

回転球面上の減衰性 2 次元乱流から生じる 西向き周極流の形成機構に関する研究

*佐々木俊輔・石岡圭一 (京都大学大学院理学研究科)

1 はじめに

惑星大気の大規模な運動は準 2 次元的な振る舞いを示すことが知られており、2 次元流体は惑星大気の最も簡単なモデルとして研究されてきた。2 次元流体に関する知見は、惑星大気の力学を理解するための基本的な知識として重要である。

回転球面上の 2 次元乱流の研究は、Williams(1978)により始められた。彼は木星の縞の解明を動機づけとして、1/16 の球面上で初めて強制 2 次元乱流実験を行い、木星の縞に似た、東西方向に引き伸ばされた流線関数場を得た。一方、球面全域での減衰性 2 次元乱流の数値実験を最初に行った Yoden and Yamada(1993) は、球の回転角速度が大きい場合に、極域に強い西向きの流れ（西向き周極流）が自発的に出現すること、および中・低緯度には帯状構造が形成されることを指摘した。その後、石岡ら (1999)、Hayashi et al.(2000) および Takehiro et al.(2007) により回転角速度を広いパラメータ範囲で変えた高解像度アンサンブル実験が行われ、

1. 西向き周極流の幅・強さ・形成される緯度が明確な回転角速度依存性を持つこと
2. 中・低緯度に形成される帯状流の南北スケールが明確な回転角速度依存性を持つこと

が示されているが、これらを理論的に根拠付けた研究はまだない。本研究では、(1) および (2) を説明する理論を構築することを目的とする。

2 支配方程式

2.1 球面上の 2 次元渦度方程式

支配方程式は次の 2 次元渦度方程式である；

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\cos \phi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \right) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = K_q. \quad (1)$$

ここで、 ψ :流線関数、 $\zeta = \nabla^2 \psi$:相対渦度、 (λ, ϕ, t) :(経度、緯度、時刻)、 Ω :球の回転角速度、 K_q :外力・粘性項

である。経度方向および緯度方向の速度 (u, v) は、流線関数 ψ と $(u, v) = (-\partial \psi / \partial \phi, 1 / \cos \phi \partial \psi / \partial \lambda)$ の関係にある。方程式は球半径と全球平均流速を用いて無次元化してある。

3 数値実験の構成

3.1 基礎方程式

支配方程式 (1) を球面スペクトル法を用いて球面上で数値積分する。相対渦度 ζ を、球面調和関数 $Y_n^m(\lambda, \phi) = P_n^m(\phi)e^{im\lambda}$ で展開する (球面調和関数の性質については石岡 (2004) を参照)；

$$\begin{aligned} \zeta(\lambda, \phi, t) &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n \hat{\zeta}_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \phi) \\ &= \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n \hat{\zeta}_n^m(t) P_n^m(\phi) e^{im\lambda}. \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $\hat{\zeta}_n^m$ は渦度 ζ のスペクトル係数、 N は切断波数、 n は全波数、 m は帯状波数である*1。式 (1) の右辺 K_q は高階粘性とする。これは、解像度が有限であることの影響を抑えて数値計算を行うための工夫で、切断波数付近では強い粘性を与え、低波数領域ではほとんど散逸を起こさない性質を持つものである。今回は

$$K_q = (-1)^{p+1} \nu^p (\nabla_h^2 + 2)^p \zeta \quad (3)$$

で、階数 $p = 10$ 、高階粘性係数 $\nu = 2.3 \times 10^{-38}$ を採用した。(1) と (2) から展開係数 $\hat{\zeta}_n^m$ に対する連立常微分方程式を導く；

$$\frac{\partial \hat{\zeta}_n^m}{\partial t} = \hat{\mathcal{N}}_n^m + \frac{2\Omega im}{n(n+1)} \hat{\zeta}_n^m - \nu_p (n(n+1))^p \hat{\zeta}_n^m. \quad (4)$$

ここに、 $\hat{\mathcal{N}}_n^m$ は非線形項のスペクトル空間での表現である。数値計算には ispack-0.71 (石岡、2005) を用い、線

*1 n についての和が 2 から始まるのは、 $n = 1$ の成分は渦度方程式 (1) の保存量である全角運動量に対応していて、これをゼロに定めているからである。

形項の積分には非線形項がない場合の解析解を用いることで計算コストの削減を図った。

時間積分には4次 Runge-Kutta 法を用いた。時間刻みは $\Delta t = 0.005$ とし、時刻 $t = 50.0$ まで時間発展を計算した。

3.2 実験パラメータ

今回の実験では無次元回転角速度 Ω をパラメータとし、0, 9, 16, 25, 36, 64, 100, 144, 289, 400, 625, 900, 1024 の14通りの値を用いて数値実験を行った。

本実験で用いたパラメータ Ω を、代表的な値を用いて地球および木星と対応づけると、 $\Omega = 36$ の実験がおおむね地球パラメータに相当し、 $\Omega = 289$ または 400 の実験がおおむね木星パラメータに相当する実験となる。

3.3 ラインズ波数と初期条件

減衰性2次元乱流から中・低緯度の帯状構造が出現するためには、初期に乱流的な時間発展が起こり、2次元乱流のアップワードカスケードが生じるようなスケールの擾乱を与える必要がある(石岡ら(1999)、Hayashi et al.(2000))。そこで、初期に与えるべき渦度擾乱のスケールを考える。

■ラインズ波数

渦度方程式(1)から、相対渦度の時間発展は、非線形項(左辺第二項)が卓越する場合は乱流的な振る舞いを示し、線形項(左辺第三項)が卓越する場合には波動的な振る舞いを示す。いま、非線形項と線形項を代表的なスケール L (長さスケール)、 U (速度スケール)、 ψ (流線関数のスケール) = LU で評価し、同程度になるスケールを求めると、空間スケールの逆数として特徴的な波数 n_R ;

$$n_R = \sqrt{\frac{2\Omega \cos \phi}{\langle u \rangle}} \quad (5)$$

が導かれる。ここで、長さスケール U を全球の二乗平均平方根速度(RMS速度);

$$\langle u \rangle = \sqrt{\langle u^2 + v^2 \rangle} = \sqrt{2E_{\text{total}}} \quad (6)$$

で評価した(E_{total} は全球平均した運動エネルギー)。 n_R はラインズによって初めて導入された量で、ここではラインズ波数と呼ぶ(Rhines(1975))。ラインズ波数は緯度に依存し、極で最小値0、赤道で最大値 $\sqrt{2\Omega/\langle u \rangle}$ を持つ。このラインズ波数の逆数がラインズスケールと呼ばれ、非線形項と線形項が同程度の大きさになるときの場のスケールの指標として用いることができる。

■初期条件

相対渦度スペクトル $\hat{\zeta}_n^m$ の初期値は、全波数 n に対する1次元エネルギースペクトルが

$$E(n, t=0) = \frac{An^{\gamma/2}}{(n+n_0)^\gamma}, \quad n_0 = 50, \quad \gamma = 1000 \quad (7)$$

で表される渦度分布を与える(Cho and Polvani (1996))。ここで、係数 A は無次元化した全球平均運動エネルギー E_{total} が

$$E_{\text{total}} = \sum_{n=2}^N E(n, t=0) = 0.5 \quad (8)$$

となるように決める。今回用いた $n_0 = 50$ という初期波数は、すべてのパラメータで赤道でのラインズ波数より大きく、初期に乱流的な時間発展が起こる条件を満たしている。各 n について、帯状波数 m 方向の振幅と位相は正規乱数でランダムに与える。ただし、本実験では擾乱からの帯状流形成に着目するため、初期の帯状流はゼロとした。すべての Ω について、上記のような初期値を50種類用意してアンサンブル実験を行った。

4 減衰性2次元乱流実験の結果

4.1 帯状流の時間発展: 1メンバーに対する結果

図1に、1つの初期値に対する帯状流の時間発展の時間-緯度平面図を、3つのパラメータ $\Omega = 36, 289, 900$ について示した。

$\Omega = 289$ の例において、初期($t = 1.0$ 程度まで)の帯状流は、初期波数 $n_0 = 50$ を反映して全緯度にわたって幅の狭い東西流が交互に並んだ緯度分布となっている。その後、アップワードカスケードによってエネルギーが低波数側に移行することにもない、帯状流の南北スケールが大きくなる。この過程が $t = 4.0$ ごろまで観察できる。その後、中・低緯度では、それまでに形成された帯状流の南北スケールや南北に交互に並ぶ東西流の山谷の位置(以下、これらを帯状構造と呼ぶ)は $t = 4.0$ の時点でほぼ固定され、最終時刻まで大きな変化がみられない。一方、極域の帯状流の流速は $t = 5.0$ 付近で -1.0 の等値線を越え、西向きに加速され始める。この加速は $t = 10.0$ ごろまで続き、最終時刻での西向き流速の絶対値は -3.0 と、中・低緯度の流速の最大値がせいぜい 0.5 であるのに対して大きいことがわかる。

西向き周極流と中・低緯度の帯状構造の形成の過程は、回転角速度 Ω によってそれぞれ大きく異なる。 $\Omega = 36$ の場合は、 $\Omega = 289$ と比べて中・低緯度の帯状構造が形

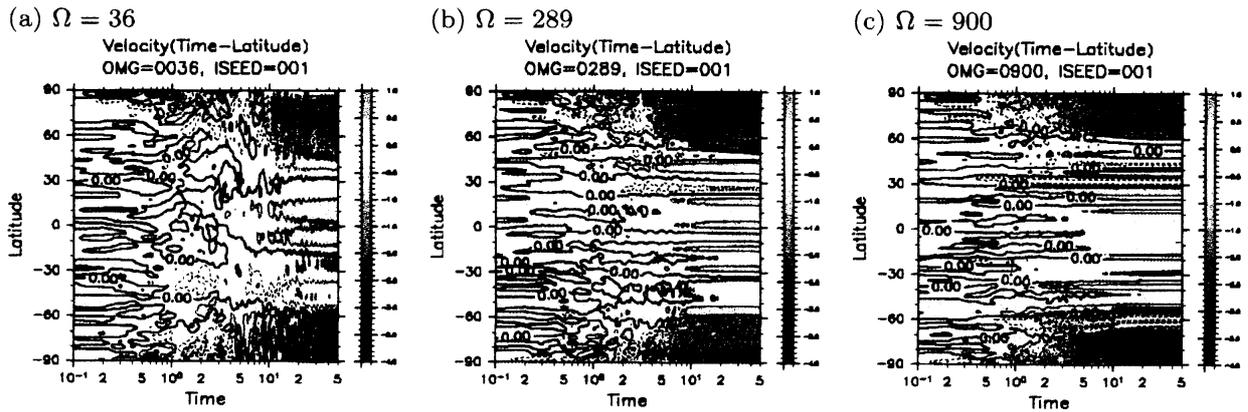


図1 帯状流流速の時間-緯度平面図。1つの初期値に対する (a) $\Omega = 36$, (b) $\Omega = 289$, (c) $\Omega = 900$ の結果。赤線は -1.0 の等値線。

成および固定される時刻が遅いこと、および形成される帯状流の南北構造のスケールが大きいことがわかる。極域(この場合北半球)の帯状流の流速は -1.0 の等値線(赤線)付近で振動しており、時間変動しながら少しずつ振幅を大きくしていることがわかる。また、最終時刻での西向き流速の最大値は -1.0 程度で、中・低緯度の東向き流と比べて明確に大きいわけではない。一方 $\Omega = 900$ の場合は、 $\Omega = 289$ の場合と比べて中・低緯度の帯状構造の南北スケールは小さく、極域に形成される西向きの流速は大きくなっている。また、西向き周極流の流速の絶対値が最大となる緯度が高緯度側にあることがわかる。いずれのパラメータについても、西向き周極流が形成され始める時刻と中・低緯度の帯状構造が固定される時刻がおよそ一致しているように見える。

4.2 帯状流の時間発展：アンサンブル平均した結果

図2に、50メンバーのアンサンブル平均をとった時間-緯度平面図を示す。図2では、1メンバーに対する結果では見えていた細かな構造が均され、形成される帯状流の特徴がよく見えている。西向き周極流に関しては、 Ω が大きくなるほど形成される緯度が高緯度側になり、最終時刻での西向き流速が大きくなっている。 $\Omega = 289, 900$ の場合に周極流が形成される過程をみると、1メンバーについての結果と、アンサンブル平均した結果で大きな違いが見られない。それに対して $\Omega = 36$ の場合は、最終時刻における西向き流速の絶対値の最大値はアンサンブル平均すると -0.5 程度で、1つの初期に対する結果では -1.0 を超えていたのに比べて弱くなっている。また、中・低緯度の帯状構造は、アンサンブル平均を取った図2では見えていない。

上のように、初期値によって形成される帯状流の緯度分布が違う点を詳しく調べるため、同じパラメータについて最終時刻での帯状流の緯度分布を50メンバー重ねがきしたものを図3に示す。この図から、図2で西向き周極流と中・低緯度の帯状構造の見え方が大きく違っていた理由がはつきりする。周極流についてみると、 $\Omega = 36$ では、いくつかのメンバーについては緯度60度付近に流速が -1.0 を超える強い西向きジェットが形成されている一方で、東向きジェットを持つメンバーや、より低緯度側に西向きジェットをつくるメンバーがあるなど、初期値によるばらつきが大きい。このため、アンサンブル平均(赤線)をとると西向きジェットがそれほど強く現れない。それに対して $\Omega = 289, 900$ の場合はほぼ全てのメンバーが同じ緯度付近で西向きのジェットを作っており、アンサンブル平均をとっても明確な周極流が観察されていることがわかる。中・低緯度の帯状構造については、どのパラメータの場合も、交互に並ぶ東西流の位置がメンバーによって異なり、アンサンブル平均をとるとほとんどゼロになっていることがわかる。

5 周極流形成の回転角速度依存性

5.1 周極流形成の判定条件

前節で見られた西向き周極流と中・低緯度の帯状構造の回転角速度依存性について、実験結果の統計的解析を行って周極流形成の回転角速度依存性を定量的に明らかにする。西向き周極流が形成され始めるときのジェットのピークが位置する緯度、および形成され始めるときの

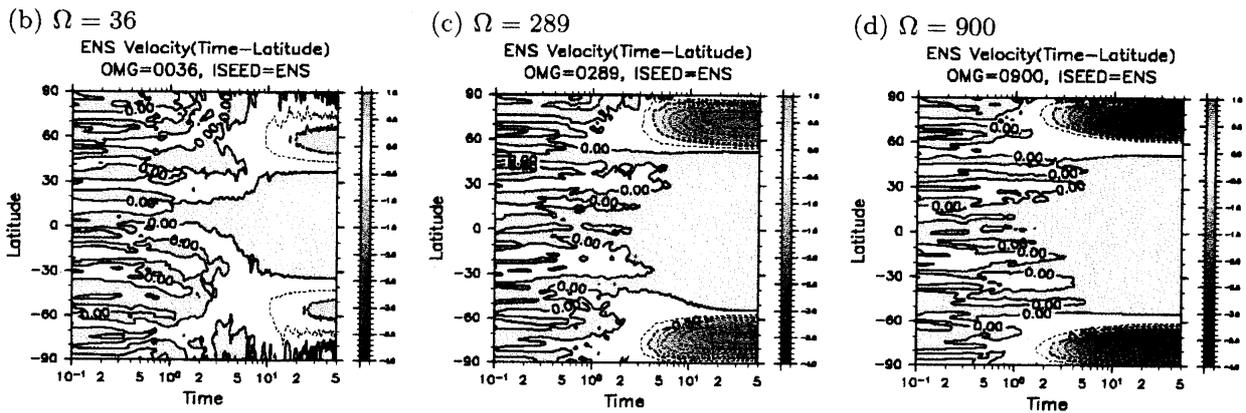


図2 帯状流流速の時間-緯度平面図。(a) $\Omega = 36$, (b) $\Omega = 289$, (c) $\Omega = 900$ の結果の50メンバーのアンサンブル平均値。赤線は -1.0 の等値線。

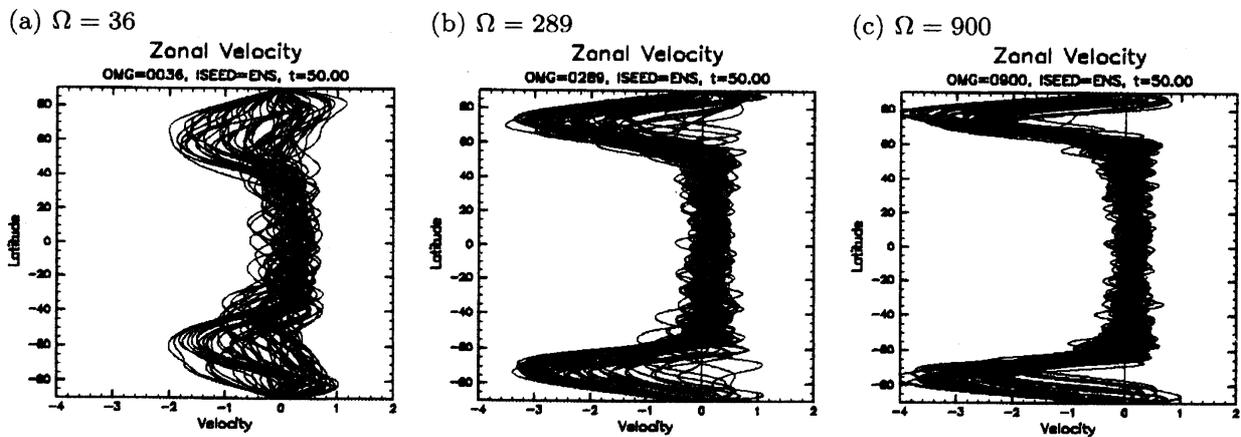


図3 最終時刻 $t = 50.0$ での帯状流流速。(a) $\Omega = 36$, (b) $\Omega = 289$, (c) $\Omega = 900$ について、50メンバーの重ねがき。赤線は50メンバーのアンサンブル平均値。

場の平均全波数 $\langle n \rangle = \sum_{n=2}^N nE(n) / \sum_{n=2}^N E(n)$ *2を求めるために、西向き周極流が形成されたと判定する条件を

- 西向き流速の絶対値が 1.0 以上であること
- この速度が、 2.0 (無次元時間) 以上維持されること

とする。これらの条件は、今回の実験設定では全球平均流速が 1 となるような規格化を行っていること、およびロスビー波が球面上を伝播することに伴う帯状流の変動が周極流の判定に影響を及ぼさないようにすることなどを考慮したものである。

5.2 解析結果

前節の判定条件を用いて、 $\Omega = 0$ 以外の13個のパラメータについてそれぞれ50個の初期値から時間発展させた実験結果を統計的に解析した結果を示す。

図4は、50個の初期値のうち、周極流が形成されたと判定された個数を Ω ごとにプロットしたのものである。 Ω が小さいとき ($\Omega < 64$) は、西向き周極流が形成された割合が小さいことがわかる。このことは、 Ω が小さい場合は周極流の形成が明確でなかったことから理解できる。 Ω が大きくなるにつれ、周極流が形成された割合は大きくなり、 $\Omega \geq 100$ では50メンバーすべてで周極流が形成された。 $\Omega \leq 36$ の範囲については、周極流が形成されたメンバーの数が統計的な議論を行うには少ないことに注意が必要である。以下では、主に $\Omega \geq 64$ の

*2 ただし、ここでの $E(n)$ は擾乱成分のみについての1次元エネルギースペクトルである。

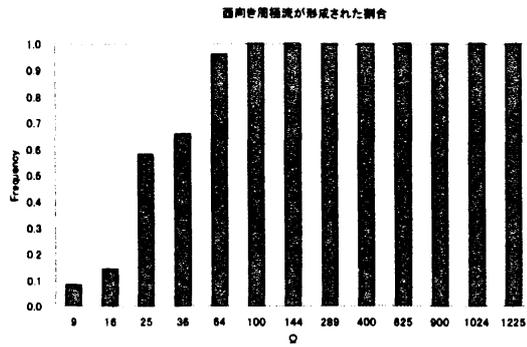


図4 西向き周極流が形成された割合の Ω 依存性。

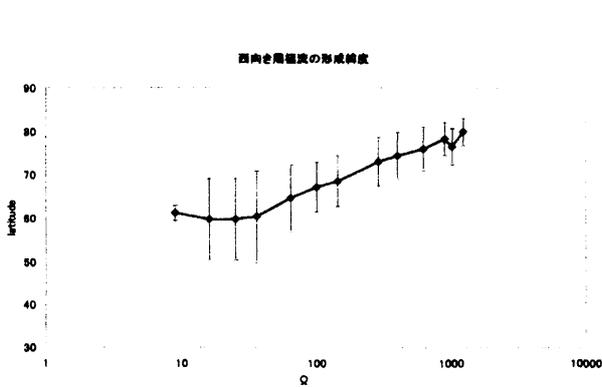


図5 西向き周極流が形成された緯度の Ω 依存性。エラーバーは標準偏差の範囲を示す。

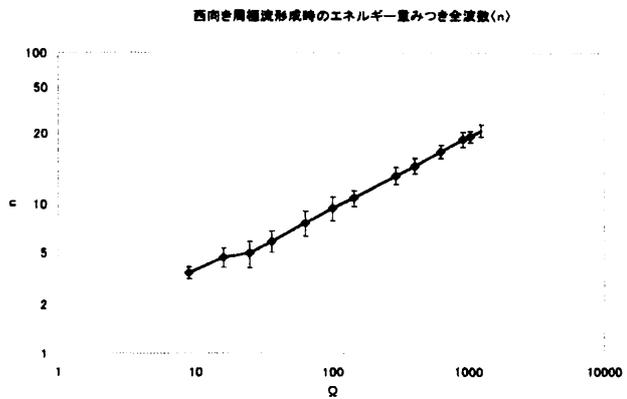


図6 西向き周極流形成時のエネルギー平均全波数 $\langle n \rangle$ の Ω 依存性。エラーバーは標準偏差の範囲を示す。

範囲について議論する。

図5は、周極流が形成された緯度を Ω に対して描いたものである。各 Ω である程度のばらつきは見られるが、 Ω が大きいほど周極流が形成される緯度が高緯度側になっており、周極流形成緯度の Ω 依存性が明確に見られる。

図6は、周極流が形成された時刻における平均全波数 $\langle n \rangle$ の値の Ω 依存性を示す。 Ω が大きいほど周極流形成時の $\langle n \rangle$ が大きくなっている様子が見られる。

以上、統計的な解析結果から、 Ω が大きい範囲(おおむね $\Omega > 64$)について西向き周極流が形成される緯度および中・低緯度に形成される帯状構造の南北スケールが明確な回転角速度依存性を持つことが明らかになった。次節以降では、これらを説明する理論を構築する。

6 周極流形成メカニズムの理論的検討

6.1 Hayashi et al.(2000)の提案したメカニズム

周極流形成の回転角速度依存性を力学的に解釈するため、Hayashi et al.(2000)(以下、H2000)が提案した周極流形成メカニズム(以下、林メカニズムと呼ぶ)を検討する。

極域でのポテンシャル渦度の乱流的混合は極域で西向きの流れを引き起こすはずであるが、そのためには中・低緯度から極域へ西向き角運動量(負の角運動量)が供給される必要がある。この担い手は、中・低緯度から極域に伝播するロスビー波である。ロスビー波が伝播するためには場が「波動レジーム」、すなわち場の時間発展が線形の力学で支配される状況でなければならない。

この考察を基に、H2000は、ロスビー波によって西向きの角運動量が中・低緯度から極域に輸送される機構を

考察した。彼らは、支配方程式 (1) から帯状流とロスビー波の相互作用のみを取り出した弱非線形方程式系を用い、ロスビー波に伴うウェーブアクティビティと呼ばれる 2 次の保存量が存在し、ウェーブアクティビティ (の東西平均値) の時間変化が 2 次の東西流 $\overline{u^{(2)}}$ を引き起こすことを導いた。

WKBJ 理論の仮定が成り立つ状況では、ロスビー波パケットが 2 次の帯状流 $\overline{u^{(2)}}$ を伴いながら中・低緯度から極域に伝播すると、 $\cos \phi$ のファクターのために大きな振幅をもった帯状流は高緯度でクリティカルレベル (ロスビー波の位相角速度と帯状流の速度が一致する緯度) を形成し、そこでクリティカルレベル吸着を起こす。H2000 はこのクリティカルレベル吸着によってロスビー波に伴う西向き角運動量が極域に集積され、それが西向き周極流を形成するというシナリオを示した。

彼らはこの周極流形成シナリオを確認するため、線形化方程式系を用いた数値実験 (弱非線形実験) を行った*3。その結果の一部を図 7 に示す。図 7 から、時間発

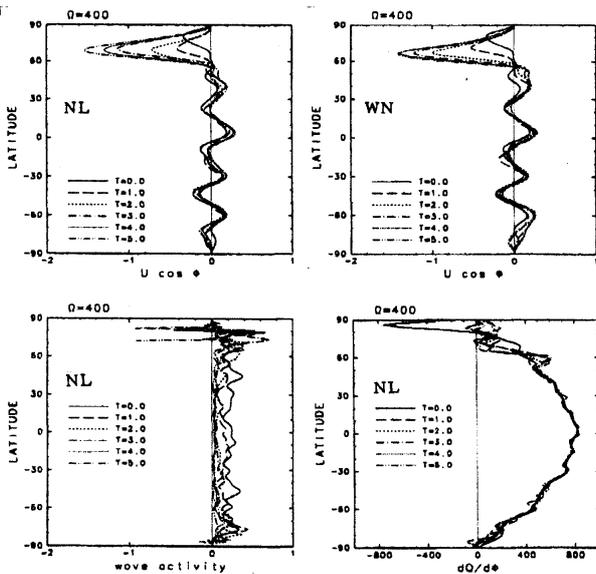


図 7 非線形実験 (左上) と弱非線形実験 (右上) の結果の比較。 $\Omega = 400$ (今回の実験ではおよそ $\Omega = 289$ に対応) について、同じ 1 つの初期値からの $t = 0.0$ から $t = 5.0$ までの時間発展を描いたもの。Hayashi et al.(2000) から引用。

展に伴う周極流の西向き加速について、弱非線形実験の

結果 (右上、WN) が、非線形実験の結果 (左上、NL) とよく一致していることがわかる。彼らはこの結果によって、ロスビー波がクリティカルレベルで吸収されることによる周極流形成のシナリオが裏付けられた、と結論している。

しかし、彼らの弱非線形実験が直ちに上のシナリオを裏付けているとは結論できない。その理由は以下の 2 点である。第一に、彼らの示した弱非線形実験の結果は、代表的なひとつのパラメータの、1 種類の初期値から得られたものでしかない点である。パラメータを広い範囲で振ったアンサンブル実験において同様の結果が得られるかどうかを検討されなければ、結果の妥当性は裏付けられない。第二に、この実験で用いられた初期のエネルギースペクトルのピークは線形の力学が卓越する領域にあり、乱流的とはいえない初期値を用いている点である。非線形実験では、アップワードカスケードによって中・低緯度には一定の南北スケールをもつ帯状構造が形成され、この緯度分布は初期値に依存する (4.2 節)。従って、もし図 7 の結果が初期の帯状流の構造に依存しているとすれば、この結果をそのまま非線形実験の結果に拡張することができるかどうかは明らかではない。

以上の点を踏まえ、本章では上記の第二の点、すなわち林メカニズムが非線形実験においても妥当であるかどうか検証することを出発点とする。

6.2 林メカニズムの前提条件

本節では、林メカニズムが成り立つための前提条件を吟味することにより、周極流が形成されるための必要条件を考える。

■線形領域 ロスビー波が伝播するには、線形の力学が成立する場でなければならない。渦度方程式において非線形項と線形項が同程度の大きさになるスケールの指標としては、先に導いたラインズ波数 (5) を用いることができる。いま場の代表的なスケール (の逆数) が平均全波数 $\langle n \rangle$ で表わされるとすると、ラインズ波数 n_R との大小によって次のような条件わけができる。

【 $\langle n \rangle > n_R$ の領域】… この領域は、非線形項が線形項に卓越する非線形領域となるため、ロスビー波が波動として伝播することはない。

【 $\langle n \rangle < n_R$ の領域】… この領域は、線形項が非線形項に卓越する線形領域となるため、ロスビー波は伝播可能。

この線形領域と非線形領域は、ラインズ波数の式を ϕ

*3 ただしこのとき、帯状流 \overline{u} の時間変化を、2 次の帯状流 $\overline{u^{(2)}}$ の時間変化で置き換えている。

について解いた遷移緯度 ϕ_t

$$\phi_t = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\langle n \rangle^2 \langle u \rangle}{2\Omega}\right) & \left(\frac{\langle n \rangle^2 \langle u \rangle}{2\Omega} \leq 1 \text{ のとき}\right), \\ 0 & \left(\frac{\langle n \rangle^2 \langle u \rangle}{2\Omega} > 1 \text{ のとき}\right) \end{cases} \quad (9)$$

によって分けることもできる。すなわち、平均全波数 $\langle n \rangle$ から求まる遷移緯度 ϕ_t と緯度 ϕ について

$[\phi > \phi_t \text{ の領域}] \cdots$ 非線形領域、ロスビー波伝播不能

$[\phi < \phi_t \text{ の領域}] \cdots$ 線形領域、ロスビー波伝播可能

となる。式 (9) の形から、この遷移緯度が十分高緯度になることが、林メカニズムにおいて周極流が形成されるための一つ目の必要条件である。

■**クリティカルレベル** クリティカルレベルは、帯状流の位相角速度 $\bar{\omega}_{\text{zonal}}(\phi)$ と、ロスビー波の位相角速度が一致する緯度である。本来は全波数 n ごとにロスビー波の位相角速度は異なるが、今回は、全波数として平均波数 $\langle n \rangle$ を用いたときのロスビー波の位相角速度;

$$\bar{\omega}_{\text{rossby}} = -\frac{2\Omega}{\langle n \rangle (\langle n \rangle + 1)} \quad (10)$$

で代表されるものとする。こうして、帯状流 $\bar{\omega}_{\text{zonal}}(\phi)$ と (10) が一致する緯度が存在することが、周極流が形成されるための二つ目の必要条件となる。

6.3 非線形実験における林メカニズムの妥当性

林メカニズムが非線形実験において妥当であるかどうかを、遷移緯度 ϕ_t 、ロスビー波の位相角速度 $\bar{\omega}_{\text{rossby}}$ 、および帯状流の角速度 $\bar{\omega}_{\text{zonal}}(\phi)$ の実際の時間発展を観察することにより確かめる。

$\Omega = 289$ の場合について、ある 1 つの初期値に対する帯状流の流速、ロスビー波の位相速度および遷移緯度の時間変化を図 8 に描いた。図 8 を見ると、 $t = 0.0$ から $t = 2.0$ 程度の間には極域でクリティカルレベルが形成されている様子がみられるが、クリティカルレベルにおける帯状流の時間発展に大きな変化はみられない。ところが、時間経過とともに線形領域が極側に広がりはじめ、 $t = 4.2$ のとき、北半球側で線形領域の内部 (遷移緯度よりも赤道側) にクリティカルレベルが形成されると、それ以後極域の流れが急速に西向き加速を受け、振幅を増してゆくことがわかる。

Ω が大きい場合 ($\Omega > 64$) のほとんどの初期値に対する時間発展において、周極流が形成される時刻で林メカニズムの必要条件が満たされていた。

以上の結果から、回転角速度 Ω が大きい場合につい

て、周極流が形成されるための必要条件が「線形領域の内部でクリティカルレベルが形成されること」であることが明らかになった。この必要条件は、林メカニズムに基づいて次のように解釈できる。まず、時間発展の初期の段階では、平均波数 $\langle n \rangle$ が大きいためロスビー波の位相角速度の絶対値は小さく、極域では容易にクリティカルレベルが形成されうる。しかし、線形領域が赤道付近に限定されるため、ロスビー波がクリティカルレベルが形成される極域まで到達できず、周極流形成メカニズムが働かない。ところが、アップワードカスケードによって場の平均波数 $\langle n \rangle$ が十分低波数側に移行すると、線形領域が高緯度側に広がり、ロスビー波が高緯度まで伝播できるようになる。そして、線形領域内にクリティカルレベルが形成されると、その緯度でロスビー波は吸着され、ロスビー波が輸送する西向きの運動量が極域に集積してゆく。これにより西向き周極流が形成されると考えられる。

7 周極流形成緯度・波数の理論的予測

7.1 線形領域、ロスビー波の位相角速度および帯状流

本節では周極流が形成される緯度および形成時の全波数について、その回転角速度依存性を予測する理論を構築する。予測のためには、次の 3 つの量を全波数 n の関数として表現する必要がある。

■**ロスビー波の位相角速度** 全波数 n に対するロスビー波の位相角速度は

$$\bar{\omega}_{\text{rossby}} = -\frac{2\Omega}{n(n+1)}. \quad (11)$$

■**遷移緯度** 擾乱の代表的なスケールが全波数が n で表せるときの線形領域と非線形領域の境界は、遷移緯度;

$$\phi_t = \arccos\left(\frac{n^2 \langle u \rangle}{2\Omega}\right). \quad (12)$$

ただし、 $\langle n \rangle$ を定めるための E_{total} としては、解像度の影響で周極流が形成される時刻付近でエネルギーが減衰していたことを考慮して 0.30 を用いた。このとき、 $\langle u \rangle = \sqrt{0.60} = 0.775$ である。

■**帯状流の角速度** 流線関数 ψ を用いて

$$\bar{\omega}_{\text{zonal}}(\phi) = -\frac{1}{\cos \phi} \frac{d\bar{\psi}}{d\phi}. \quad (13)$$

これらの式から、必要条件を満たす (n, ϕ) の組を求め、いま、(11),(12) はパラメータ Ω を決めれば全波数

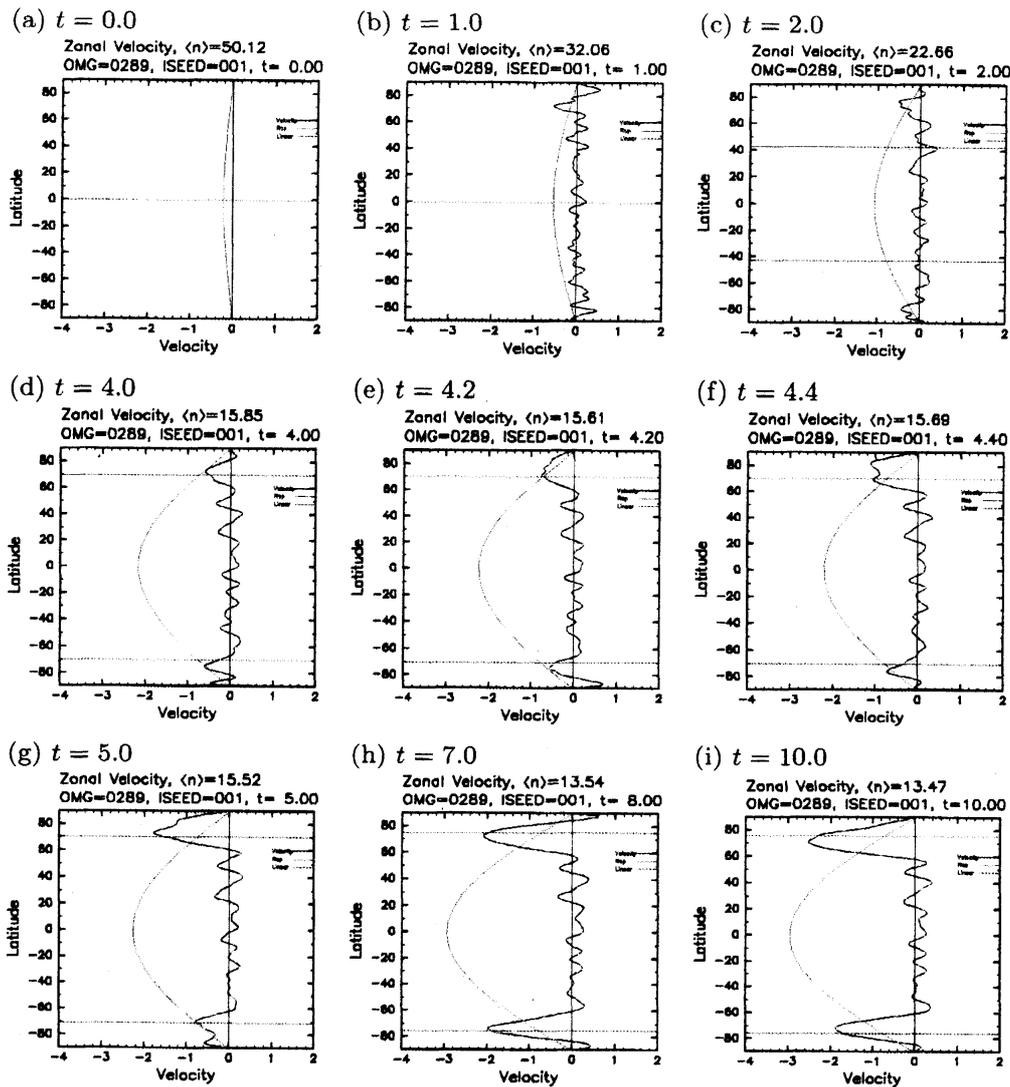


図8 $\Omega = 289$ の場合の1リアライゼーションの帯状流の流速(黒実線)、ロスビー波の位相速度(赤)および遷移緯度(青)を、(a) $t = 0.0$, (b) $t = 1.0$, (c) $t = 2.0$, (d) $t = 4.0$, (e) $t = 4.2$, (f) $t = 4.4$, (g) $t = 5.0$, (h) $t = 7.0$, (i) $t = 10.0$ の各時刻で描いたもの。各図の上にその時刻での平均波数 $\langle n \rangle$ を同時に描いている。

n だけで決まる。一方、帯状流(13)の緯度分布は時間変化するので、その大きさを全波数 n を用いて見積もる必要がある。まず、(13)は流線関数のスペクトル係数 ψ_n^m を用いて

$$\bar{\omega}_{\text{zonal}}(\phi) = -\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \sum_{n=2}^N \hat{\psi}_n^0 P_n^0(\phi) \quad (14)$$

と書ける。 $P_n^0(\phi)$ はルジャンドル多項式なので、全波数 n に対して解析的に与えられる。あとは、時間変化する流線関数スペクトル係数 $\{\hat{\psi}_n^0\}_{n=2, \dots, N}$ を見積もることができれば、帯状流が理論的に見積もれることになる。

7.2 帯状流の理論的見積もり

帯状流に関するスペクトル係数 $\{\hat{\psi}_n^0\}_{n=2, \dots, N}$ を見積もるため、エネルギーとスペクトル係数の関係;

$$E_{\text{total}} = \sum_{n=2}^N E(n) = \sum_{n=2}^N \frac{1}{2} n(n+1) \sum_{m=-n}^n |\hat{\psi}_n^m|^2 \quad (15)$$

を用いる。すべての (n, m) について2次元エネルギー・スペクトル分布を解析的に求めることは不可能であるので、今回構築する理論では以下の2つの仮定を置く。

1つ目の仮定として、全波数 n についての1次元エネルギー分布 $E(n)$ を単純化し、ある波数 n_1 にすべての

エネルギーが集中したとする;

$$E(n) = \begin{cases} E_{\text{total}} & (n = n_1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases} \quad (16)$$

このとき式 (15) は

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} n_1 (n_1 + 1) \sum_{m=-n_1}^{n_1} |\hat{\psi}_{n_1}^m|^2 \quad (17)$$

と書かれ、 E_{total} は帯状波数 m についての $2n_1 + 1$ 個のスペクトル係数の 2 乗和で書けている。あとは、 $\hat{\psi}_{n_1}^0$ に配分されるエネルギーの割合が分かればよい。

2 つめの仮定として、 $\{\psi_{n_1}^m\}_{m=-n_1, -n_1+1, \dots, n_1}$ の $2n + 1$ 個の成分は対等であると考え、

各 m 成分には、(16) を満たすようにランダムにエネルギーが割り振られる

と仮定する。このとき、帯状流成分 $\hat{\psi}_{n_1}^0$ がとる値の確率分布は解析的に計算することができる。結果は、全波数 n に対して

$$p_n(x_0) = \begin{cases} \frac{(2n-1)!!}{\pi(2n-2)!!} (1-x_0^2)^{\frac{2n-2}{2}}, & n: \text{偶数} \\ \frac{(2n-1)!!}{2(2n-2)!!} (1-x_0^2)^{\frac{2n-2}{2}}, & n: \text{奇数}. \end{cases} \quad (18)$$

ただし、 x_0 は、スペクトル係数が取りうる最大値 $(\hat{\psi}_{n_1}^0)_{\text{max}} = \sqrt{2E_{\text{total}}/(n_1(n_1+1))}$ に対する比であり、 $-1 \leq x_0 \leq 1$ である。

確率分布 (18) は、 n が大きいとき標準偏差 $1/\sqrt{2n+1}$ の正規分布に漸近する。議論を簡単にするため、以下では帯状流成分 $\hat{\psi}_{n_1}^0$ に分配されるエネルギーの割合を、正規分布における標準偏差 σ を用いて表す。たとえば、「 1σ の帯状流」とは、確率分布 (18) の両側確率が 68.26% となる点に対応する割合のエネルギーが帯状流成分 $\hat{\psi}_{n_1}^0$ に分配されたときの帯状流を指すことにする*4。 σ と両側確率の対応を表 1 に示す。

このような約束の下で、例えば 2σ の帯状流成分のスペクトル係数は

$$\hat{\psi}_{n_1, 2\sigma}^0 = \sqrt{\frac{2E_{\text{total}}}{n_1(n_1+1)}} \times 2\sigma \quad (19)$$

*4 厳密には確率分布 (18) は正規分布ではないので、両側確率 68.26% の点に対応する x_0 は標準偏差の値とは異なる。しかし、実際には正規分布の近似は n が小さいところでもよく成り立っている。たとえば、 $n = 5$ の場合の (18) の両側確率 68.26% の点は 0.316 であるが、正規分布だとすると $1/\sqrt{2 \cdot 5 + 1} = 0.301\dots$ で、誤差は 5% 程度と小さいので、確率分布 (18) の標準偏差も σ で表すことにしても差し支えない。

表 1 σ と両側確率の対応

x	両側確率 (%)
1σ	68.26
2σ	95.44
3σ	99.74

と書けるから、 2σ の帯状流角速度は

$$\bar{\omega}_{\text{zonal}}(\phi)_{, 2\sigma} = -\frac{2\sigma}{\cos \phi} \sqrt{\frac{2E_{\text{total}}}{n_1(n_1+1)}} \frac{\partial P_{n_1}^0}{\partial \phi} \quad (20)$$

のように書ける。 σ は確率分布 (18) から解析的に求めることができるので、任意の両側確率に対して帯状流 $\omega_{\text{zonal}}(\phi)$ を解析的に見積もることができたことになる。

残された問題は、帯状流に割り振られるエネルギーの割合として σ の何倍の帯状流を採用するかである。確率分布 (18) の期待値はほぼ σ に等しいが、実際の非線形の時空間発展ではアップワードカスケードの過程で $|m|$ が小さい成分にエネルギーが偏ることや、帯状流が時間的に変動することなどを考慮すると、帯状流の振幅は標準偏差 σ よりも大きくなりやすいと考えるのが妥当である。そこで、今回の理論ではその振幅を大雑把に標準偏差の 2 倍程度 (確率分布でおおよそ両側確率 95% 点) であると見積もり、 2σ の帯状流を採用することにする。

7.3 理論から予測される周極流形成緯度と形成時の全波数

周極流が形成される緯度および形成時の全波数を理論的に予測することを考える。いまパラメータ Ω を決め、実際のアップワードカスケードで見られるように、全波数 n を初期波数 50 から低波数側にスイープさせる。 $\Omega = 289$ の場合について、 n に対するロスビー波位相角速度、遷移緯度、 2σ の帯状流の関係を図 9 に描いた。ただしクリティカルレベルを求める際には、帯状流の包絡線とロスビー波の位相角速度の交点を求めることにする。

図 9 で、周極流形成緯度と形成時の全波数を予測する手続きは以下である。 $n = 50$ (初期) および $n = 20$ の場合 (a, b)、クリティカルレベルは存在するが、線形領域が存在しない (a) またはクリティカルレベルよりも低緯度 (b) であるため、林メカニズムの必要条件を満たさない。 $n = 13$ になると、クリティカルレベルが線形領域の内部に形成され、林メカニズムの必要条件が満たされるので、このときの緯度と波数を予測値とする。実際に

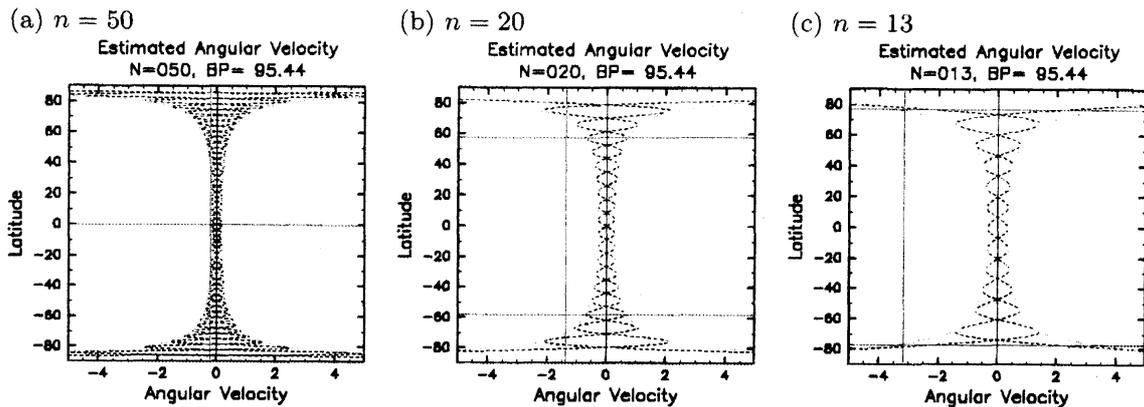


図9 理論的に見積もった帯状流(破線)、帯状流の包絡線(紫)、遷移緯度(青)、ロスビー波の位相角速度(赤)。 $\Omega = 289$ の場合で、全波数 n を (a) $n = 50$, (b) $n = 20$, (c) $n = 13$ と変化させたときの関係を描いたもの。

は n は整数でなければ計算できないが、最も近い整数値に対する値を内挿することによって有効数字3桁まで計算したものを予測値とした。全ての Ω に対する予測値を表2に示す。

7.4 実験結果と理論的予測の比較

図10, 11に、前節で予測した周極流形成緯度 ϕ_s と周極流形成時の波数 n_s を5.2節で示した解析結果に重ねたものを示す。

周極流形成緯度 ϕ_s について見ると、 Ω が大きい場合 ($\Omega \geq 64$)、予測値は実験結果のエラーバーの範囲に含まれており、実験結果を非常によく予測できている。 Ω が小さい範囲 ($\Omega \leq 36$) でのずれは、 Ω が小さい場合はそもそも周極流が明確に形成されておらず、周極流形成メカニズムに基づいた今回の予測とは必ずしも一致しないためであると考えられる。

周極流形成時の全波数 n_s については、 $\Omega > 100$ の範囲では実験結果よりもやや小さく、 $\Omega < 100$ の範囲では実験結果よりもやや大きく予測しているが、おおむね実験結果を説明できていると考えられる。

n_s について、実験結果と予測値の傾きが違う理由を考えると、 Ω が小さい領域については(1)周極流自体が明確に形成されないため、実験結果で解析の対象となるメンバーの数が少なく、解析結果の信頼性が低いこと、および(2) Ω が大きい場合と異なり、帯状流に対して擾乱のエネルギーが大きいために周極流の振幅が変化を受けやすく、周極流が形成されたと判定される時刻が遅くなり、平均波数が低波数側に寄ることなどの理由が考えられる。 Ω が大きい領域では、(1)見積もりに用いた 2σ の帯状流が適切でなかった可能性、および(2)初期のエ

ネルギー分布のピークを与えた全波数 (=50) が赤道でのラインズ波数に近く、十分なアップワードカスケードが起こっていない可能性が考えられる。

今回構築した理論による予測値と実験結果のずれを詳しく検証するには、高解像度での数値実験やより多数の初期値を用いたアンサンブル実験、および理論の構築に用いた仮定の再考などが必要であると思われる。

8 減衰性2次元乱流の最終状態における帯状流の緯度分布の予測

今回構築した理論から予測した周極流形成緯度 ϕ_s および形成時の全波数 n_s を用いて、減衰性2次元乱流の最終状態における帯状流の緯度分布を予測することを試みる。

帯状流の最終状態の緯度分布は2つの過程で形成されると考えられる。まず、エネルギーのアップワードカスケードにより場の平均波数 $\langle n \rangle$ は低波数側に移行し、赤道でのラインズ波数程度に達すると、それ以上低波数側へはほとんど移行しなくなる。ここから林メカニズムが働き始める。赤道側から高緯度側に向かって線形領域が広がり、ロスビー波が高緯度まで伝播し始めるようになる。そして、極域でクリティカルレベルが形成されると、その緯度でロスビー波が吸着され、極域に西向きの運動量が集積して帯状流は西向きに加速される。一方、中・低緯度の帯状流は、 $m \neq 0$ 成分であるロスビー波がクリティカルレベルで吸着される結果、周極流形成が始まる時刻の全波数で決まる南北スケールをもつ緯度分布が残されることになると考えられる。

このようなシナリオに基づき、最終状態のプロファイ

表2 理論的に予測した周極流形成緯度 ϕ_s と形成時の全波数 n_s

Ω	9	16	25	36	64	100	144	289	400	625	900	1024	1225
n_s	35.1	47.7	54.5	59.1	65.2	69.1	71.6	75.7	77.2	79.0	80.4	80.9	81.3
ϕ_s	4.24	5.22	6.11	6.90	8.31	9.59	10.8	13.6	15.1	17.6	19.6	20.5	21.8

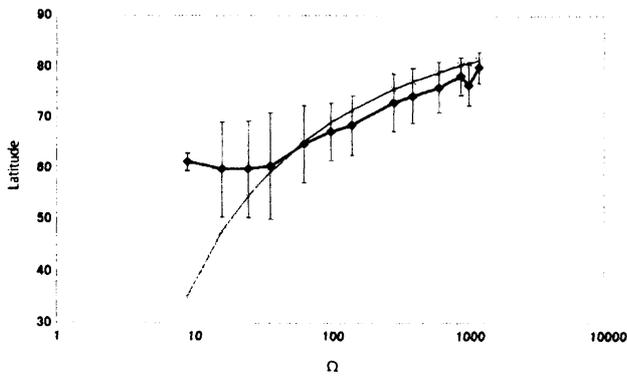


図10 周極流形成緯度の実験結果のアンサンブル平均値 (青) と予測値 (赤)。実験値のエラーバーは、周極流が形成された初期値についての標準偏差の範囲を示す。

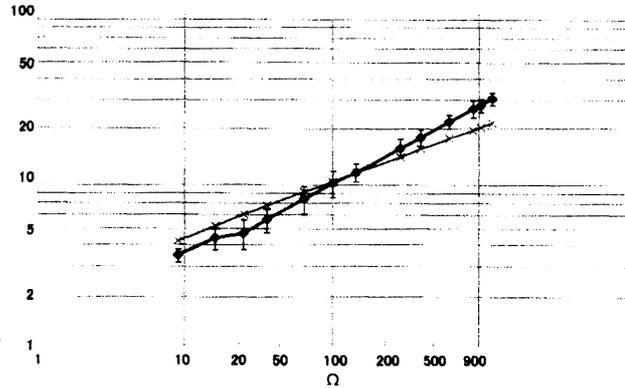


図11 周極流形成時の全波数の実験結果のアンサンブル平均値 (青線) と予測値 (赤)。実験値のエラーバーは、周極流が形成された初期値についての標準偏差の範囲を示す。

ルを予測する理論を次のように構築した。中・低緯度の緯度分布は、前節で構築した理論から予測した全波数 n_s に対する 2σ の帯状流

$$\bar{u}_{\text{midlow}}(\phi) = -2\sigma \sqrt{\frac{2E}{n_s(n_s+1)}} \frac{\partial P_{n_s}^0(\phi)}{\partial \phi} \quad (21)$$

で決まるとする。西向き周極流は、理論から予測した緯度 ϕ_s を中心とし、その両側の幅が $\pi/2 - \phi_s$ となるような2次関数形のジェットを仮定する。

$$\bar{u}_{\text{high}}(\theta) = U_0 \frac{\theta}{\theta_s} \left(\frac{\theta}{\theta_s} - 2 \right). \quad (22)$$

ここで、 $\theta = \pi/2 - \phi$ は余緯度であり、ジェットが西向きに最大の速度になる位置を $\theta_s = \pi/2 - \phi_s$ で表す。 U_0 はジェットの西向きの最大値である。

U_0 は、総エネルギー E_{total} から、中低緯度の帯状流 (21) が持つエネルギー E_{midlow} を差し引いた分がすべて西向き周極流のエネルギー E_{high} になるという条件を満たすように決める。すなわち、

$$E_{\text{midlow}} = \int_{\pi-\theta_s}^{\theta_s} \frac{1}{2} (\bar{u}_{\text{midlow}}(\theta))^2 \sin \theta d\theta, \quad (23)$$

$$E_{\text{high}} = 2 \times \int_0^{\theta_s} \frac{1}{2} (\bar{u}_{\text{high}}(\theta))^2 \sin \theta d\theta, \quad (24)$$

$$E_{\text{total}} = E_{\text{midlow}} + E_{\text{high}}. \quad (25)$$

E_{high} の式の係数 2 は、周極流が両極にできることを反映したものである。実験結果との整合性を考え、 E_{total} としては、実験結果で最終時刻でのエネルギーの値に近い 0.30 を用いた。

こうして見積もった最終状態の帯状流の緯度分布と、実際のリアライゼーションの最終時刻 ($t = 50.0$) の結果を図12に示す。図12から、どの Ω についても、周極流のピークの緯度、周極流の幅、周極流の振幅、そして(初期値によって異なる山谷の位置を考慮すれば) 中・低緯度の緯度分布の南北スケールや振幅など、実験結果の緯度分布の特徴よく予測できていることがわかる。

さらに、50種類のアンサンブル平均とその標準偏差を描いたものを図13に示す。予測した周極流の緯度と振幅が実験結果のアンサンブル平均値とよく合致していることがわかる。この結果は、今回構築した理論によって、減衰性2次元乱流実験における西向き周極流形成がよく説明できることを裏付ける結果である。

9 結論

本研究では、回転球面上の減衰性2次元乱流から出現する西向き周極流の形成機構に着目し、回転角速度 Ω を広いパラメータ範囲で変化させた数値実験を行って西向

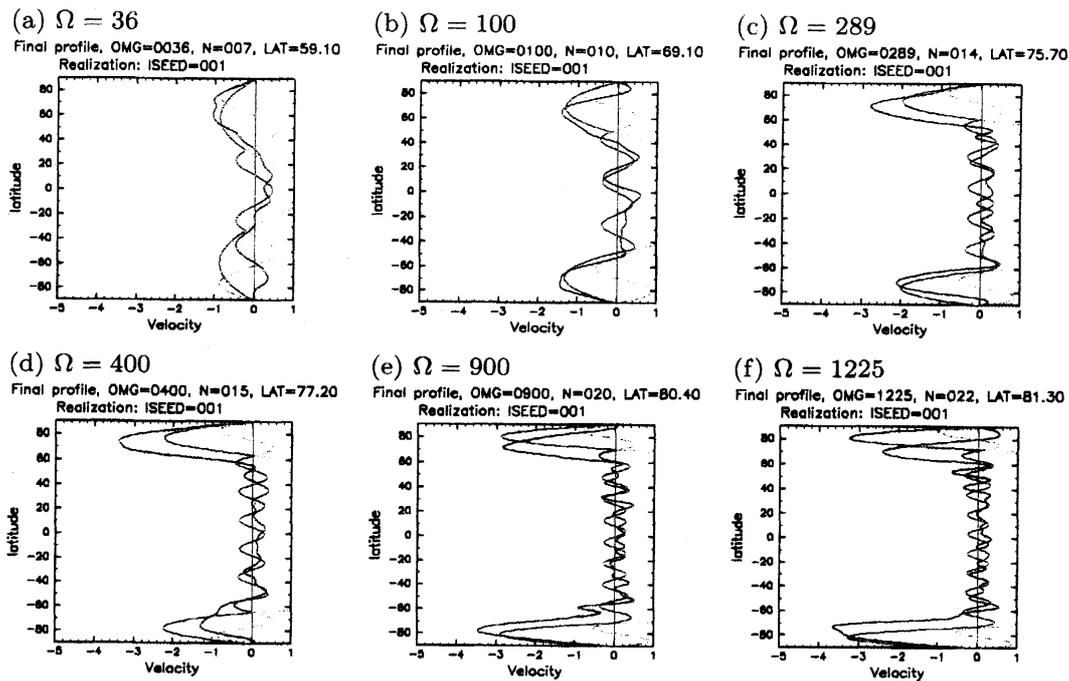


図 12 最終状態での帯状流の緯度分布の予測 (赤) と $t = 50.0$ での 1 メンバーのリアライゼーション (青) を、6 種類のパラメータ (a) $\Omega = 36$, (b) $\Omega = 100$, (c) $\Omega = 289$, (d) $\Omega = 400$, (e) $\Omega = 900$, (f) $\Omega = 1225$ について描いたもの。赤点線は (21), (22) で、予測に採用した部分だけを実線で描いてある。

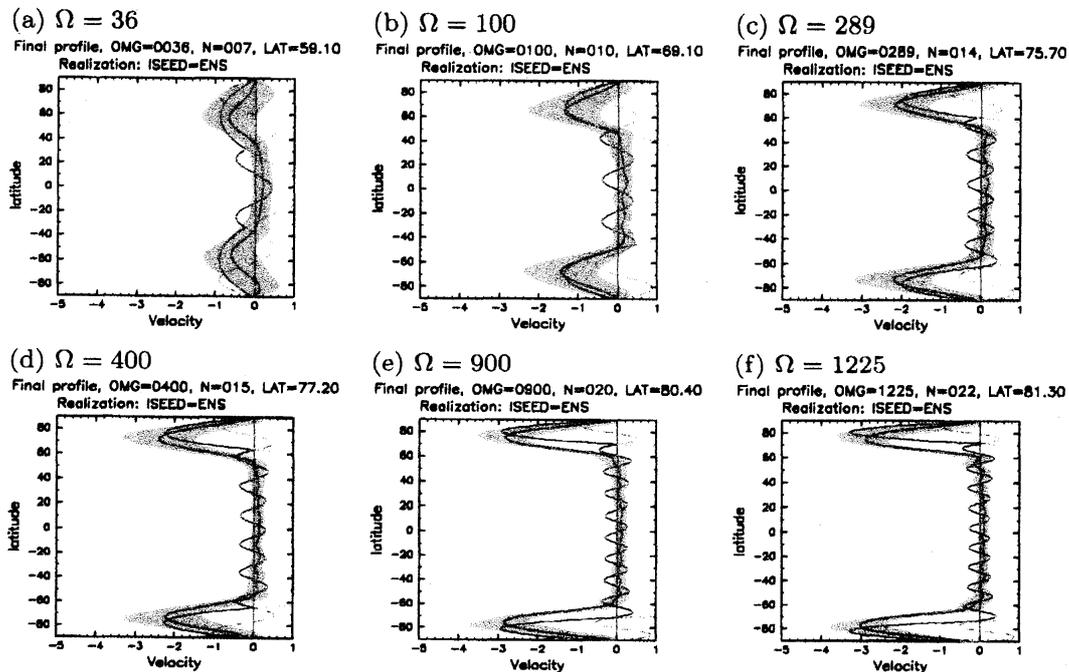


図 13 最終状態での帯状流の緯度分布の予測 (赤) と $t = 50.0$ でのリアライゼーションのアンサンブル平均値 (青) を、6 種類のパラメータ (a) $\Omega = 36$, (b) $\Omega = 100$, (c) $\Omega = 289$, (d) $\Omega = 400$, (e) $\Omega = 900$, (f) $\Omega = 1225$ について描いたもの。水色の領域は、リアライゼーションの標準偏差の範囲。赤点線は (21), (22) で、予測に採用した部分だけを実線で描いてある。

き周極流形成の回転角速度依存性を調べた。そして、その結果に基づいて、西向き周極流の形成の回転角速度依存性を予測する理論を構築した。これらの実験および構築した理論から得られた知見は以下の通りである。

第一に、Yoden and Yamada (1993) で初めて報告されて以来、石岡ら (1999) などこれまでの高解像度アンサンブル実験でも確認されてきた西向き周極流が、Hayashi et al.(2000) が提案した周極流形成メカニズム (林メカニズム) によって形成されていることを、50 メンバーのアンサンブル実験によって確認した。すなわち、帯状流、ロスビー波の位相角速度および遷移緯度の時間発展を比較することにより、周極流が形成されるための必要条件が、線形領域の内部でクリティカルレベルが形成されることであることを見出した。

第二に、林メカニズムの前提条件を吟味することによって、西向き周極流が形成される緯度と形成時の全波数を予測する理論を構築した。この理論から得られた周極流形成緯度および周極流形成時の全波数の予測値は、実験結果のパラメータ依存性をよく説明している。

第三に、理論から予測した周極流形成緯度および形成時の全波数を使って、減衰性 2 次元乱流の最終状態における帯状流の緯度分布を見積もった。この見積もりは、実際のリアライゼーションの周極流が形成される緯度・幅・強さおよび中・低緯度の帯状流の緯度分布の特徴をよく説明できている。

本研究の結果は、西向き周極流の形成メカニズムに裏付けを与えるものであり、回転球面上の減衰性 2 次元乱流に関する理解を深めるものであると考える。

謝辞

図表の作成には、地球流体電脳倶楽部の DCL ライブラリ (DCL-5.3.2) を使用しました。開発と整備に携わる方々に心から感謝いたします。

参考文献

- [1] G.P. Williams. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 35, pp. 1399–1426, 1978.
- [2] S. Yoden and M. Yamada. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 50, pp. 631–644, 1993.
- [3] 石岡圭一, 山田道夫, 林祥介, 余田成男. ながれマルチメディア 99, 1999. http://www.nagare.or.jp/mm/99/ishioka/index_ja.htm.
- [4] Y.-Y. Hayashi, K. Ishioka, M. Yamada, and S. Yoden. *IUTAM Symposium on Developments in Geophysical Turbulence*, Vol. 58, pp. 179–192, 2000.
- [5] S. Takehiro, M. Yamada, and Y.-Y. Hayashi. *J. Atmos. Sci.*, Vol. 64, pp. 4084–4097, 2007.
- [6] 石岡圭一. スペクトル法による数値計算入門. 東京大学出版会, 2004.
- [7] 石岡圭一. ispack-0.71. 2005. <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>.
- [8] J. Y.-K. Cho and L. M. Polvani. *Phys. Fluids*, Vol. 8, pp. 1531–1552, 1996.
- [9] P. B. Rhines. *J. Fluid Mech.*, Vol. 69, pp. 417–443, 1975.