 $E/\bar{E}$ によっていかに影響されるかを示し、（図ー４・２・１　４・２・２、４・２・５、４・２・６参照）、また覆工応力と覆工厚との関係を明らかにした（図ー４・２・３、４・２・４参照）。さらに覆工の各断面（$\theta=0°$　$45°$ $90°$）に沿う内部応力分布をそれぞれ２種の $E/\bar{E}$ および a/b に対して図示し、内部応力状態の変化をしらべた。これらの結果よりつぎのことが明らかにされた。

(1)　条件(I)の場合が条件(II)の場合よりも内部全体にわたつて応力が大きく、地山の弾性係数の変化による影響は小さい。

(2)　条件(I)の場合には $E/\bar{E}$ および覆工厚（$a-b$）$/a$ の大きさにかかわらず頂部に引張応力を生じるが、条件(II)の場合には $E/\bar{E}>1.0$ に対しては覆工厚にかかわらず内壁全体にわたつて圧縮応力を生じるようになる。

(3)　$E/\bar{E}$ の変化に伴う覆工応力の増減は条件(II)の場合が大きく、かつ内壁位置によってその影響はかなり変化する。しかし条件(I)、$E/\bar{E}$ の場合とも $E/\bar{E}>2.0$ では応力値は大きくは変化しない。

(4)　覆工応力に及ぼす覆工厚さの影響は、$E/\bar{E}<1.0$ のときには条件(I)の場合と条件(II)の場合ではその趣きを異にし、覆工厚の増加に伴つて、前者では全体にわたつて圧縮応力を減少するのに対して後者では $\theta=60°$　$90°$ の範囲で圧縮応力を増加し、$\theta=0°\sim60°$ の範囲で圧縮応力を減少する。しかし $E/\bar{E}>1.0$ のときには覆工厚の変化による覆工応力の影響はほとんど無視できるほどになる。

つぎに円形立坑の周囲が弾性応力状態および弾塑性応力状態にある場合の覆工内部応力に対する理論式を示し、数値計算を行つて覆工内部の応力分布を明らかにした（図ー４・２・９、４・２・10 参照）。その結果覆工断面にわたつて σ_θ は σ_r に比して無視できるほど小さいこと、弾塑性応力状態では弾性状態の場合よりも σ_θ、σ_r とも減少し、その減少する程度は地山材料のせん断降伏強度および立坑の深度、したがって弾塑性境界の半径 ρ に関係してくることなどが明らかにされた。

才３章における理論的、実験的考察から、膨脹によって均一な半径方向力を及ぼす地山内に築造せられるずい道覆工の応力について、つぎの事項が明らかになつた。

(1)　覆工は一つの構造物として作用せず　上部アーチと側壁との接続部は鉸のように作用するようである。

(2)　覆工施工にあたつては、掘削後、コンクリート施工までに要する日数および地圧状態を考慮

して、適切な余堀を行い地圧の緩和を計る必要がある。

(3) 覆工施工後はただちにグラウト工によつて地山と覆工の間に存在する空隙を填充し、均一な圧力が覆工に作用するようにしなければならない。

(4) もちろん覆工としては円形が応力的に有利と思われるが、馬蹄形断面でも直ちにインバートの施工を行い、ずい道断面の縮少をなるべく減ずるようにしなければならない。

このように施工をすれば、覆工はかなりの地圧に対しても抵抗しうるようである（図一4・3・4、(a) 1.応力分布参照）。このようにしてなお覆工が破壊せられるような所では、鉄筋コンクリートの*rock bolting* を併用し、地圧の抑制を計れば効果的であると考えられる。

才4章では半円形断面から、その底部に次才に小さい曲率のインバートアーチをもち、最後に円形断面にいたるごとき一つの系統的な変化をする各種断面形状の巻立坑道に対して、その覆工内周辺応力分布を光弾性実験によつて求めた。この場合地山材料としては石膏と硅藻土との混合材を用い、その配合比を5段階に変えることによつて、覆工の弾性係数と地山のそれとの比$\overline{E}/E$が5種類のそれぞれの場合に対して、覆工断面形と応力分布状態との関係について考察した。

まず円形覆工に対する実験応力値を種々の$\overline{E}/E$の場合について理論計算値と対比し、図一4・4・8に示すごとき結果をえたが、頂部の応力は両者よく一致するのに反して、実験操作等の都合で側壁部の応力は実験値が小さく出る傾向にある。しかし応力の$\overline{E}/E$に対する変化や応力分布状態については両者まつたく同一の傾向を示しているので、ほかの断面形状にたいしても同様の方法で実験を行いその結果を比較検討することにした。

各種の覆工形状において地山の弾性係数（したがつて$\overline{E}/E$）が覆工内周辺応力に及ぼす影響は図4・4・7 図4・4・11 で示されているとおりであり、形状変化による応力値の増減はみられるが、$\overline{E}/E$ の影響は覆工内周辺上の各対応点においては形状にかかわらずまつたく同一であると考えられる。すなわち地山の弾性係数が小さい場合とくに応力が増大するのは側壁部とくに起拱点においてであり、逆に肩部（B点）や底部の¼点 Dでは応力値はほとんど変化しない。つぎに覆工形状（h/r）の変化による応力分布の変化する様子は図一4・4・12(q (b)より明らかであり、素堀坑道の場合と同じような傾向を示している。すなわち鉛直荷重に対しては頂部A点および底部E点の応力は断面形状にかかわらずほとんど一定であり、側壁部ではh/rの変化にともなつて一様に応力は変化する。しかし水平荷重に対しては頂部および底部の圧縮応力はh/rが大きいほど増大し、2軸的な地山の初期応力状態に対する覆工の合理的な断面形状は水平方向荷重の大きさに関係してくる。いま頂部および底部で引張応力を生じないような形状を応力的に経済的な断面と仮定すればそのときのq/pとh/rとの関係（図一4・4・13）より明らかにされる。

この結果より一般に水平荷重が大きいときには半円形に近い断面が、また水平荷重が小さいときには円形に近い断面が応力的に有利であるということができよう。なおこのことは地山の弾性係数が覆工のそれに比して小さい場合に言えることであつて、地山の弾性係数が大きい場合にはどのような形状の覆工を選んでも応力的には大差がない。

結　　論

鉄道や道路におけるずい道、水路ずい道、鉱山における坑道あるいは立坑等を合理的に設計施工するとともに、既設のずい道あるいは坑道の維持管理、老朽化による変状の補修などを適切に行うには、ずい道あるいは坑道の通過する地山の地形、地山材料の性状、地質構造等についての充分な知識をうることは勿論のこと、それらの地下構造物に作用する地圧および坑道(ずい道、立坑などを含めて)の周辺応力状態や覆工応力状態を適確に把握しなければならない。従来よりこれらの問題に関して多数の研究が行われてきているが、もつぱら土圧論にもとずく地圧の算定や、地山を完全弾性体とみなして弾性理論にもとずく坑道応力の理論的ないしは実験的研究が主として行われてきている。しかし実際には地山の状態は種々の要素を含んでいてきわめて複雑であり、したがつて坑道における地圧現象は多くの条件に支配されているため、まだ多くの決解されるべき問題が残されている。この点にかんがみ著者は坑道の設計および施工を合理化する目的で基礎的な考察を行うこととした。すなかちまずできるかぎり現実に近い地山状態で問題を取扱うために、種々の条件を考慮したいくつかの状態を仮定し、それらの地山状態に対する工学的な考察を行うとともに、理論的な取扱い方法について述べ、つぎにそれらの種々の状態にある地山中の坑道の周辺応力および変形、覆工応力、立坑およびその周囲地山における応力分布等について理論的および実験的な考察を行つて、応力状態および変形状態が地山の状態によつていかに影響されるかを究明した。さらに坑道断面形による坑道あるいは覆工の応力分布の変化を調べて、応力上合理的な断面形状を求める等の基礎的研究を行つた。その結果種々の条件のもとでの坑道の設計および施工に際して充分考慮しなければならない、はなはだ有意義な資料をうることができた。つぎに本研究の概要とその注目すべき若干の成果を掲げればつぎのようである。

第1篇においては地山状態の工学的考察として、坑道が開削される地山の地形、地質構造、地山材料の性状等の種々の要素を考慮して地山状態をつぎのように分類し、それぞれの状態に対する工学的な意義を従来の研究に対比して説明するとともに、それらに対する理論的な取扱いについて述べ、今後の理論計算に用いるべき基礎方程式を示した。

まず、従来より坑道応力の理論的考察においてしばしば仮定されているように、地山が均質な堅岩よりなりその力学的性質が完全弾性体に近いと考えられる場合に対して、坑道周辺応力や変形状態を研究することは、地圧現象の根本概念を明らかにする上にきわめて有意であると考えるので、完全弾性体としての地山に対する理論的な取扱い方を示した。すなわち直角座標、直交曲線座標等における弾性基礎方程式を示して、坑道の形状によるそれらの座標系の適用について述べ、さらに坑道応力の解法を示した。また任意の坑道断面形状に対する複素変数の関数を用いた *Muschelishvili* の解法を説明し、その場合の基礎方程式を示した。

さらに実際的な土壌、岩盤および地層等の性質を考慮した地山状態に対して理論的な取扱いを進めるために、地山材料が(*a*)等質直交異方性、(*b*)層状性、(*c*)点等方性等の弾性性質をもつものを仮定

して、それらの性質をもつ弾性体の平面問題に対する従来の研究について述べ、さらにおのおのの性質を有する地山に対する平面弾性基礎方程式を示して問題の解を説明した。またそれらの地山に対する基礎方程式あるいは弾性性質が完全弾性体としての地山の場合に比べていかなる影響をうけるかについて考察した。

つぎに土質地山のごとく塑性体と考えられる地山、あるいは弾性地山であつてもそのせん断降伏強度が低くて、ある条件のもとで塑性状態になるごとき弾塑性体と考えられる地山に対して、理論的な取扱いをするために、まず地山材料の性質に関する研究および土質力学的あるいは塑性力学的な従来の地圧関係の研究について検討し、塑性地山あるいは弾塑性地山に対して適用すべき基礎方程式およびそれらを用いた解法について説明した。

最後に、岩石中に生ずる現象が時間に関係したものであることは以前より指摘されていることであるので、地山材料の変形一時間関係いわゆるクリープの研究や地圧現象に対する *rheology* 的な取扱い等の新しい概念の導入による考察について述べ、とくに粘弾性体と考えられる地山に対する理論的な解法について説明した。

第2篇においては、第1篇で示した種々の状態にある地山中の素掘坑道、巻立坑道および立坑等の周辺応力状態および変形状態を理論的に求め、それらに及ぼす地山状態、初期応力状態、覆工厚、断面形状等の影響について、つぎのごとく種々の考察を行つた。

まず完全弾性地山中の水平坑道に対して、円形および楕円形の素掘の場合の周辺応力に対する解法を、地表面の影響を考慮した場合とその影響を重視した場合について示した。後者の近似解法としては2つの方法が考えられるが、そのうち坑道の開削位置における地山の初期応力が坑道を有する無限地山の無限遠に作用するものと仮定して、いわゆる有孔無限板の理論を適用する方法によつて求めた円形坑道の周辺応力は、坑道の深さが坑道半径の10倍以上にもなると地表面の影響を考慮した厳密解による値とほとんど一致し、実用上近似解法で充分な結果がえられることを明らかにした。なお地形を考慮して *Schmid* が導入したところのある係数を含む初期応力状態に対する近似解より、坑道の入口と、それからかなり地山内に入つた位置との間における周辺応力状態の変化を求めて考察したが、その変化は地山のポアソン比によつてかなり影響されることが明らかにされた。さらに素掘の楕円形坑道が任意の方向から初期荷重をうける場合の応力式を *Muschelishvili* の複素変数の方法によつて求め、初期荷重の方向および楕円形の半径比と周辺応力との関係を示した。

つぎに円形巻立坑道に対して、地山と覆工との接触面における状態より2つの条件の場合を仮定して近似解を求め、地山と覆工との弾性係数比および覆工厚の坑道周辺応力に及ぼす影響について考察して、地山の弾性係数が小さいほど覆工に大きい地圧とせん断応力を作用させ、また頂部に生ずる引張応力およびその範囲を増大すること、またその引張応力は覆工厚が小さいほど大きくなり、さらに覆工と地山との附着状態が不完全なほど増大して危険であることなどを明らかにした。また楕円形の巻立坑道に対しては、覆工が固定環、弾性環と考えられる場合の応力について述べ、それらの応力分布を無巻立の場合と比較考察した。最後に多角形および一般的な馬蹄形断面等に対する

周辺応力の近似形算法としてMuschelishviliの複素変数を適用した2,3の研究について述べ、正方形断面および馬蹄型断面の場合の周辺応力分布について考察した。

つぎに直交異方性弾性地山中の水平円形坑道の周辺応力および変形状態について考察するために、Sawin が示しているような複素変数による直交異方性弾性体の2次元基礎方程式を適用して、一般的な初期荷重状態に対する周辺応力式および変位式を算出し、種々の地山の主弾性係数比および初期荷重の方向に対して数値計算を行つて、坑道の周辺応力分布や変位の状態に及ぼす地山の異方性および初期応力状態の影響について明らかにした。また特別な場合として地山荷重が主弾性係数の方向に2軸的に作用したときの坑道の変形量を示す式を求め、鉛直および水平方向荷重比と坑道の変形との関係が地山の異方性によつていかなる変化をうけるか考察した。その結果より大体の傾向を示すと、まず周辺応力に関しては、地山の弾性性質の異方性が大きいほど、弾性係数の小さい方向における周辺応力の集中度が高くなり、また最大応力（引張、圧縮とも）の生ずる位置は、主弾性係数比が大きいほど、また初期荷重の方向が弾性主軸と傾くほど偏移して、応力分布はかなり複雑になり危険な状態を呈するようになる。また周辺における変位状態に関しては、上下盤における坑道空間への変位は異方性が大きいほど、また初期荷重の方向が弾性主軸の方向から偏移するほど大きく、また弾性係数の小さい方からの初期荷重に対しては、その方向の変位がきわめて大きくなつて危険であることなどが明らかになつた。さらに異方性地山中の楕円形巻立坑道に対して地山と覆工とが完全に附着し、かつ覆工を固定環と仮定して周辺応力を求める式を導き、特別な場合として円形坑道に対して地山の異方性および初期荷重の方向と周辺（覆工と地山との接触面における）の応力分布との関係について考察し、覆工外壁に作用する地圧は初期荷重（一軸的な場合を考えている）の作用する方向においてつねに最大となり、その方向と垂直の位置で最小となるが、初期荷重が大きい方の主弾性係数の方向から作用する場合には、地圧は主弾性係数比が大きいほど減少するが、逆に小さい方の主弾性係数の方向から荷重が作用する場合には地圧は増大することが明らかになつた。また異方性地山中の円形巻立坑道に対して、覆工が弾性的に変形する場合の解法を示した。

つぎに層状弾性地山中の水平坑道に対して、層が同種あるいは異種の場合を考え、それらの層間に摩擦の作用しない場合と完全に附着している場合の2つの極端な場合を仮定して、それぞれの場合の周辺応力状態を求め考察を行つた。そして2種の互層よりなる地山において、各層の高さおよび弾性係数の差異が周辺応力状態にいかなる影響を及ぼすかを究明した。その結果一般的に言つて硬い層の岩石とそれにはさまれた軟弱層の岩石との弾性係数の差異が大きく、しかも軟弱層の高さが大きい状態では、上下盤にきわめて大きい引張応力を生じて危険であり、とくに層間の附着が不完全な場合には坑道周辺応力は全体的に増加して、上下盤の引張応力は一層大きくさらに危険な状態を呈し易くなることなどが明らかになつた。

つぎに点等方性の弾性地山中におけるかなり深い坑道の周辺応力を算定するために、適合条件式を階差法の適用のもとで近似的に解く方法について述べ、また等分布荷重をうける地表面下の坑道に対する周辺応力の近似解を導き、それより応力分布を算定してその状態につき考察を行つた。

その結果完全弾性地山の場合と比較して、点等方性地山中の坑道では側壁部および底部で応力が大きくなる傾向を有することが判つた。

また水平円形坑道周辺の弾塑性応力式を*Von Mises* の降伏条件式を用いた*Galin*の解を適用して求め、さらに塑性領域が坑道周辺に生ずるための条件を示した。つぎに地山材料のせん断破壊強度を種々の値にとり、ポアッソン比を$\nu=0\sim0,5$にとつて、弾塑性境界の形を求め、また坑道周囲の地山における弾塑性応力分布および弾塑性境界上での応力分布を求め、それらの結果を弾性状態のものと比較して、塑性領域における応力緩和の傾向や地山材料のせん断強度の大小による塑性領域の範囲　および最大応力の生ずる位置等について考察した。

つぎに塑性地山における坑道周辺応力に対する式として*Fenner*の解を示し、それによつて計算された応力分布について考察した。さらに粘弾性地山中の坑道の変形挙動に対する理論的な取扱いについて説明し、結局この場合には地山材料の特性にもつとも適した力学模型を仮定してそのヒズミ一時間関係を求め、その後は弾性地山に対する解を求めて、それに時間に関する*operation* を施せば変形一時間関係式がえられることについて述べた。

また地山が弾性、弾塑性あるいは塑性体と考えられる場合について、円形立坑の周辺応力に対する近似解を求め、それぞれの地山状態における立坑の応力状態について理論的考察を行つた。弾塑性応力状態に対する近似解法は、(i)地山材料を非圧縮性と考え、平面ヒズミの状態を仮定した場合と、(ii)同一水平断面内の弾、塑性両領域において一定の鉛直応力が作用しているものと仮定し、それを含む３主応力による降伏条件を考慮した場合に対して示された。なおいずれの場合も降伏条件としては*Mises*の条件式が適用され、また解は立坑が素堀および巻立の場合に対して求められた。数値計算を行つて両者の解法による応力分布状態を比較するとともに、弾性応力状態の場合と比較考察した。つぎに地山が塑性状態にある場合に対しては、物体の塑性状態を示す方程式が同一の応力ーヒズミ曲線をもつ非線型弾性体を表示するところの方程式となんら異るところがないという考えから、立坑周囲の地山の塑性変形領域における応力を近似的に算出し、その応力分布について検討した。

第３篇においては種々の弾性状態における地山模型に対する光弾性実験法の適用について述べ、それらの状態の地山中の坑道周辺応力分布について実験的考察を行つた。すなわちまず数学的に取扱いの困難な種々の断面形状をもつ坑道の周辺応力分布を光弾性実験によつて求め、それらを比較考察して周辺応力分布に影響を及ぼすところの断面形状の一般的な性質を明らかにし、応力的に有利な坑道の形状について考察した。その結果一般につぎのことが明らかになつた。鉛直荷重のみが作用する場合には頂点および底部中央における引張応力は断面形状にかかわらずほゞ荷重強度に等しい値をとる。また２軸的な初期荷重状態に対して経済的な条件として頂点の応力が零になることを考えると、断面の高さが増すにつれて上部アーチの高さを低くすることが必要である。なお側壁の応力は断面の高さが大きくなるほど小さく、曲線壁に対するより直線壁に対する方が小さいことなどが判り、結局周辺応力は本質的には断面の高さと幅の比、アーチおよび側壁の曲率などによつて決定されるものと思われる。

つぎに直交異方性弾性地山中の坑道応力に対する光弾性実験法の適用について述べた。すなわち直交異方性平板に対する光弾性被膜法の適用ならびに応力解析法を示し，異方性材料ならびに光弾性被膜材料の作成およびその性質，反射式光弾性装置等について述べ，さらに実験結果を示してそれよりえられる周辺応力分布を理論計算値と比較検討した。その結果この実験方法が異方性平板の応力解析に有利に利用され，とくに計算を行いがたい異方性地山中の任意形状の坑道や双設坑道等に対しても有効に適用されうることが明らかにされたが，光弾性被膜の性質が温度に対して不安定であることや解析過程に入つてくる弾性性質に対する仮定等のために実験値と理論値との間に差異を生ずる場合があることを考えると，さらにこれらの点について研究を進めねばならないと思われる。

つぎにエポキシ樹脂（光弾性材料）で種々の層高比および弾性係数比をもつ層状地山模型をつくり，それに集中荷重を載荷して光弾性縞を撮影し，層状体における応力集中の伝播現象について考察した。さらに種々の層高を有する同種の層状地山模型に円孔および正方形孔をうがつて光弾性実験を行い，孔周辺応力をさきに求めた理論値と比較検討して，層厚が坑道直径あるいは坑道幅の¾以下の場合には理論式が層高のいかんにかかわらず近似的に適用されうることを明らかにした。またゼラチンによる地山模型を用いた光弾性実験を示し，層が坑道応力および坑道の変形に及ぼす影響について考察した。

また点等方性弾性地山中の坑道の周辺応力分布を実験的に求めるために，まず点等方性弾性体に対する光弾性実験法の適用について説明し，この実験法が周辺応力の解析にも適用しうることを示すとともに，さきに行つた理論的考察の場合と同様な２つの場合の円形坑道に対する実験結果を示した。その結果を理論値と比較するとともに等方等質の弾性地山　の場合の応力分布と比較し，坑道が点等方性の地山にある場合の方が全体的に周辺応力は大きく，またその場合の下盤の引張応力が上盤のものより大きくなり，この傾向は坑道が浅いほど大きいこと，側壁部の最大圧縮応力は側壁中央に生じないで，それよりいくぶん下寄りのところに生ずることなどが明らかになつた。

つぎに理論的な解析の困難な水平交差坑道における応力集中の問題を解決するために，凍結法による３次元光弾性実験を行い，坑道周辺における応力集中の解析方法を示すとともに，坑道の交差角と応力集中度との関係について考察し，交差部には単独坑道の場合に比して２～５倍の高い圧縮応力の集中を惹起することを明らかにし，坑内の坑道分岐部における坑道支保についての一つの資料をえた。

第４篇においては，坑道覆工の応力状態について理論的および実験的な考察を行つた。従来の覆工応力の算定はもつぱら土圧論にもとずいていたが，一般には地山の状態はきわめて複雑であり，覆工にかかる地圧を充分に把握することはきわめて困難なことである。こゝでは地山の弾性性質や覆工厚が覆工応力に及ぼす影響についての基本的な概念をうるために，つぎのような考察を行つた。すなわちまず弾性地山中に円形巻立坑道が水平に設けられる場合の覆工応力式を導き，その式を用いて地山と覆工との種々の弾性係数比および種々の覆工厚に対して周辺応力分布や内部応力分布を求め，地山の弾性係数や覆工厚によつて覆工応力がいかに影響されるかを明らかにした。またこれ

らの応力計算は地山と覆工との附着面の状態より2つの極端な場合と考えて行われ、その両者の条件による応力状態の変化についても考察を行つた。つぎに円形立坑の覆工応力状態を、地山状態が弾性的あるいは弾塑性的である場合に対して求め、地山の状態による覆工の内部応力分布の変化について考察した。

つぎにある膨脹性地山における坑道覆工の破壊状態の観察より、掘削面が一様に膨脹して均一圧力を及ぼす坑道覆工の周辺応力状態を究明し、覆工の亀裂の発生原因を明らかにするために理論的および実験的考察を行つた。その結果施工中の覆工はしばしば1つの構造物として作用せず、上部アーチと側壁との接続部は鉸のような作用をすることを指摘し、そのような覆工が膨脹性の地山中にあるときには、危険な応力状態を呈しやすいから、覆工施工に当へては掘削後コンクリート施工までに要する日数および地圧状態を考慮して、適切な余堀を行い地圧の緩和を計るとともに、覆工施工後はただちにグラウト工によつて地山と覆工の間に存在する空隙を填充し、均一な圧力が覆工に作用するようにしなければならないことなどを明らかにした。

さらにいかなる形状の覆工が応力的に有利であるかを明らかにするために、基本的な形状として曲率を異にするインバートアーチを有する半円形断面の坑道を選び、地山模型の弾性係数を変化させて光弾性実験を行つた。そして断面形状および地山の弾性係数が覆工応力分布の状態に及ぼす影響について明らかにし、覆工の設計に対する種々の示唆にとむ資料をえた。

以上は著者が坑道設計および施工の合理化を計るために行つた坑道周辺応力状態および覆工応力に関する基礎的研究の内容であるが、種々の状態における地山中の坑道の応力や変形あるいは、覆工応力等の状態がかなり明らかになり、坑道設計の合理化に資するところが少なくないと信ずる。

最後に本研究を行うにあたり終始御指導を賜つた京都大学教授小西一郎、村山朔郎、丹羽義次各博士に深甚の謝意を表し、鉱山における盤圧の研究に関して多大の御教授、御忠言をいただいた京都大学教授平松良雄博士ならびに岡行俊博士に感謝の意を表する次第である。また本研究中 つねに御援助いただいた熊本大学教授福井武弘先生をはじめ土木教室の方々、実験研究に御助力いただいた熊本大学教授兼重修博士ならびに鉱山学教室の岡村宏講師に心からの感謝を捧げ、御礼申し上げる次第である。

オ／篇　参考文献

1）高橋彦治、白井慶治：北陸トンネルの地質とその工学的解釈、鉄道技術研究所、第７４号

日本国有鉄道札幌工事局：日振ずい道工事誌、昭３４－１２

村山　功：大町トンネル破砕工事について、土木学会「トンネルと堀削工法」昭３４－８

2）宮崎政三：トンネルの地質調査、土木学会「トンネルと堀削工法」４７頁、昭３４－８

高橋彦治：トンネルの地質調査のための工事上の問題点、土木学会誌、第４６巻第１号、２１頁、昭３６－１

3）前出２）高橋彦治、２４頁

野沢太三：膨脹性地山におけるずい道の土圧と施工法、土と基礎、vol、8、№5、№6、1960、vol、9、№1、1961

4）例えば、O、Müller : Untersuchungen an Korbongestinen zur Klärung von Gebirgsdruckfragen, Glückauf, 1930

D.W.Phillips : The Nature and Physical Properties of Some Coal-measure Strata, Trans. Inst. Min. Engrs. vol. 80

W.Nebelung und E.Welter : Untersuchungen der Festigkeits eigenschaften von des Gasflammkohlengruppe, Glückauf, 1933

堀部富男：爽炭層岩石の撓みの時間的効果について、日本鉱業会誌、６９－７８１

5）星埜　和：土の力学における塑性基本理論と三軸試験への適用、土木学会論文集、第２１号、昭２９－１２

6）村山朔郎ほか：土の粘弾性について、土木学会誌、第３８巻第５号（昭２８－５）、第４０巻第７号（昭－３０－７）

粘土のレオロジー的特性について、土木学会論文集、第４０号、１９５６

7）平松良雄、西原正夫：二、三の堆積岩のクリープについて、日本鉱業会誌、７３巻８３０号、昭３2，８

8）D.P.Krynine and W.R.Judd : Principles of Engineeving Geology and Geotechnics, 1957, pp, 355～357, McGraw Hill Co.Inc.

P.V.Proctor and T.L.White : Rock Tunneling with Steel Supports, with introduction by K.Terzaghi on tunnel geology., 1946, Commercial Shearing and Stamping Co.

9）S.Timoshenko and J.N.Goodier : Theory of Elasticity. McGyaw-Hill Book Company., Seand edition.p.56

10）前出9），p.116

11）倉西正嗣：弾性学、日本機械学会、372頁

12）久野重一郎：円形無巻立坑道に及ぼす外部荷重の影響、土木学会誌、第15巻第8号、607頁、昭和4－8

13）安蔵善之輔：水平表面に接して一円形孔を持った重力体中の応力について、九州大学工学報告、12巻3号、昭－13

14）村上　正：一円孔を持ち、縁上に等分布荷重を受ける半無限板の応力、土木学会誌、第28巻第8号、718頁、昭17－8

15）鵜戸口英善：双極座標による二、三の平面弾性問題の解、日本機械学会論文集、第15巻第50号、76頁、88頁、昭24

16）*T.Itō : Stress Distribution around Two Parallel Tunnel* 大阪大学工学部報告、*vol*.147、1955

17）*R.D.Mindlin : Stress Distribution Around a Tunnel*, *Proc.of Am.Soc.of C.E. Apr*.1939

18）前出11）、386頁

19）*N.I.Muschelishivili : Some Basic problems of the Mathematical Theory of Elasticity pp*.104～156

20）前出19）、*p*.110

21）*G.N.Sawin : Spannungserhöhung am Rande von Löchern*, *VEB Verlag Technik Berlin*, 1956、*S*.17

22）前出　8）

23）*A.E.Green and G.I.Taylor Proc.Roy.Soc.London A. p*.160　1939

24）池田　健：直交異方性の平面応力に就いて、東京帝国大学、航空研究所報告19、10、昭18－7

25）*V.Kafka : Der Spannungszustand in ei em Geschichteten Medium ACTA Technica*, *Ceskoslovenska' Akademie Věd*, *Svazek* 2, *S*.262、1957

26）前出　21）、*ss*.172～216

27）前出　21）、*s*.31

28）前出　25）

29）*G.Sonntag : Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung Forsch.Ing.–Wes.Bd*.23、*s*.3、1957

30）*O.K.Fröhlich : Druckverteilung im Baugrund*, *J.Springer*, *Vienna*, 1934

31）*J.Ohde : Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund*, *Der Bauingenieur*, *Bd*.20、1939

32）*H.Borowicka : Die Druckausbreitung im Halbraum bei linear zunehmenden Elastizitätsmodul, Ing.Archiv,* Bd.1 4, 1 9 4 3

33）*A.J.Curtis and F.E.Richart : Photoelastic Analogy for Non-homogeneous Foundations, Proc.ASCE.Vol.*7 9, *July* 1 9 5 3

34）*V.Willmann : Übereinige Gebirgsdruckerscheinungen in ihren Beiziehungen zum Tunnelbau,* 1 9 1 1, *s*.2 7

Kommerell : Statische Berechnung von Tunnelmauerwerk, 1 9 1 2, *s*.2 9

P.Kühn : Spannungszustand und Bruchgefahr in ungestörten Gebirge, Glückauf, 1 9 3 1,

*J.R.Dinsdalle : Ground Pressures and Pressure Profiles Around Mining Excavations, Coll.Eng., vol.*1 2, 1 9 3 5, *p*.4 0 6, *vol*.1 3, 1 9 3 6, *p*.16

35）西原利夫ほか、：粉体力学（第一報）、（第二報）、日本機械学会論文集、第１７巻、昭２８、１１８頁、１２１頁、

36）赤井浩一：盛土内応力分布に関する研究、土木学会論文集、第４７号、４６頁、昭３２－８

37）最上、渡辺、山口：土質力学、応用力学講座、共立出版、５２頁

38）*W.Prager and P.G.Hodge : Theory of Perfectly Plastic Solids,*（日本語訳）*p*.1 9

39）*A.Nadai : Theory of Flow and Fracture of Solids, McGraw Hill Book Co.* 1 9 5 0, *p*.4 0 2

40）中川有三：塑性学、機械工学講座３、５５頁

41） 前出 ５）

42）*D.W.Phillips : The Nature and Physical Properties of Some Coal-Measure Strata, Trans.Inst.Min.Engers.vol.*8 0

43）*D.Griggs : The creep of rock, Journal of Geolsgy,* Bd.4 7, *s*.2 2 5－2 5 1, 1 9 3 9

44）前出 ７）

45）*K.H.Höfer : Die Gesetzmässigkeiten des Kriechens der Salzgesteine und deren allgemeine Bedeutung für den Bergbau, International Strata Control Congress,* 1 9 5 8

46）*H.G.Denkhaus : Über die Bedeutung einger Eigenschaften des Gesteins für das Problem der Gebirgsschläge in Gruben großer Teufe, International Strata Control Congress,* 1 9 5 8

47）*A.Saustowicz : New Conceptions as to the Phenomena of Stress and Strain in Rocks around Mining Excavations, International Strata Control Congress,* 1 9 5 8

48）篠田仁吉：粘弾性体の圧密、土木学会誌第38巻第5号、昭28－5
49）村山朔郎、片山重夫、天野光三：土の粘弾性について、土木学会誌、第37巻第5号、
昭27－5
50）村山朔郎：粘土の粘弾性について、土木学会誌第40号第7号、昭－30・7
51）村山朔郎、柴田 徹：粘土のレオロジー的特性について、土木学会論文集、第40号、
1956
52）前出 40）、7頁
53）小田英一：粘弾性体としての地山中の素掘円形トンネルの変形挙動について、土木学会論文集、第68号、昭35－5
54）小田英一：レオロジー的特性の地山中の素掘円形ずい道の変形挙動について、日本鉄道技術協会、昭35－3
55）前出 7）

才2篇　参考文献

1) H.Schmid : *Statische Probleme des Tunnelund Druckstollenbaues und ihre gegenseitigen Beziehungen*, Verlag von Julius Springer 1926 s.s.16～26

2) 安蔵善之助：水平表面に接して一円形孔を持つた重力体中の応力について、九州大学工学報告、12巻3号、昭−13、140～160頁

3) R.D.Mindlin: *Stress Distribution Around A Tunnel*, Proc.A.S.C.E. vol.65, pp.619～642, 1939

4) 伊藤富雄：傾斜面の下に掘つたトンネルの周辺応力について、土木学会誌、第36巻第2号、19～22頁、昭26−2

5) 石田　誠：水平地表面下にうがたれただ円断面坑道周縁の応力、日本機械学会論文集、23 23巻、131号、474～479頁、昭32・7

6) 杉原武徳：楕円形水平坑道の周囲における土圧、日本鉱業会誌、第49巻第575号

7) 山口　昇：水平頂面を有つ重力体中に水平円形孔をうがつた場合の応力分布、鉄道省業務研究資料、第16巻第11号

8) S.Timoshenko and J.N.Goodier : *Theory of Elasticity* McGraw-Hill Book Company ,Second Edition., pp.78～80

9) 荒井利一郎：巻立てなき楕円形隧動附近における応力の状態について、土木学会誌、第28巻第12号

10) G.N.Sawin : *Spannungserhöhung am Rande von Löchern*, VEB Verlag Technik Berlin 1956, s.86

11) 例えば前出　8), p. 203

12) 谷本勉之助：巻立円形隧道の応力分布、土木学会誌、第23巻第4号

13) 前出　10), ss.248～256

14) Yi-Yuan Yu : *Gravitational Stresses on Deep Tunnels*, Journal of Applied Mechanics, vol.19, №4, p.537

15) 小田英一：巻立楕円形トンネル周辺の応力分布について、土木学会論文集、第24号、12頁、昭30−4

16) 前出　10), s.296

17) N.Muschelisvili : *Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsf—*

ormen Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, vol.13, 1933e, ss.264〜282
18）岡本舜三：素掘坑の強さに関する弾性学的考察（上）、土木学会論文集、昭22、23年度、60頁、昭24－3
19）D.M.Wrinch : Some Problems of Two-Dimensional Electrostatics, Phil. Mag, vol.48, p.693, 1924
20）前出　17）
21）前出　10）、s.24
22）S.R.Heller, J.S.Brock, R.Bart : The Stresses around a Rectangular Opening with Rounded Corners in a Uniformly Loaded Plate, Proc.3rd U.S.Nat.Cong.of Appl.Mech., pp.357〜368, June 1958
23）前出　14）
24）G.Eras : Analytische Spannungsermittlung bei Tunnelquerschnitten, Der Bauingenieur, 34, Heft2, s.49, 1959
25）川本眺万：異方性弾性地山におけるずい道周辺応力状態および変形について、日本鉄道技術協会、昭35－3
26）前出　10）s.48
27）G.Sonntag : Einfluβ der Anisotropie auf die Beanspruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen, Der Bauingenieur 33 Heft 8, s. 287, 1958
28）L.Föppl : Drag und Zwang, 3Bd., s.177, 1947
29）川本眺万：異方性弾性地山における素掘円形トンネルの変形について、土木学会論文集、第71号、20頁、昭35－11
30）小田英一：粘弾性体としての地山中の素掘円形トンネルの変形挙動について、土木学会論文集、第68号、41頁、昭35－5
31）池田　健：直交異方性板の平面応力に就いて、東京帝国大学航空研究所報告、第19巻第10冊、第259号、昭18－7
32）S.G.Lechnizki : Anisotrope Platten, OGIS Staatstechn. Verl., s.100〜108, 1947
33）前出　27）
34）前出　10）ss.27〜36、ss.167〜174
35）前出　8）、p.80
36）前出　27）、s.290
37）前出　10）、s.44
38）玉田文吾：古谷小野田炭鉱水平坑道における無支柱化の一考察、九州鉱山学会誌、第23

巻第6号、237頁、第23巻第11号、522頁
39）平松良雄、岡　行俊：採炭切羽付近の盤圧について、日本鉱業会誌、*vol.*73、№833、1957、817頁
40）*G.Sonntag : Einfluß der Anisotropie auf die Beanspruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen, Der Bauingenieur* 33 *Heft* 9, *s*.344, 1958
41）兼重　修、川本眺万、岡村　宏：層状岩盤内の坑道周辺応力分布状態について、日本鉱業会誌、*vol*.76、№867、*p*.614、昭35－9
42）川本眺万：点等方性弾性地山内のトンネル周辺応力状態について（その1、理論的考察）、熊本大学工学部研究報告、第8巻、第3号、14頁、昭34－12
43）*J.Ohde : Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund, Der Bauingenieur, Bd*.20, 1939
44）例えば、*C.Jaeger : Present Trends in the Design of Pressure Tunnels and Shafts for Underground Hydro-Electric Power Stations. Proc.of I.C.E.March* 1955
45）前出　10）、*s*.219
46）*R.Fenner : Untersuchung zur Erkenntnis des Gebirgsdrucks, Glückauf*, 74, *s*.681, 1938
47）平松良雄、岡　行俊：塑性地盤中の盤圧現象と支保について、日本鉱業会誌、*vol*.73、№826、1957
48）伊藤富雄：砂層中に掘った導坑の坑頂圧に関する理論的研究、土木学会第14回年次学術講演会、講演概要115頁、昭34－6
49）小田英一：塑性体としての地山中の円形隧道の崩壊機構に就いて、広島大学工学部研究報告、163頁、28－2
50）小田英一：塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル応力について、土木学会論文集、第19号、15頁、昭29－4
51）前出、第1篇　53）、54）
52）須原武徳：円形竪坑及び斜坑の周囲に於ける応力分布、日本鉱業会誌、№560、1176頁、昭6－12
53）鈴木　光：巻立円形竪坑の応力分布、日本鉱業会誌、65巻733号、118頁、昭24－4
54）川本眺万：円形立坑周辺の弾塑性応力状態にたいする近似解法、土木学会論文集、第59号、1頁、昭33－11
55）*A.Nadai : Theory of Flow and Fracture of Solid McGraw Hill Book Company* 1950 *pp*.225～228

５６）星埜　和：土の力学における塑性基本理論と三軸試験への適用、土木学会論文集、第２１号，
昭２９－１２
５７）前出　55)、p.４７２
５８）伊藤富雄：円形立て坑の周囲における弾塑性応力状態、土木学会論文集、第４６号，
昭３２・６
５９）*W.Prager and P.G.Hodge : Theory of Perfectly Plastic Solids,*
（日本語訳），p.９２
６０）*H.N.*ベズーホッフ：弾性・塑性論、３０７頁

才 3 篇　参 考 文 献

1) *J.Weissner : Beobachtungen über Raumbewegungen in Abbaustrecken,Glückauf* 70,s.1041,1934

R.Faulkner and D.W.Phillips : Cleavage, included by mining,Tvans.Insf. Min.Engrs. vol.85

2) 鈴木　光：盤圧変圧器による坑内崩落あるいは落盤の危険の予知測定について、日本鉱業会誌67－775，151頁、昭28－5

高田孝信：光弾性装置によるトンネル覆工の応力測定について、土木学会第11回年次学術講演会前刷、昭30－5

森田定市、須藤　実：カールソン歪計による竪坑井筒の応力測定、土木学会第11回年次学術講演会前刷、昭30－5

野口、佐々木、平松、岡：神岡鉱山における鉱注内の応力の測定、日本鉱業会誌75－849、151頁、昭34－3

W.Harnack : Messungen des Ausbauwiderstandes von Grubenstempeln mit den Satzdehnungsmesser Bauart Pfender,Glückauf.(日本版) 8-9.542頁.1959

3) *H.Middendorf und J.Oskar : Ankerausbau in Abbaustrecken,Glückauf* 89, s.809,1953

鈴木　光　：　盤圧測定用の電気抵抗線歪計について、日本鉱業会誌，69－175．5頁，昭28－1

平松、丹羽、岡、若松：光弾性を利用する盤圧の測定（第1、2報）、日本鉱業会誌71－799（昭30－1）、72－812（昭31－2）

平松良雄、岡　行俊：光弾性を利用する盤圧測定法の改良、日本鉱業会誌、75－847，昭34－1

4) 鉄道技術研究所：変形ずい道調査資料の総括、鉄道技術研究所研究状況資料，57－51，昭32－10

5) 粕谷逸男：日振ずい道工事誌、土と基礎3～6、1953～1954

野沢太三：膨脹性地山におけるずい道の土圧と施工法について、土と基礎、*vol*.8,№5，№6，1960，*vol*.9,№1、1961．

6) *E.Lehr und K.Seidle : Modellversuche zur Klärung der Spannungsverteilung in der Umgebung von Strecken in Gebirge,V.D.I.Forschungshaft*, 372

7）山口　昇：寒天模型による隧道内応力分布の研究、鉄道業務研究資料、*vol*.17,№6,昭4-6

8）岡本舜三：素掘坑の強さに関する弾性学的考察(上)(下)、土木学会論文集３，６０～７９頁，１５９～１７４頁、昭２４－３

9）*K.H.Bussman und K.Stöke* : *Modellversuche zur Klärung der Spannungsverteilung in der Umgebung von Strecken in Gebirge,Wissenschaftliche Abhandlungen der deutschen Materialprufungsanstalten,Heft*.3

10）*A.D.Kofader* : *An Investigation of the Stress Distribution around Underground Openings by the photoelastic Method,Masters Thesis p*,68, １９４３，

11）*Duvall,Wilbur* I,: *Stress Analysis Applied to Underground Mining Problems,part* 1 *Stress Analysis Applied to Single Openings,U.S.,Burea of Mines Report of Invest*.,4192,1948

12）*R.Hiltscher* : *Spannungen an Tunnelöffnungen mit rechteckigem Nutzquerschnitt und kreisbogenförmiger Überwölbung,Der Bauingenieur* 32, *Hegt* 8, *s*.288,1957.

13）*R.Hiltscher und B.Pant* : *Die total Zugkraft an Öffnungen in einem einachsigen Druekspannungsfeld,Der Bauingenieur* 32,*Heft* 12,*s*.55.1957

14）*G.Sonntag* : *Einfluβ der Anisotropie auf die Beanspruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen,Der Bauingenieur* 33,*Heft* 8,*s*.288, 1957,*Heft* 9,*s*.344,1958

15）平松良雄，岡　行俊：弾性岩盤中に開さくされた坑道の周りの応力、日本鉱業会誌７５－８５８、１０８０頁、昭３４－１２

16）*G.Dommann* : *Untersuchungen über die Wirkung von Druckformen und Hohlformen in allseitig gespannten Gestein zur Klärung von Gebirgsdruckfragen,Glückauf*,1936

17）*B.Bucky* : *Use of Models for the Study of Mining Problems,A.I.M.M.E. Tech.Pub*.№425,*Feb*.1931

18）平松良雄、岡　行俊：竪坑底岩盤の盤圧に関する実験的研究、日本鉱業会誌６８－７７４、５４５頁、昭２７－９

19）伊藤富雄：トンネルの崩壊機構（第２報），土木学会第６回年次学術講演会前刷、昭25-5

20）小田英一：塑性体としての水平層を有する地山中のトンネルの応力に関する実験について、土木学会第１１回年次学術講演会前刷、昭３０－５

21）小田英一：レオロジー的特性の地山中の素掘円形ずい道の変形挙動について、日本鉄道技術協会，昭３５－５

22）川本眺万：ずい道断面形状に関する光弾性学的研究、日本鉄道技術協会、昭３４－３

２３）前出１２）

２４）*Y.Hiramatsu and Y.Oka : The Fracture of Rock around Underground Openings,Memoirs of the Faculty of Engineering,Kyoto University,vol.XXI part 2,April*,1959

２５）前出１５）

２６）丹羽義次、川本眺万：円孔を有する異方性平板の光弾性実験、土木学会第１６回年次学術講演会前刷、４９頁、昭３６－５

２７）林　毅：直交異方性材料の光弾性試験法と二三の試験結果について、第１０回応力学連合講演会前刷、昭－３５

２８）林　卓夫：等価異方性板を用いる平面応力の実験、日本機械学会論文集（第１部）２６－１７０、１３２０頁

２９）河田幸三：光塑性実験法、機械学会第１１８回講習会教材、昭３４－５

河田幸三：構造要素の降伏の実物光弾塑性学的研究について、東京大学航空研究所集報、１－５、１９５９－９

３０）河田幸三、鈴木新嗣：実物光弾塑性解析用の光弾性皮膜について、科学研究所報、３３－４、昭３２－７

河田幸三、鈴木新嗣：実物光弾塑性解析用の光弾性カメラの試作について、科学研究所報、３３－４、昭３２－７

３１）*J.D'Agostino*,ほか：*An Analysis of plastic Behavior of Metals With Bonded Birefringent Plastic,Proc.Soc.Experimental Stress Analysis, vol*.12,*No*.2.*p*.115,1955.

３２）*F.Zandman : Méthode non destructive danalyse des contraintes par vernis photoelastigues,Analyse des contraintes,vol*.2,*No*.6,1956

３３）*G.U.Oppel : Photoelastic Strain Gages,Experimental Mechanies,March* 1961, *p*.65

３４）*J.Duffy : Effects of the Thickness of Birefrimgent Coatings, Experimental Mechanics,March* 1961,*p*.74

３５）倉西正嗣：弾性学、日本機械学会、５８４頁

３６）前出２９）光塑性実験法、５５頁

３７）前出、第２篇４１）

３８）*G.Sonntag : Einfluß der Anisotropie auf die Beanspruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen,Der Bauingenieur* 33,*Heft* 9, 1958,*s*.344

３９）川本眺万：点等方性弾性地山内のトンネル周辺応力状態について（その２、実験的考察）、熊本大学工学部研究報告、第８巻、第３号、２２頁、昭３４－１２

40）前出、第1篇33）
41）西田正孝、本堂　実：二、三の三次元応力集中問題の凍結光弾性実験に就いて（第一報）、
科研報告30－1、昭29－1

才４篇　参考文献

1）坂本貞雄：トンネルの支保と覆工、土木学会、トンネルと掘削工法、昭３４－８、１３９頁

2）小野諒兄：隧道の建設及設計、共立出版、１８３頁

Q.V.Proctor and T.L.White : Rock Tunneling with Steel Supports,the Commercial Shearing and Stamping Co.,1946,*p*.59

3）前出２）*Rock Tunneling with Steel Supports,p*.91

4）*P.Kipfer und H.Wanzenrid : Der Donnerbühl-Tunnel in Bern,Spannungsoptische Untersuchung des Tunnelquerschnittes,Schweiz.Bauzeitung,* 78-11,*März* 1960,*s*.191

5）*G.Sonntag : Theoretische und Spannungsoptische Untersuchung einer Tunnelröhre,die durch in ihrer Längsrichtung verlaufende Zerrüttungszohnen belastet ist,Der Bauingenieur* 31-11,1956

6）*D.Bonnard und E.Recordon : Experimentelle Untersuchung des Erddruckes auf den Tunnel,Schewigerische Bauzeitung*,78-10,*März* 1960,*s*.168

7）前出、第２篇１２）

8）前出、第２篇１５）

9）前出、第２篇５４）

１０）例えば、*C.Jaeger : Present Trends in the Design of Pressure Tunnels and Shafts for Underground Hydro-Electric Power Stations,Proc.of the I.C.E.,March*,1955

１１）前出、第１篇３）

１２）三島吉治、津村利光：切れ目を有する円環の応力、第４回応用力学連合講演会前刷、１６０頁

１３）前出、第３篇２２）