Title	Broadened Refined Similarity Hypothesis : 相似変数vのスケール依存とconditional構造関数 (乱流研究の展望 : ブレークスルーを求めて)
Author(s)	細川, 巌
Citation	数理解析研究所講究録 (2008), 1601: 7-10
Issue Date	2008-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/139847
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1601 巻 2008 年 7-10

Broadened Refined Similarity Hypothesis
- 相似変数vのスケール依存とconditional 構造関数

電気通信大学名誉教授　細川　巌 (Iwao Hosokawa)

Kolmogorov (1962) のRefined Similarity Hypothesis は，等方性乱流のrの慣性領域において，相似変数

$$v = \Delta u_r \,/\, \left(r\varepsilon_r\right)^{1/3} \tag{1}$$

（ここにΔu_rは縦方向速度差，ε_rはスケールrの平均局所散逸率。）の統計がレイノルズ数に依らず，普遍的であることを仮説するものであるが，これが局所的に縦方向速度和 $u_+ = \left(u_1 + u_2\right)/2$にも依存するものであることが明らかとなった。詳細はHosokawa (2007) を見られたい。この事実のDNSによる確認がS. Chen (2007) によってなされたことは，昨年１１月の九州大応力研での研究集会で発表した。（応力研講究録参照。）

一方，最近，Kholmyansky & Tsinober (2008)が

$$\left\langle u_+{}^2 u_- \right\rangle = \langle \varepsilon \rangle r \,/\, 30 \tag{2}$$

（$2u_- = \Delta u_r$。）の関係を，$R_\lambda \approx 1600, 3400, 5900, 10700$ で実験的に確認したというpreprintを受け取った。これはPhys. Fluidsに近々公表されるようである。

そこで，永年の間乱流研究の道標となったRefined Similarity Hypothesisが，そう簡単に失効することは，多くのマルチフラクタルの研究者にとって不本意のことと考え，Broadened Refined Similarity Hypothesis (BRSH) を提唱した(Hosokawa, 2007)。それは，

”相似変数vの統計は$u_+\left(r\right)$に依存し，普遍的ではないけれども，

Δu_rの（n次）構造関数は，すべて$u_+\left(r\right)$についてensemble average したもので理論構成をすれば，これまでのRefined Similarity Hypothesis の骨組みは使用可能。

ただし，ε_r が統計的に $u_+\left(r\right)$に依存しないという仮定が必要。”

というものである。最後の仮定は，ε_rについての多くのマルチフラクタル理論を独立に使える余地を残したものであるが，もしこれが成り立たなければ,マルチフラクタル構造の中に$u_+\left(r\right)$がパラメータとして混入することになり，間歇性の簡単な解析はまず無理であろう。

（敢えてこの仮定に理屈を付けるとすれば，式(2)の示すように$u_+\left(r\right)$は慣性領域の速度差とdecorrelationできないが，粘性領域のそれとはdecorrelationできてもよいとし，ε_rはそ

の粘性領域での散逸過程から発生する物理量の局所平均であるとするなら，これは$u_+(r)$とdecorrelationできても，おかしくはない。しかし，いずれ検証を要する。）

さて，v の統計が$u_+(r)$に依存するのであれば，v^nのconditional ensemble averageがいかに弱くてもrに依存する可能性を否定できない。しかしv^nの unconditional ensemble averageを使用するBRSHの下では，間欠指数$\mu(q)$とΔu_rのスケーリング指数$\zeta(p)$の関係：

$$\zeta(p) = p / 3 - \mu(p / 3) \tag{3}$$

は無傷で保たれるだろう。他の論拠から式(3)の補正を議論することができるが(Hosokawa, 2000)，それはここで発生するものとは別である。

次に，v^nのensemble averageが$u_+(r)$によって条件付けられる仕方を見よう。まずvと$u_+(r)$のjoint確率$p(v,u_+)$を想定し，両変数はそれぞれのrmsでnormalizeしてあるものとし，その特性関数を$\varphi(x,y;r)$とすると

$$\varphi(x,y;r) = \exp\begin{bmatrix} -x^2/2 - ix^3S/3! + x^4(K-3)/4! + \ldots - x^6c/6! + \ldots \\ -ixy^2\langle u_+{}^2 v\rangle/2 + xy^3\langle u_+{}^3 v\rangle/3! + x^2y^2\left(\langle u_+{}^2 v^2\rangle - 1\right)/4 \\ +x^3y\langle u_+ v^3\rangle/3! + ixy^4\left(\langle u_+{}^4 v\rangle - 6\langle u_+{}^2 v\rangle\right)/4! + \ldots \\ -y^2/2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

と表せる。$u_+(r)$の無条件確率は経験的にGauss分布を仮定した。

ここにS, Kはv のskewness, kurtosisであり，これ自体弱いスケーリングを持っている(Hosokawa, 2000)。どのようにしてvと$u_+(r)$のcross hyper-cumulants が，このようにいろいろなcross momentsによって表せるかは，特性関数のTaylor展開の各係数がその次数のcross momentsになっていなければならないことを使って確認できる。cross momentsはrに依存していると考えられる。$\langle u_+{}^2 v\rangle$は，式(1)と(2)より解析的表現を与えることができるが，他のものは精度の良いDNSか実験で，次のようなv^nのconditional momentsのデータ処理によって計算するしかない。

$n=1$の場合を計算しよう。

$$\langle v;y\rangle = \partial / \mathrm{i}\partial x \varphi(x,y;r)|_{x=0}$$

$$= \left[-y^2\langle u_+{}^2 v\rangle/2 - \mathrm{i}y^3\langle u_+{}^3 v\rangle/3! + y^4\left(\langle u_+{}^4 v\rangle - 6\langle u_+{}^2 v\rangle\right)/4!\right]\exp\left[-y^2/2\right] \tag{5}$$

これの逆フーリエ変換が，或る$u_+(r)$を与えた時のvの条件付き平均値$\langle v;u_+(r)\rangle$に$u_+(r)$の無条件確率をかけたものになる。すなわち，

$$\int\langle v;y\rangle\exp[-\mathrm{i}yu_+]dy/(2\pi) = \int vp(v,u_+;r)dv$$

$$= \left[\langle u_+{}^2 v\rangle/2\cdot\partial^2/\partial u_+{}^2 - \langle u_+{}^3 v\rangle/3!\cdot\partial^3/\partial u_+{}^3 + \left(\langle u_+{}^4 v\rangle - 6\langle u_+{}^2 v\rangle\right)/4!\cdot\partial^4/\partial u_+{}^4\right]$$

$$\times\exp\left[-u_+{}^2/2\right]/\sqrt{2\pi} \tag{6}$$

$$= \left[\langle u_+{}^2 v\rangle/2\cdot \mathrm{H}_2(u_+) + \langle u_+{}^3 v\rangle/3!\cdot\mathrm{H}_3(u_+) + \left(\langle u_+{}^4 v\rangle - 6\langle u_+{}^2 v\rangle\right)/4!\cdot\mathrm{H}_4(u_+)\right]$$

$$\times\exp\left[-u_+{}^2/2\right]/\sqrt{2\pi}$$

$\langle v;u_+(r)\rangle$のHermite展開係数が，高次のcross　moments に関連する事情がこれで分かる。これを$u_+(r)$で積分すれば，当然$\langle v\rangle = 0$になる。

同様に$n = 2$の場合は，

$$\langle v^2;y\rangle = \partial^2/\mathrm{i}^2\partial x^2\varphi(x,y;r)|_{x=0}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - y^2\left(\langle u_+{}^2 v^2\rangle - 1\right)/2 - \mathrm{i}y^3\langle u_+{}^3 v^2\rangle/3! \\ + y^4\left(\langle u_+{}^4 v^2\rangle - 6\langle u_+{}^2 v^2\rangle + 3\right)/4! + O(y^5)\end{bmatrix}\exp\left[-y^2/2\right] \tag{7}$$

$$\int\langle v^2;y\rangle\exp[-\mathrm{i}yu_+]dy/(2\pi) = \int v^2 p(v,u_+;r)dv$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \left(\langle u_+{}^2 v^2\rangle - 1\right)/2\cdot\mathrm{H}_2(u_+) + \langle u_+{}^3 v\rangle^2/3!\cdot\mathrm{H}_3(u_+) \\ + \left(\langle u_+{}^4 v^2\rangle - 6\langle u_+{}^2 v^2\rangle + 3\right)/4!\cdot\mathrm{H}_4(u_+) + \ldots\end{bmatrix}\exp\left[-u_+{}^2/2\right]/\sqrt{2\pi} \tag{8}$$

同様に$n = 3$の場合の最終式は，

$$\int\langle v^3;y\rangle\exp[-\mathrm{i}yu_+]dy/(2\pi) = \int v^3 p(v,u_+;r)dv$$

$$
=\begin{pmatrix} S+\left\langle u_+v^3\right\rangle \mathrm{H}_1(u_+)+\left(\left\langle u_+{}^2v^3\right\rangle -S\right)/2\cdot \mathrm{H}_2(u_+)+\left(\left\langle u_+{}^3v^3\right\rangle -3\left\langle u_+{}^3v\right\rangle\right)/3!\cdot \mathrm{H}_3(u_+) \\ +\left(\left\langle u_+{}^4v^3\right\rangle -6\left\langle u_+{}^2v^3\right\rangle -15\left\langle u_+{}^2v\right\rangle +3S\right)/4!\cdot \mathrm{H}_4(u_+)+\ldots\ldots \end{pmatrix} \tag{9}
$$
$$
\times\exp\left[-\frac{u_+{}^2}{2}\right]/\sqrt{2\pi}
$$

同様に$n=4$の場合の最終式は,

$$
\int\left\langle v^4;y\right\rangle \exp[-\mathrm{i}yu_+]dy/(2\pi)=\int v^4p(v,u_+;r)dv
$$
$$
=\begin{pmatrix} K+\left\langle u_+v^4\right\rangle \mathrm{H}_1(u_+)+\left(\left\langle u_+{}^2v^2\right\rangle -4K\right)/2\cdot \mathrm{H}_2(u_+) \\ +\left(\left\langle u_+{}^3v^4\right\rangle -9\left\langle u_+{}^2v\right\rangle -3\left\langle u_+v^4\right\rangle\right)/3!\cdot \mathrm{H}_3(u_+) \\ +\left(\left\langle u_+{}^4v^4\right\rangle -6\left\langle u_+{}^2v^4\right\rangle -36\left\langle u_+{}^2v^2\right\rangle +21K+42\right)/4!\cdot \mathrm{H}_4(u_+)+\ldots\ldots \end{pmatrix} \tag{10}
$$
$$
\times\exp\left[-u_+{}^2/2\right]/\sqrt{2\pi}
$$
となる。

$\left\langle v^2;u_+(r)\right\rangle$と$\left\langle v^3;u_+(r)\right\rangle$は，S.ChenのDNSで得られたものが前掲の応力研講究録に示してある。前者はKolmogorov常数，後者は-4/5のconditional valueであり，いずれも$u_+(r)$に依存して変動しているのが分かる。

式(6)-(10)から分かるように，ここに登場するすべての高次相関量はDNSなどによる精密なデータの高次モーメントのHermite展開係数を求めることにより，順次計算することができる。ただし，解析表現をもった$\left\langle u_+{}^2v\right\rangle$は既知としなければならない。

参考文献

Chen, S. (2007). Private communication.
Hosokawa, I. (2000). J. Phys. Soc. Jpn. **69**, 695.
Hosokawa, I. (2007). Prog. Theor. Phys. **118**, 169.
Kholmyansky & Tsinober (2008). Preprint, submitted to Phys. Fluids.
Kolmogorov, A. N. (1962). J. Fluid Mech. **13**, 82.