数理解析研究所講究録
第 1602 巻 2008 年 1-5

コンパクト底空間をもったデファイナブル Gファイバー束

川上　智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、ファイバー束のホモトピー性質を実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \ldots)$ に拡張することを目的とする。また、$\mathcal{M}$ 上において、同変 G ベクトル束のホモトピー性質も考察する。デファイナブル集合は、パラメータつきでデファイナブルとなる集合を意味するとする。

このような構造 $\mathcal{M}$ は、[9] により、非可算無限個存在することが知られている。もっと一般的に実閉体上でも議論することができるが、ここでは、$\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などに性質がまとめられている。

2. ファイバー束

Hausdorff 空間 G が位相群とは、G が群であって、その演算 $G \times G \to G, G \to G$ が連続となることである。

2000 *Mathematics Subject Classification*. 14P10, 57R22, 57S10, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, ベクトル束, ファイバー束, デファイナブル群, デファイナブルファイバー束, デファイナブル G ベクトル束.

Gを位相群、Fを位相空間とする。FがG空間とは、FがGの連続群作用$\phi : G \times F \to F$をもつことである。ここでは、$\phi(g,x)$をgxと書く。GのFへの作用が効果的とは、任意に$g, g' \in G$をとるとき、任意の$f \in F$に対して、$gf = g'f$ならば、$g = g'$となることである。

定義 2.1. 位相空間E, X, 位相群K, Kの効果的作用をもった位相空間Fと全射連続写像$p : E \to X$の五つの組$\eta = (E, p, X, F, K)$がファイバー束とは、次の二つの条件を満たすことである。

(1) Xの開被覆$\{U_i\}$と同相写像$\phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F$が存在して、$p = p_{U_i} \circ \phi_i$となる。ただし、$p_{U_i} : U_i \times F \to U_i$を射影とする。

(2) $p_i : U_i \times F \to F$を射影とし、$x \in U_i$に対して、$\phi_{i,x} : p^{-1}(x) \to F$を$\phi_{i,x}(z) = p_i \circ \phi_i(z)$と定義する。$x \in U_i \cap U_j$に対して、$\theta_{ji} := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}$とするとき、$\theta_{ji} \in K$かつ$\theta_{ji} : U_i \cap U_j \to K$が連続である。

このとき、Eを全空間, Xを底空間, pを射影, Fをファイバー, Kを構造群といい、$\{\phi_i, U_i\}$を局所自明化という。

定義 2.2. $\eta = (E, p, X, F, K), \eta' = (E', p', X', F, K)$をファイバー束とする。

(1) 連続写像$\overline{f} : E \to E'$がファイバー束写像とは、以下の二つの条件を満たすことである。

(a) 連続写像$f : X \to X'$が存在して、$f \circ p = p' \circ \overline{f}$となる。

(b) $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}, \{V'_\mu, \phi'_\mu\}$をそれぞれ$\eta, \eta'$の局所自明化とする。$U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \neq \emptyset$となる任意の$\alpha, \mu$に対して、$f_{\mu\alpha}(x) = \phi'_{\mu, f(x)} \circ \overline{f} \circ \phi^{-1}_{\alpha, x}$とするとき、$f_{\mu\alpha} \in K$かつ$f_{\mu\alpha} : U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \to K$が連続である。

(2) ファイバー束写像$\overline{f} : E \to E'$がファイバー束同値写像とは、$\overline{f}$とfが同相写像であって、$(\overline{f})^{-1}$もファイバー束写像であることである。

(3) ファイバー束同値写像$\overline{f} : E \to E'$がファイバー束同型写像とは、$X = X'$, $f = id_X$であることである。

連続写像$f, h : X \to Y$がホモトピックとは、連続写像$H : X \times [0,1] \to Y$が存在して、任意の$x \in X$に対して、$H(x, 0) = f(x)$かつ$H(x, 1) = h(x)$となることである。

定理 2.3 ([8]). $\eta = (E, p, X, F, K)$をパラコンパクト空間上のファイバー束とし、$f, h : Y \to X$をパラコンパクト空間の間のホモトピックな連続写像とする。このとき、引き戻し束$f^*(\eta)$と$h^*(\eta)$はファイバー束同型である。

3. デファイナブルファイバー束

定義 3.1. *(1)* デファイナブル集合 G がデファイナブル群とは、G が群であって、その演算 $G \times G \to G, G \to G$ が連続デファイナブル写像となることである。

(2) $O(n)$ を n 次直交群とする。群準同型写像 $G \to O(n)$ が連続デファイナブル写像となるとき、これを表現写像という。この群準同型写像から導かれた G 作用をもった $\mathbb{R}^n$ を G の表現という。

(3) G の表現の G 不変デファイナブル部分集合をデファイナブル G 集合という。

(4) Y をデファイナブル集合とする。Y がデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合とは、連続群作用 $G \times Y \to Y$ が存在して、デファイナブルとなることである。

セミアルジェブリック空間 ([1]) の拡張として、デファイナブル空間 ([2]) を考えることができる。

デファイナブルファイバー束 ([7]) は、E をデファイナブル空間, X をデファイナブル集合, 開被覆を有限デファイナブル開被覆, 同相写像をデファイナブル同相写像と定義すればよい。デファイナブル束写像、デファイナブル束同値写像、デファイナブル束同型写像、引き戻し束を定義することができる。ここでは、デファイナブル写像は連続とする。

定理 3.2 ([7])**.** $\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束とし、$f, h : Y \to X$ をホモトピックな連続デファイナブル写像とする。Y がコンパクトならば、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル束同型である。

定理 3.1 において、Y がコンパクトであるという条件は、除けるかもしれない。また、[5] より、f と h はデファイナブルホモトピックとなる。つまり、連続デファイナブル写像 $H : Y \times [0, 1] \to X$ が存在して、任意の $x \in Y$ に対して、$H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = h(x)$ となる。

問題 3.3. *(1)* 定理 *3.2* において、Y のコンパクトの条件を除けないか？

(2) X と Y をデファイナブル空間に拡張できないか？

(3) 実数体の順序極小構造から、一般の実閉体の順序極小構造についての結果に拡張できないか？

4. デファイナブル G ファイバー束

定義 4.1. G をデファイナブル群とし、$\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束とする。

(1) η がデファイナブル G ファイバー束とは、E がデファイナブル G 空間、X がデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合、p がデファイナブル G 写像であり、G は E にデファイナブルファイバー束同値写像で作用することである。

(2) デファイナブル G ファイバー束写像、デファイナブル G ファイバー束同値写像、デファイナブル G ファイバー束同型写像も同様に定義することができる。

定義 4.2. *(1)* G を位相群、X, Y を G 空間とする。連続 G 写像 $f, h : X \to Y$ が G ホモトピックとは、連続 G 写像 $H : X \times [0,1] \to Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、$H(x,0) = f(x), H(x,1) = h(x)$ となることである。ただし、$[0,1]$ 上の G 作用は自明とする。

(2) G をデファイナブル群、X, Y をデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合とする。連続デファイナブル G 写像 $f, h : X \to Y$ がデファイナブル G ホモトピックとは、連続デファイナブル G 写像 $H : X \times [0,1] \to Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、$H(x,0) = f(x), H(x,1) = h(x)$ となることである。ただし、$[0,1]$ 上の G 作用は自明とする。

定理 4.3. G と K をコンパクトデファイナブル群とする。$\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブル G 集合上のデファイナブル G ファイバー束とする。$f, h : X \to Y$ をデファイナブル G 集合間の連続デファイナブル G 写像で、G ホモトピックとする。X がコンパクトならば、$f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル G ファイバー束同型である。

定理 4.3 の条件のもとで、[5] により、f と h はデファイナブル G ホモトピックになることが知られている。また G 作用を考えない場合の問題 3.3 の同変版も同様に考えることができる。

デファイナブル G ファイバー束の特別な場合として、デファイナブル G ベクトル束を考えることができる。X がコンパクトの条件は、デファイナブル G ベクトル束の場合は、除くことができる。

定理 4.4 ([4])**.** G をコンパクトデファイナブル群とする。$\eta = (E, p, X)$ をデファイナブル G 集合上のデファイナブル G ベクトル束とする。$f, h : X \to Y$ をデファイナブル G 集合間の連続デファイナブル G 写像で、G ホモトピックとする。このとき、$f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル G ファイバー束同型である。

定理 *4.4* の特別な場合が、デファイナブル C^∞ カテゴリーにおいて知られている *(*[6]*)*。

References

[1] H. Delfs and M. Knebusch, *Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semialgebraic spaces*, Math. Z. **178** (1981), 175–213.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[4] T. Kawakami, Definable C^r fiber bundles and definable C^rG vector bundles, preprint.

[5] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55**, (2004), 1–15.

[6] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.

[7] T. Kawakami, *Homotopy property for definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1-6.

[8] R. K. Lashof, *Equivariant Bundles*, Illinois J. Math. **26(2)** (1982), 257–271.

[9] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.