

# On generic Kripke Structures

池田宏一郎\* (法政大学経営学部)  
岡本圭史 (産業技術総合研究所)

## Abstract

Halpern-Kapron は命題様相論理において 0-1 則が成り立つことを証明した. ここで, 関係確率および付値確率はともに定数関数である. 本論文では, 関係確率あるいは付値確率が必ずしも定数関数でない場合の 0-1 則について述べる.

## 1 背景

$L = \{R(*, *)\}$  を命題様相論理の言語とし, 命題変数の集合を  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_j\}$  とする. いま,  $S$  を集合,  $V : \mathcal{P} \rightarrow 2^S$  とするとき,  $(S, R, V)$  を言語  $L$  におけるクリプケ構造という. クリプケ構造  $A = (S, R, V)$  に対して,

- $r(A) = |\{(a, b) \in S \times S : R(a, b)\}|$
- $v_i(A) = |\{a \in S : a \in V(p_i)\}| \quad (i = 1, 2, \dots, j)$

とそれぞれ書くことにする. 各  $i = 0, 1, \dots, j$  に対して, 関数  $p_i : \omega \rightarrow [0, 1]$  を固定する. 有限集合  $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$  上のクリプケ構造  $A$  に対して,  $A$  の確率を

$$P^{\bar{p}}(A) = p_0(n)^{r(A)}(1 - p_0(n))^{n^2 - r(A)} \prod_{1 \leq i \leq j} p_i(n)^{v_i(A)}(1 - p_i(n))^{n - v_i(A)},$$

で定義する (ここで  $\bar{p} = p_0 p_1 \dots p_j$ ).  $p_0$  を関係確率,  $p_1, \dots, p_j$  を付値確率と呼ぶ. 各  $n \in \omega$  に対して, 様相論理式  $\phi$  の確率を

$$P_n^{\bar{p}}(\phi) = \sum \{P^{\bar{p}}(A) : A = (S_n, R, V) \models \phi\}.$$

で定義する. このとき, 各様相論理式  $\phi$  に対して

---

\*Research partially supported by Grants-in-Aid for Scientific Research (no.19540150), Ministry of Education, Science and Culture.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{\bar{p}}(\phi) = 0 \text{ または } 1$$

を満たすことを 0-1 則 (zero-one law) という. 0-1 則が成り立つかどうかは, 関係確率と付値確率, つまり  $\bar{p}$  の与え方に依存する. 様相論理の 0-1 則に関しては, 次の事実がよく知られている. また, その証明にはランダムグラフが使われている.

**事実 (Halpern-Kapron, [3])** 関係確率と付値確率がともに定数関数のとき, 0-1 則が成り立つ.

しかし, 関係確率や付値確率が定数関数でないときの 0-1 則についての結果は (著者達の知る限り) 存在しない. そこで, ランダムグラフの一般化であるジェネリックグラフを用いて 0-1 則を解析することを試み, 以下の結果を得ることができた.

**定理 1** 関係確率が  $p_0(n) = n^{-\alpha}$  ( $\alpha$  は 0 以上 1 以下の無理数), 付値確率が定数関数のとき, 0-1 則が成り立つ.

**定理 2** 関係確率が  $p_0(n) = n^{-\alpha_0}$ , 付値確率が  $p_i(n) = n^{-\alpha_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ ) とし,  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_j \in (0, 1)$  は有理数上独立であるとする. このとき 0-1 則が成り立つ.

定理 1 と定理 2 の証明は類似している. 以下では, 定理 1 の証明の概略を述べる.

## 2 定理 1

**仮定**  $\alpha$  を 0 以上 1 以下の無理数とする. 関係確率を  $p_0(n) = n^{-\alpha} (= p)$  とし, 付値確率を定数関数とする.

いま, 有限クリプケ構造  $A$  に対して

- $\delta_\alpha(A) = |A| - \alpha r(A)$
- $K_\alpha = \{A : \forall B \subset A, \delta_\alpha(B) \geq 0\}$

と定義する.  $\delta_\alpha(*)$  の  $\alpha$  は以後省略する. また,  $\delta(B/A) = \delta(B \cup A) - \delta(A)$  と書く. ここで, 2つのクリプケ構造  $A \subset B$  ( $A$  は有限) に対して

- $A \leq B \Leftrightarrow \delta(B/A) \geq 0$  for each finite  $X \subset B - A$

と定義する. 可算なクリプケ構造  $M$  が次を満たすとき  $\mathbf{K}_\alpha$ -generic であるという:

- 有限な  $A \subset M$  に対して  $A \in \mathbf{K}_\alpha$
- $A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha$  かつ  $A \leq M$  ならば  $B' \cong_A B$  を満たす  $B' \leq M$  が存在

**注意 3** 命題様相論理の言語  $L$  に対して, 1 階論理の言語を  $L^f = \{R(*, *), P_1(*), P_2(*), \dots, P_j(*)\}$  とする. このとき様相論理式  $\phi$  に対して, 1 階論理式  $\phi^f(x)$  を次のように帰納的に定義する:

- $p_i^f = P_i(x)$  for each  $p_i \in \mathcal{P}$
- $(\phi \wedge \psi)^f = \phi^f \wedge \psi^f$
- $(\neg \phi)^f = \neg \phi^f$
- $(\Box \phi)^f = \forall y (R(x, y) \rightarrow \phi^f(y))$

さらに, クリプケ構造  $A = (S, R, V)$  に対して, 1 階の構造  $A^f = (S, R, P_1, \dots, P_j)$  を, 各  $i = 1, \dots, j$  に対して  $P_i^{A^f} = V(p_i)$  となるように定義する.

有限クリプケ構造  $A$  に対して,  $\psi_A(\bar{x})$  は  $\bar{x} \cong A^f$  を表す論理式とする.

**補題 4**  $M$  を  $\mathbf{K}_\alpha$ -generic クリプケ構造とする. このとき  $\text{Th}(M^f)$  は次の  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  によって公理化される:

- $\Sigma_1 = \{\neg \exists \bar{x} \psi_A(\bar{x}) : A \notin \mathbf{K}_\alpha\}$
- $\Sigma_2 = \{\forall \bar{x} (\psi_A(\bar{x}) \rightarrow \exists \bar{y} \psi_{AB}(\bar{x}\bar{y})) : A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha\}$

**証明の概略** [1] (あるいは [2]) と同様の議論により, まず次の主張を示すことができる.

主張 1: 任意の  $A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha$  と  $n \in \omega$  と  $\epsilon > 0$  に対して,  $A \leq C, B \leq_n C, \delta(C/A) < \epsilon$  を満たす  $C \in \mathbf{K}_\alpha$  が存在.

$N^f \models \Sigma$  が  $\aleph_1$  飽和となるようなクリプケ構造  $N$  を選ぶ.  $\bar{\mathbf{K}}_\alpha = \{B : A \in \mathbf{K}_\alpha \text{ for any finite } A \subset B\}$  とする. 主張 1 より次の主張が示される.

主張 2:  $D \leq N$  を満たす可算な  $D \leq E \in \bar{\mathbf{K}}_\alpha$  に対して,  $E' \leq N$  を満たす  $E' \cong_D E$  が存在.

$M^f$  の  $\aleph_1$  飽和な拡大も主張 2 を満たすので、往復論法より  $M^f \equiv N^f$ . よって  $\Sigma$  は完全である.

簡単のため、様相論理式の確率  $P_n^p(\phi)$  を  $P_n(\phi)$  と書くことにする. 注意 3 より、様相論理式は 1 階論理式に自然に翻訳できる. そこで様相論理式の確率と同様に、1 階論理式  $\psi$  の確率は次のように定義できる: まず  $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$  上の有限構造  $A$  に対してその確率を  $P^f(A) = p(n)^{r(A)}(1-p(n))^{n^2-r(A)}$  と定義する. そして各  $n \in \omega$  に対して、1 階論理式  $\psi$  の確率を  $P_n^f(\psi) = \sum\{P^f(A) : A = (S_n, R) \models \psi\}$  で定義する.

**補題 5** 任意の  $\sigma \in \Sigma$  に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n^f(\sigma) = 1$ .

**証明**  $\sigma \in \Sigma_1$  であるとする、 $\sigma = \neg \exists \bar{x} \psi_A(\bar{x})$  (ここで  $A \notin \mathbf{K}_\alpha$ ).  $k = |A|, l = r(A)$  とする. ここで  $\delta(A) = k - l\alpha < 0$  と仮定してよい. このとき

$$\begin{aligned} P_n^f(\neg\sigma) &= P_n^f(\exists \bar{x} \psi_A(\bar{x})) \\ &\leq \binom{n}{k} p^l (1-p)^{k^2-l} \\ &\leq n^k n^{-l\alpha} \\ &= n^{k-l\alpha} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$\sigma \in \Sigma_2$  であるとする、 $\sigma = \forall \bar{x} (\psi_A(\bar{x}) \rightarrow \exists \bar{y} \psi_{AB}(\bar{x}\bar{y}))$  (ここで  $A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha$ ).  $s = |A|, k = |B - A|, l = r(B) - r(A)$  とする. ここで  $\delta(B/A) = k - l\alpha \geq 0$  であることに注意すると

$$\begin{aligned} P_n^f(\neg\sigma) &= P_n^f(\exists \bar{x} (\psi_A(\bar{x}) \wedge \forall \bar{y} \neg \psi_{AB}(\bar{x}\bar{y}))) \\ &\leq \binom{n}{s} \left\{ 1 - p^l (1-p)^{(k+s)^2-l} \right\}^{\binom{n-s}{k}} \\ &\sim n^s (1 - n^{-l\alpha})^{n^k} \\ &\leq n^s e^{-n^{k-l\alpha}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

定理 1 を証明するためには、次の命題が示されれば十分である.

**命題 6**  $M$  を  $\mathbf{K}_\alpha$ -generic クリプケ構造とする. このとき任意の様相論理式  $\phi$  に対して

(1)  $M \models \phi$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\phi) = 1$ .

(2)  $M \not\models \phi$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\phi) = 0$ .

**証明** (1)  $M \models \phi$  と仮定する. このとき  $M^f \models \forall x\phi^f$ . 補題 4 より,  $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k \vdash \forall x\phi^f$  を満たす  $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Sigma$  が存在する. 補題 5 より,  $P_n(\phi) = P_n^f(\forall x\phi^f) \geq P_n^f(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k) \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(2)  $M \not\models \phi$  と仮定すると  $M \models \neg\phi$ . (1) より  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\neg\phi) = 1$ . 従って  $P_n(\phi) = 1 - P_n(\neg\phi) \rightarrow 1 - 1 = 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

### 参考文献

- [1] K. Ikeda, H. Kikyo and A. Tsuboi, On generic structures with a strong amalgamation property, 投稿中
- [2] 池田宏一郎, モデル理論のランダムグラフへの応用, 京都大学数理解析研究所講究録 1525(2006), 5 頁-14 頁
- [3] J. Halpern and B. Kapron, Zero-one laws for modal logic, Annals of Pure and Applied Logic, vol.69, 157-193, 1994