数理解析研究所講究録
第1608巻 2008年 105-117

Eulerの弾性曲線とKirchhoff弾性棒
– 微分幾何的な観点から
(Euler's elastica and the Kirchhoff elastic rod – from the viewpoint of differential geometry)

福岡大学理学部応用数学科　川久保 哲 (Satoshi Kawakubo)
Department of Applied Mathematics,
Fuculty of Science,
Fukuoka University

Abstract

Eulerの弾性曲線及びKirchhoff弾性棒は，一次元弾性体の数学的モデルの代表的なものである．Eulerの弾性曲線は，一言で言うと曲げの効果のみを考慮したモデルであるが，Kirchhoff弾性棒は曲げと捩れの両方の効果を考慮したモデルであり，Eulerの弾性曲線の一般化になっている．ここでは，曲がった空間(Riemann多様体)の中のKirchhoff弾性棒を考える．特に，3次元空間形内のKirchhoff弾性棒が，Jacobiのsn関数と楕円積分でexplicitに表されることを示す．さらに，3次元空間形内のKirchhoff弾性棒を用いて，軸流を考慮した渦糸の運動方程式であるFukumoto-Miyazaki方程式の進行波解を構成する．

1　序

一次元弾性体(例えばピアノ線のような弾性の強い針金を思い浮かべて頂きたい)の数学的モデルについては，18世紀以来，様々な観点から多くの研究がなされてきている([1],[18])．Eulerの弾性曲線やKirchhoff弾性棒はこのような数学的モデルの代表的なものである．本稿では，微分幾何的な観点から，特に曲がった空間(Riemann多様体)に入った一次元弾性体について考えたい．

Eulerの弾性曲線(以下，単に弾性曲線)は一次元弾性体の数学的モデルの中でも最も素朴と言えるもので，1742年，Daniel BernoulliがEulerへの手紙の中で変分問題としての定式化を行った．Eulerはその定式化に従って微分方程式を導出し，平面内の解を分類している(cf. [18])．弾性曲線は一言で言うと曲げの効果のみを考えたモデルであるが，それに対してKirchhoff弾性棒(1859)は，曲げと捩れの両方の効果を考えたより精密なモデルであり，弾性曲線の一般化になっている．

さて，弾性曲線や Kirchhoff 弾性棒は元々は Euclid 空間 ($\mathbf{R}^2$ や $\mathbf{R}^3$) の中で考えられたものであったが，1980 年代に Willmore 曲面論等への応用が発見され，微分幾何学者によって Riemann 多様体の中の一次元弾性体に興味がもたれるようになった (cf. [13], [19], etc.).

ここでは特に 3 次元空間形，$\mathscr{M} = \mathbf{R}^3$ (3 次元 Euclid 空間)，S^3 (3 次元定曲率球面)，H^3 (3 次元双曲空間) の中の Kirchhoff 弾性棒について考える．Langer-Singer([16]) は，3 次元空間形 $\mathscr{M}$ での Kirchhoff 弾性棒の変分問題をある種の Hamilton 系として定式化し，その Liouville 可積分性を示した．また，Jurdjevic ([8]) は一般化された Kirchhoff 弾性棒の変分問題に付随した，複素化された Hamilton 方程式を考え，可積分な場合の分類や積分の方法等を調べている (cf. [7]).

しかし，$\mathscr{M}$ 内での Kirchhoff 弾性棒の大域的な形状を目に見えるようにするためには，これらの結果は十分とはいいがたい．そこで，できれば $\mathscr{M}$ 上に簡単な座標をとり，解の座標成分をよく知られた関数で具体的に表したい．$\mathbf{R}^3$ の場合には，それができることが知られていて，解の具体的表示に関する様々な結果が得られている．例えば Tsuru ([22])，Shi-Hearst ([20])，Langer-Singer ([17]) らにより，円柱座標を用いれば Kirchhoff 弾性棒が sn 関数と楕円積分で explicit に 表わされるということが示されており，また，形を変えずに動く渦糸との等価性 ([5]) を通して Kida ([11]) によっても同様の表示式が得られている．さらにこれらの結果を用いて，周期的 Kirchhoff 弾性棒の分類，結び目型の決定 ([6]) も行われている．

$\mathscr{M} = S^3, H^3$ の場合でもこのような具体的表示ができるのか，というのは自然な疑問であると思われるが，S^3 の場合に限っては [9] で，円柱座標と類似したある座標を用いれば，やはり sn 関数と楕円積分により explicit に表わせることが示されている．しかし [9] では，S^3 の特殊な構造を用いており，ここでの証明を H^3 の場合にそのまま適用することはできなかった．本稿の第 2 節から第 4 節では，空間形の断面曲率の符号に依存しないある補題 (補題 5) を証明することにより，残る H^3 においても同様の結果 (explicit な表示式) が得られたことを報告する (定理 6). (なお第 4 節までの内容は基本的に論文 [10] に基づいている．)

また，第 5 節では Kirchhoff 弾性棒と渦糸の運動方程式との関係について考察する．特に，3 次元空間形内の Kirchhoff 弾性棒の中心曲線が Fukumoto-Miyazaki 方程式 (渦ジェット糸の運動方程式) の進行波解になるという結果 (定理 9) について報告する．

今回は，Kirchhoff 弾性棒に関する私の結果の他に，Euler の弾性曲線に関する Langer-Singer らの仕事の紹介やそれに関する考察なども盛り込みたかったのだが，やや話題が散漫になりすぎるかと思い，割愛させて頂いた．題名に比べて話が Kirchhoff 弾性棒に偏りすぎてしまったことを予めお断りさせて頂きたい．

2 弾性曲線と Kirchhoff 弾性棒の定義

簡単のため，特に断りがない限り多様体，曲線等はすべて C^∞ 級としておく．$\mathscr{M}$ を n 次元 Riemann 多様体とする．(Riemann 計量を $\langle *, * \rangle$ で，ノルムを $|*|$ で表す．)

まず，弾性曲線を定義しよう．$\gamma = \gamma(s) : [s_1, s_2] \to \mathscr{M}$ を速さが 1 の (即ち弧長パラメータの) 曲線とする．γ の曲げエネルギー (弾性エネルギーともよばれる) $\mathfrak{E}(\gamma)$ を，γ の曲率の二乗の積分，即ち

$$\mathfrak{E}(\gamma) = \int_{s_1}^{s_2} |\nabla_s \gamma'|^2 ds$$

で定義する．ここで，∇ は $\mathscr{M}$ の Riemann 計量に関する Levi-Civita 接続を表す．

一般の $\mathscr{M}$ において Euler-Lagrange 方程式を計算することも可能であるが，簡単のため，以下では，$\mathscr{M}$ は 3 次元空間形 $\mathbf{R}^3$, S^3, H^3 とし，断面曲率を G で表す．(従って $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3$ の時は G は 0，S^3 の時は G は正の定数，H^3 の時は G は負の定数である．) $\mathscr{M}$ の向きを固定しておき，$\times$ で外積を表す．

さて，両端点 $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$，及び両端点での接ベクトル $\gamma'(s_1), \gamma'(s_2)$ を固定した変分 (γ の速さも 1 に固定する) に関して，$\mathfrak{E}$ の第一変分公式を計算し，Euler-Lagrange 方程式を導くと

$$\nabla_s \Big[2(\nabla_s)^2 \gamma' + \Big(3|\nabla_s \gamma'|^2 - (\mu - 2G) \Big) \gamma' \Big] = 0 \tag{2.1}$$

となる．ここで，μ は定数である．

定義 1. ある定数 μ が存在して，(2.1) が成り立つとき，γ を弾性曲線という．

次に Kirchhoff 弾性棒を定義しよう．$\gamma = \gamma(s) : [s_1, s_2] \to \mathscr{M}$ を速さが 1 の曲線とする．曲線のみでは弾性体の捩れを表せないので，次のようなものを導入する．$M = (M_1, M_2)$ を γ に沿ったベクトル場の 2 個の組で，各 s に対して $(\gamma'(s), M_1(s), M_2(s))$ が $\gamma(s)$ における正規直交枠になっているようなものとする．

このような γ と M の組 $\{\gamma, M\}$ に対して，曲げと捩れの両方の効果を考えたエネルギー $\mathfrak{T}$ を次のように定義する．$\nu > 0$ を (ピアノ線の材質により決まる) 定数とする．

$$\mathfrak{T}(\{\gamma, M\}) = \mathfrak{E}(\gamma) + \nu \sum_{i=1}^{2} \int_{s_1}^{s_2} |\nabla_s^\perp M_i|^2 ds \tag{2.2}$$

ここで $\nabla^\perp$ は曲線 γ に沿う法束 $T^\perp \mathscr{M}$ の法接続，即ち

$$\nabla_s^\perp M_i = (\nabla_s M_i)^\perp = \nabla_s M_i - \langle \nabla_s M_i, \gamma' \rangle \gamma'$$

である．(2.2) の右辺の第一項は曲げの効果を表すエネルギーであり，第二項が捩れの効果を表すエネルギーである．

両端点及び両端点での枠 (γ', M_1, M_2) を固定した変分 (γ の速さも 1 に固定する) に関して $\mathfrak{T}$ の第一変分公式を計算し，Euler-Lagrange 方程式を導くと次のようになる．

$$\nabla_s\Big[2(\nabla_s)^2\gamma' + \big(3|\nabla_s\gamma'|^2 - (\mu - 2G) + 2\nu a^2\big)\gamma' - 4\nu a\gamma' \times \nabla_s\gamma'\Big] = 0, \tag{2.3}$$

$$\langle \nabla_s^{\perp} M_1, \gamma' \times M_1 \rangle = a. \tag{2.4}$$

ここで，μ, a は定数である．なお，(2.4) は，エネルギーが臨界ならば,「捩れ」がピアノ線の一部に集中することはなく，全体に一様に分布することを示している．

定義 2. ある定数 μ, a が存在して，(2.3) と (2.4) が成り立つとき，$\{\gamma, M\}$ を Kirchhoff 弾性棒という．定数 a は一意的に定まるが，この a を $\{\gamma, M\}$ の twist rate という．

注. 非常に特別な状況 (γ が $\mathscr{M}$ の測地線の時) を除くと，μ も一意的に定まる．定数 μ を $\{\gamma, M\}$ の Lagrange 乗数とよぶ．(Euler-Lagrange 方程式を導出する際に，Lagrange の未定乗数法を用いる．μ はその Lagrange 乗数に他ならない．)

$\{\gamma, M\}$ が，twist rate が 0 の Kirchhoff 弾性棒であるための必要十分条件は，中心曲線 γ が弾性曲線で，かつ M が法接続で平行な枠場であることである．従って，Kirchhoff 弾性棒は弾性曲線を完全に含んだ概念であると言える．

3 Kirchhoff 弾性棒の曲率と捩率

曲線 γ の Frenet 曲率，Frenet 捩率 (以下単に曲率，捩率) をそれぞれ $k(s), \tau(s)$ とする．なお，捩率 τ はもちろん曲線 γ のみから決まるものであり，$\{\gamma, M\}$ の twist rate a とは全く別のものであることに注意して頂きたい．

さて，Euler-Lagrange 方程式 (2.3) を Frenet 枠を用いて書き下し，γ の曲率 k と捩率 τ の満たす方程式を計算すると，

$$2k'' + k^3 + (2\nu a^2 - (\mu - 2G))k - 2k\tau(\tau - 2\nu a) = 0, \tag{3.1}$$

$$k^2(\tau - \nu a) = b \tag{3.2}$$

となる．ここで b は定数である．この解は Jacobi の sn 関数を用いて explicit に書けることがわかり，このことから次の命題が得られる．なお，$\{\gamma(s), M(s)\}$ に対して，s の平行移動と向きの逆転，$\mathscr{M}$ の等長変換，M への直交群 $O(2)$ の右からの作用（即ち $\xi \in O(2)$ に対して $\{\gamma, M\}$ を $\{\gamma, M\xi\}$ に写すような作用）を有限回合成した変換を合同変換ということにする．

命題 3. $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3, S^3, H^3$ とする．$\mathscr{M}$ 内の，$\mathbf{R}$ 上で定義された Kirchhoff 弾性棒 (ただし γ は測地線ではないとする．γ が測地線となる Kirchhoff 弾性棒は比較的自明なものとなるので，本稿の以下では，考えないことにする．) の合同類全体のなす空間は，

$$\alpha > 0,\ -\infty < \eta < \infty,\ w > 0,\ 0 \leqslant p \leqslant w \leqslant 1$$

をみたす4つの実数の組 (α,η,p,w) のなす空間と1対1に対応する．(ただし，$p=w$ または $w=1$ のとき，(α,η,p,w) は $(\alpha,-\eta,p,w)$ と同一視するものとする．)

(α,η,p,w) には，γ の曲率，捩率が

$$k(s)=\sqrt{\alpha\left(1-\frac{p^2}{w^2}\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2w}s,p\right)\right)}, \tag{3.3}$$

$$\tau(s)=\pm\left[\left(\frac{\alpha^{3/2}\sqrt{(1-w^2)(w^2-p^2)}}{2w^2}\right)\frac{1}{k(s)^2}+\nu\eta\sqrt{\alpha}\right] \tag{3.4}$$

で，twist rate が $\pm\eta\sqrt{\alpha}$ であるような Kirchhoff 弾性棒の合同類が対応する．

上で，elliptic modulus p の動く範囲は $0\leqslant p\leqslant 1$ であるが，特に $p=0$ の時 γ は螺線 (つまり曲率も捩率も一定) となる．$0<p<1$ の時，曲率は周期関数であり，捩率は曲率と同じ最小周期を持つ周期関数かもしくは定数関数になる．また，$p=1(\Leftrightarrow p=w=1)$ の時は曲率 k は周期的とはならず，γ の形は他の場合とかなり異なったものとなる．なお，$\mathbf{R}^3$, S^3, H^3 内の Kirchhoff 弾性棒の中心曲線 γ を，ある方向に形を変えずに動かしたものは，局所誘導方程式の進行波解となることが示せるのだが (定理 8)，特に $p=1$ の時はソリトン解となる．これは Hasimoto ソリトン ([4]) を空間形内の場合に拡張したものである．

4 Kirchhoff 弾性棒の explicit な表示式

適切な座標を構成し解を explcit に表すために，Langer-Singer ([14],[15]) と同様な Killing ベクトル場を使う方法を用いる．以下，γ の速度ベクトル γ' を T で表し，$\nabla_s=\nabla_T$ と書く．

$\{\gamma,M\}$ を $\mathscr{M}=\mathbf{R}^3$, S^3, H^3 内の Kirchhoff 弾性棒とする．天下り的であるが，γ に沿うベクトル場 J,H を

$$J=2(\nabla_T)^2T+(3\,|\nabla_TT|^2-\mu+2\nu a^2)T-4\nu aT\times\nabla_TT, \tag{4.1}$$

$$H=2\nu aT+T\times\nabla_TT \tag{4.2}$$

で定義する．後で使うため，J,H に関する公式を2つほど用意しておこう．まず，簡単な計算で

$$\nabla_TH=\frac{1}{2}T\times J \tag{4.3}$$

が成り立つことがわかる．また，(2.3) より

$$\nabla_TJ=-2G\nabla_TT \tag{4.4}$$

が成り立つ．

さて，J, H について，次の 2 つの重要な補題が成立する．

補題 4. J, H は $\mathscr{M}$ 上の Killing ベクトル場に一意的に拡張できる．(以下，この拡張を $\widetilde{J}$, $\widetilde{H}$ とおく．)

注. $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3$ とする．この時は，$\widetilde{J}$ は定ベクトル場となる．(これは (2.3) と (4.1) より $\nabla_T J = 0$ が従うことにより分かる．) また，$\widetilde{H}$ は (特別な場合を除いて) $\widetilde{J}$ 方向を軸とした screw 場 (つまり $\widetilde{J}$ 方向を軸とする回転場と $\widetilde{J}$ に平行な定ベクトル場との和) になる．下で構成する円柱座標は，この回転場によって定まるものである．

なお，補題 4 の証明は，まず曲線に沿うベクトル場が $\mathscr{M}$ 上の Killing ベクトル場に拡張できるための必要十分条件を常微分方程式で表し，J, H がその常微分方程式を満たすことを確かめる (その際に (3.1), (3.2) を用いる) というやり方で行う．(詳細は [9] の命題 4.1 の証明を参照して頂きたい．)

また，(4.1), (4.2) は $\mathbf{R}^3$ の場合の Langer-Singer ([17]) による J, H と同様に定義したものである．$\mathbf{R}^3$ の場合，J, H は Noether の定理 (と同じアイディア) により自然に導ける．J (resp. H) は，エネルギー $\mathfrak{T}$ の平行移動 (resp. 回転) による不変性から出る ([17])．

補題 5. $[\widetilde{J}, \widetilde{H}] = 0$.

(証明の概略). $\mathscr{M}$ 上の Killing ベクトル場の零点全体の集合は，空集合，$\mathscr{M}$ 全体，$\mathscr{M}$ の 1 本の測地線，の何れかである．γ の像が 1 本の測地線に含まれてしまうことはありえないことから，補題の主張を示すには，γ 上で $[\widetilde{J}, \widetilde{H}] = 0$ であることを示せばよい．さらに，$[\widetilde{J}, \widetilde{H}] = \nabla_{\widetilde{J}}\widetilde{H} - \nabla_{\widetilde{H}}\widetilde{J}$ であるから，γ 上で $\nabla_{\widetilde{H}}\widetilde{J} = 0$ かつ $\nabla_{\widetilde{J}}\widetilde{H} = 0$ であることを示せば十分である．

γ 上で $\nabla_{\widetilde{H}}\widetilde{J} = 0$ であることを示そう．$\widetilde{J}$ は γ 上の点以外では具体的に表されていないから，直接 $\nabla_{\widetilde{H}}\widetilde{J}$ を計算することは困難である．そこで，これを別の量におきかえる．

$\varphi^\lambda : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) を $\widetilde{J}$ によって生成される 1 径数等長変換群とする．$(\varphi^\lambda \circ \gamma)(s)$ を $\widehat{\gamma}(\lambda, s) = \gamma^\lambda(s)$ と書き，$\widehat{T}(\lambda, s) = \partial\widehat{\gamma}/\partial s$, $\widehat{J}(\lambda, s) = \partial\widehat{\gamma}/\partial\lambda\,(= \widetilde{J}(\widehat{\gamma}(\lambda, s)))$ とおく．曲面 $\widehat{\gamma}$ に沿ったベクトル場 $\widehat{H}$ を

$$\widehat{H}(\lambda, s) = 2\nu a\widehat{T} + \widehat{T} \times \nabla_{\widehat{T}}\widehat{T}$$

で定義する．これは曲線 γ 上の H を曲面 $\widehat{\gamma}$ 上に自然に拡張したものである．ただし，$\mathscr{M}$ 上のベクトル場 $\widetilde{H}$ を曲面 $\widehat{\gamma}$ に制限したものが $\widehat{H}$ に一致しているかどうかは，まだこの時点においては示されていない，ということを注意しておく．

さて，$\widehat{H}$ と $\widetilde{H}$ は γ 上では一致するので，$\nabla_{\widetilde{H}}\widetilde{J}$ のかわりに $\nabla_{\widehat{H}}\widehat{J}$ を計算すればよい．ところが今 $\widehat{H}$ は流れ φ^λ で不変なので，$\nabla_{\widehat{H}}\widehat{J} = \nabla_{\widehat{J}}\widehat{H}$ が成り立つ．従って，$\nabla_{\widehat{J}}\widehat{H} = 0$

を示せばよい．以下，これを示そう．特に混乱がおこる場合を除き $\widehat{T}$, $\widehat{J}$, $\widehat{H}$, $\nabla_{\widehat{J}}$ 等を T, J, H, ∇_J 等と略記する．構造方程式 $\nabla_J T = \nabla_T J$ 及び

$$\nabla_J \nabla_T X = \nabla_T \nabla_J X + G(\langle T, X\rangle J - \langle J, X\rangle T)$$

(ここで X は $\widehat{\gamma}$ に沿った任意のベクトル場) が成り立つことに注意する．(4.4) と (4.3) (正確にはこれらの中の T, J, H を $\widehat{T}$, $\widehat{J}$, $\widehat{H}$ で置き換えたもの．φ^λ が合同変換であることから^付きにした場合でも成立することが確かめられる．)，及び上の構造方程式を用いると，

$$\begin{aligned}\nabla_J H &= 2\nu a \nabla_T J + \nabla_T J \times \nabla_T T + T \times ((\nabla_T)^2 J + GJ)\\ &= -2G(2\nu a \nabla_T T + T \times (\nabla_T)^2 T) + GT \times J\\ &= -2G(\nabla_T H - \frac{1}{2} T \times J) = 0.\end{aligned}$$

が従う．よって γ 上で $\nabla_{\widetilde{H}} \widetilde{J} = 0$ が成立することが示された．

同様の方法で，γ 上で $\nabla_{\widetilde{J}} \widetilde{H} = 0$ であることを示すことができる．以上により $\mathscr{M}$ 上で $[\widetilde{J}, \widetilde{H}] = 0$ であることが証明された． □

さて，$\{\gamma, M\}$ にうまく適合した座標を構成したいのだが，まずは $\mathscr{M}$ を $\mathbf{R}^4$ (標準座標を (x_1, x_2, x_3, x_4) とする) に埋め込んで次のように座標を定める．

Case 1. $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3$ の時

$\mathbf{R}^3$ を，$\mathbf{R}^4$ の部分集合 $\{{}^t(x_1, x_2, x_3, 1)\,;\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$ として等長的に埋め込んでおき，$\mathbf{R}^3$ に

$$x_1 = r\cos\theta,\quad x_2 = r\sin\theta,\quad x_3 = -z$$

をみたす円柱座標 (r, θ, z) を入れる．

Case 2. $\mathscr{M} = S^3$ の時

S^3 を $\mathbf{R}^4$ の原点中心の半径 $1/\sqrt{G}$ の球面として等長的に埋め込んでおき，次の関係によって S^3 内の座標系 (r, θ, ψ) を定める．

$$x_1 = r\cos\theta,\quad x_2 = r\sin\theta,\quad x_3 = \overline{r}\cos\psi,\quad x_4 = \overline{r}\sin\psi$$

ここで $r > 0$ であり，また $\overline{r} = \sqrt{1/G - r^2}$ とおいた．(この座標は $\mathbf{R}^3$ での円柱座標に相当するもので，$r = \text{const.}$ で得られる曲面は Clifford torus になっている．)

Case 3. $\mathscr{M} = H^3$ の時

双曲面モデルを使う．すなわち $\mathbf{R}^4$ に Lorentz 計量 $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$ を入れ，H^3 を $\mathbf{R}^4$ の部分多様体 $\{{}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4\,;\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1/G,\ x_4 > 0\}$ にこの計量を制限したものとみなす．次の関係によって H^3 内に座標系 (r, θ, ψ) を定める．

$$x_1 = r\cos\theta,\quad x_2 = r\sin\theta,\quad x_3 = -\overline{r}\sinh\psi,\quad x_4 = \overline{r}\cosh\psi$$

ここで $r > 0$ であり，また $\overline{r} = \sqrt{-1/G + r^2}$ とおいた．

上の埋め込み $\mathscr{M} \to \mathbf{R}^4$ を ι で表す．また $I(\mathscr{M})$ で $\mathscr{M}$ の等長変換群を，$\mathrm{Lie}(I(\mathscr{M}))$ でその Lie 環を表す．即ち $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3, S^3, H^3$ に対して $I(\mathscr{M}) = E(3), O(4), O^+(3,1)$ ($\subset GL(4,\mathbf{R})$) であり $\mathrm{Lie}(I(\mathscr{M})) = \mathfrak{e}(3), \mathfrak{o}(4), \mathfrak{o}(3,1)$ ($\subset M(4;\mathbf{R})$) である．

定理 6. $\{\gamma, M\}$ を $\mathscr{M}$ 内の Kirchhoff 弾性棒とする．$\mathscr{M} = H^3$ の時は Killing ベクトル場 $\widetilde{J}$ は放物型ではないと仮定する．この時，ある $P \in I(\mathscr{M})$ が存在して次が成り立つ．埋め込み $P \circ \iota : \mathscr{M} \to \mathbf{R}^4$ に対して改めて座標 (r, θ, ψ) (あるいは (r, θ, z)) をとり，$\gamma(s)$ の r, θ, ψ, z 成分を $r(s)$, $\theta(s)$, $\psi(s)$, $z(s)$ とする．このとき次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&r(s) = \sqrt{c_1 \mathrm{sn}^2(c_2 s, c_3) + c_4},\\
&\theta'(s) = \frac{c_5 \mathrm{sn}^2(c_2 s, c_3) + c_6}{r(s)^2} \quad (\text{ただし } r(s) \neq 0),\\
\mathscr{M} &= S^3, H^3 \text{の時}\\
&\psi'(s) = \frac{c_7 \mathrm{sn}^2(c_2 s, c_3) + c_8}{\overline{r}(s)^2} \quad (\text{ただし } \overline{r}(s) \neq 0),\\
\mathscr{M} &= \mathbf{R}^3 \text{の時}\\
&z'(s) = c_9 \mathrm{sn}^2(c_2 s, c_3) + c_{10}.
\end{aligned}
$$

ここで，$c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ は定数であり，これらは合同類を表すパラメータ (α, η, p, w) と G で explicit に表せる．

注意 1. $\mathscr{M} = H^3$ で $\widetilde{J}$ が放物型の時も，別の座標をとれば上と同様な sn 関数による表示式が得られる．

注意 2. $r(s) = 0$ となる点 s が存在する場合もあり，この時 r の零点は周期的に現われる．また，r の零点以外での $\theta'(s)$ は s に依らない値になり，r の零点では $\theta(s)$ は π だけジャンプすることも示せる．従って $\theta(s)$ は，一次関数を，周期的に現われる r の零点において π だけジャンプさせてできる関数になり，やはり explicit に表せることがわかる．また，$\overline{r}(s), \psi(s)$ についてもほぼ同様のことが成り立つ．

注意 3. $\theta'(s)$ の式を s で積分すれば，$\theta(s)$ が求められるが，これは第 3 種不完全楕円積分を用いて表すことができる．$\psi(s)$ についても同様である．

(証明の概略). Y を $\mathscr{M}$ 上の Killing ベクトル場とすると，ある $A_Y \in \mathrm{Lie}(I(\mathscr{M}))$ で $Y(\boldsymbol{x}) = A_Y \boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathscr{M}$) となるものが一意的に存在する．この A_Y を埋め込み ι に関する Y の行列表示ということにする．

他の場合も同様なので以下では $\mathscr{M} = H^3$ とする．座標からできるベクトル場 $\partial/\partial\theta$,

$\partial/\partial\psi$ は $\mathscr{M}$ 上の Killing ベクトル場に自然に拡張でき，それらの行列表示はそれぞれ

$$E_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

となることに注意しておく．

さて，$\widetilde{J}, \widetilde{H}$ はそれぞれ行列表示できるわけだが，補題 5 を用いると，これらが同時標準化可能であることが比較的容易に示せる．即ち次が成り立つ．

補題 7. ある $P \in I(\mathscr{M})$ 及び $\sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2 \in \mathbf{R}$ が存在して，埋め込み $P \circ \iota : \mathscr{M} \to \mathbf{R}^4$ に関する $\widetilde{J}$, $\widetilde{H}$ の行列表示は $\sigma_1 E_1 + \sigma_2 E_2$, $\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2$ となる．

従って埋め込み $P \circ \iota$ に関して改めて座標 (r, θ, ψ) をとれば

$$\widetilde{J} = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial\theta} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial\psi}, \qquad \widetilde{H} = \rho_1 \frac{\partial}{\partial\theta} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{4.5}$$

となる．

まず，$r(s)$ を求めよう．(4.5) 及び $|\partial/\partial\theta| = r$，$|\partial/\partial\psi| = \overline{r}$ より

$$|H(s)|^2 = |\widetilde{H}(\gamma(s))|^2 = \rho_1^2 r(s)^2 + \rho_2^2 \left(-\frac{1}{G} + r(s)^2 \right).$$

一方，H の定義より $|H(s)|^2 = k(s)^2 + 4\nu^2 a^2$ である．従って

$$r(s) = \sqrt{\frac{k(s)^2 + 4\nu^2 a^2 + \rho_2^2/G}{\rho_1^2 + \rho_2^2}}.$$

命題 3 の $k(s)$ の式を代入すれば，$r(s)$ の式を得る．

次に，(4.5) より

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(s)} = \frac{1}{\sigma_1\rho_2 - \sigma_2\rho_1}(\rho_2 J - \sigma_2 H), \quad \left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_{\gamma(s)} = \frac{1}{\sigma_1\rho_2 - \sigma_2\rho_1}(-\rho_1 J + \sigma_1 H)$$

である．従って，$(\partial/\partial r, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\psi)$ が直交基であることに注意すると

$$\theta'(s) = \frac{\left\langle T, (\partial/\partial\theta)_{\gamma(s)} \right\rangle}{\left|(\partial/\partial\theta)_{\gamma(s)}\right|^2} = \frac{\langle T, \rho_2 J - \sigma_2 H \rangle}{(\sigma_1\rho_2 - \sigma_2\rho_1) r(s)^2}.$$

となる．J, H を Frenet 枠で表した式を上式に代入すれば，分子は $k(s)$ で表すことができ，$\theta'(s)$ の表示を得る．$\psi'(s)$ も同様である．　□

上の証明のポイントの一つは補題 7 であるが，これについて少し補足しておく．[9] では同時標準化可能性を示すために $\widetilde{J}, \widetilde{H}$ とは別の Killing ベクトル場 (S^3 上で長さが一定なもの) を利用したが，この方法は S^3 の特殊な構造を用いており，H^3 の場合には適用できない．今回は，先に補題 5 を示すことにより，空間形の種類に依らずに補題 7 を証明することができ，その結果，H^3 においても解の explicit な表示が得られた．

5 渦糸の運動方程式と Kirchhoff 弾性棒

ここでは，3 次元空間形内の Kirchhoff 弾性棒の中心曲線を，ある方向に形を変えずに動かしたものが，渦糸の運動方程式 (局所誘導方程式及び Fukumoto-Miyazaki 方程式) の進行波解になることを示す．まず (I) では局所誘導方程式に対する [9] での結果を紹介し，(II) で Fukumoto-Miyazaki 方程式に対する結果を述べる．

(I) 局所誘導方程式

次のような $\mathbf{R}^3$ 内の曲線の発展方程式 (5.1) を考える．これは非圧縮非粘性流体中の渦糸の運動を表す発展方程式で，モデルの導出の仕方から局所誘導方程式とよばれる．

$$\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial s} \times \frac{\partial^2\tilde{\gamma}}{\partial s^2} \tag{5.1}$$

ここで，$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(s,t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ であり，s は渦糸を表す曲線に沿うパラメータ，t は時間を表す．なお，(5.1) は弧長パラメータを保つ方程式であることに注意する．即ち，(5.1) の解 $\tilde{\gamma}(s,t)$ に対して，もし s が初期曲線 $\tilde{\gamma}(s,0)$ の弧長パラメータであるならば，任意の固定された t に対して，s は曲線 $\tilde{\gamma}(s,t)$ の弧長パラメータである．

さて，Kida ([11]) は形を変えずに運動する (5.1) の解 (進行波解) の形状を楕円積分を用いて表し (これは木田クラスとよばれる)，Hasimoto-Kambe ([5]) はそれが Kirchhoff 弾性棒の中心曲線に一致することを示した．また Langer-Singer ([17]) は，Kirchhoff 弾性棒の中心曲線を上とは別の変分問題の解として特徴づけた上で，それが (5.1) の進行波解となることを示している．ここでは，これらと類似の事を 3 次元空間形の中で考えたい．

共変微分を用いることにより，(5.1) は 3 次元空間形 $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3, S^3, H^3$ 内の発展方程式 (5.2) に拡張できる (cf. [12] etc.)．(実際には 3 次元空間形に限らず，向き付けられた 3 次元 Riemann 多様体内で考えられる．)

$$\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial s} \times \nabla_s \frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial s}, \tag{5.2}$$

ここで，$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(s,t) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathscr{M}$ である．(5.2) も弧長パラメータを保つ．

補題 4 を用いることにより，次が成立することが示せる．

定理 8 ([9],Corollary 4.5). $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3, S^3, H^3$ とする. γ を twist rate が a の Kirchhoff 弾性棒の中心曲線とし, 補題 4 により定まる Killing ベクトル場 $\widetilde{H}$ によって生成される 1 径数等長変換群を $\{\phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ とおく. この時, 形を変えない曲線の運動 $\widetilde{\gamma}(s,t) := \phi_t(\gamma(s-2\nu at))$ は (5.2) の解となる.

(II) Fukumoto-Miyazaki 方程式

次に, 渦ジェット糸 (軸流 (=ジェット) の効果を考慮した渦糸) の運動方程式である Fukumoto-Miyazaki 方程式 ([3])

$$\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t} = c_1\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s}\times\frac{\partial^2\widetilde{\gamma}}{\partial s^2} + c_2\left(\frac{\partial^3\widetilde{\gamma}}{\partial s^3} + \frac{3}{2}\left|\frac{\partial^2\widetilde{\gamma}}{\partial s^2}\right|^2\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s}\right), \tag{5.3}$$

について考える ([3],[21],[2]). ここで $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(s,t) : \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^3$ であり, c_1, c_2 は定数である. $c_2 = 0$, $c_1 = 1$ の時, (5.3) は局所誘導方程式と一致する. (5.3) も弧長パラメータを保つ方程式である.

Fukumoto-Miyazaki([3]) では, 形をかえずに動く (5.3) の解が求められている. また最近 Fukumoto([2]) は, 一定速度で並進運動する (5.3) の解の形が Kirchhoff 弾性棒の中心曲線に一致することを示した.

ここでも, これらと類似のことを 3 次元空間形内で考えたい. 方程式 (5.3) も, (I) と同様に, 3 次元空間形 $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3, S^3, H^3$ 内の発展方程式

$$\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial t} = c_1\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s}\times\nabla_s\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s} + c_2\left((\nabla_s)^2\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s} + \frac{3}{2}\left|\nabla_s\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s}\right|^2\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial s}\right) \tag{5.4}$$

に拡張できる. ここで, $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(s,t) : \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathscr{M}$ であり, c_1, c_2 は定数である. ((5.4) も弧長パラメータを保つことが確かめられる.) この時, 次が成り立つ.

定理 9. $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3, S^3, H^3$ とする. γ を twist rate が a, Lagrange 乗数が μ の Kirchhoff 弾性棒の中心曲線とし, Killing ベクトル場 $\widetilde{K} := (c_1 + 2\nu ac_2)\widetilde{H} + \frac{c_2}{2}\widetilde{J}$ (ここで $\widetilde{H}, \widetilde{J}$ は補題 4 により定まるもの) によって生成される 1 径数等長変換群を $\{\psi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ とおく. この時, 形を変えない曲線の運動 $\widetilde{\gamma}(s,t) := \psi_t(\gamma(s-c_3t))$ は (5.4) の解となる. ただし, $c_3 = 2\nu ac_1 + (\nu a^2 - \mu/2 + 4\nu^2a^2)c_2$ とおいた.

注. $\mathscr{M} = \mathbf{R}^3$ とする. 一般に $\widetilde{K}$ は screw 場であるが, 特に $c_1 + 2\nu ac_2 = 0$ の時は $\widetilde{K} = \frac{c_2}{2}\widetilde{J}$ は定ベクトル場となり, $\widetilde{\gamma}(s,t)$ は速度一定の並進運動で動く解となることが分かる.

(証明の概略). γ に沿うベクトル場 K を $K = (c_1 + 2\nu ac_2)H + \frac{c_2}{2}J$ によって定義すると, (4.1), (4.2) より

$$K = c_1T\times\nabla_TT + c_2\left((\nabla_T)^2T + \frac{3}{2}|\nabla_TT|^2T\right) + c_3T$$

となる．また K は，$\mathscr{M}$ 上の Killing ベクトル場 $\widetilde{K}$ の γ 上への制限である．よって $\omega(s,t)=\psi_t(\gamma(s))$ とおくと，$\{\psi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ は $\widetilde{K}$ から生成される 1 径数等長変換群であることから，

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=c_1\frac{\partial\omega}{\partial s}\times\nabla_s\frac{\partial\omega}{\partial s}+c_2\left((\nabla_s)^2\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{3}{2}\left|\nabla_s\frac{\partial\omega}{\partial s}\right|^2\frac{\partial\omega}{\partial s}\right)+c_3\frac{\partial\omega}{\partial s}$$

が成り立つことが分かる．よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial t}&=\left[-c_3\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{\partial\omega}{\partial t}\right]_{(s-c_3t,t)}\\&=\left[c_1\frac{\partial\omega}{\partial s}\times\nabla_s\frac{\partial\omega}{\partial s}+c_2\left((\nabla_s)^2\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{3}{2}\left|\nabla_s\frac{\partial\omega}{\partial s}\right|^2\frac{\partial\omega}{\partial s}\right)\right]_{(s-c_3t,t)}\\&=c_1\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial s}\times\nabla_s\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial s}+c_2\left((\nabla_s)^2\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial s}+\frac{3}{2}\left|\nabla_s\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial s}\right|^2\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial s}\right)\end{aligned}$$

□

References

[1] S. Antman, Nonlinear problems of elasticity, Springer, New York, 1995.

[2] Y. Fukumoto, *Analogy between a vortex-jet filament and the Kirchhoff elastic rod*, Fluid Dynam. Res. **39** (2007), 511–520.

[3] Y. Fukumoto and T. Miyazaki, *Three-dimensional distorsions of a vortex filament with axial velocity*, J. Fluid Mech. **222** (1991), 369–416.

[4] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), 477–485.

[5] H. Hasimoto and T. Kambe, *Simulation of invariant shapes of a vortex filament with an elastic rod*, J. Phys. Soc. Japan **54** (1985), 5–7.

[6] T. Ivey and D. Singer, *Knot types, homotopies and stability of closed elastic rods*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 429–450.

[7] V. Jurdjevic, *Integrable Hamiltonian systems on Lie groups: Kowalewski type*, Ann. of Math. (2) 150 (1999), no. 2, 605–644.

[8] V. Jurdjevic, *Integrable Hamiltonian systems on complex Lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **178** (2005), no. 838.

[9] S. Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in the three-sphere*, Tohoku Math. J. **56** (2004), 205-235.

[10] S. Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in three-dimensional space forms*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[11] S. Kida, *A vortex filament moving without change of form*, J. Fluid Mech. **112** (1981), 397–409.

[12] N. Koiso, *The vortex filament equation and a semilinear Schrödinger equation in a Hermitian symmetric space*, Osaka J. Math. **34** (1997), 199–214.

[13] J. Langer and D. Singer, *Curves in the hyperbolic plane and mean curvature of tori in 3-space*, Bull. London Math. Soc. **16**(1984), 531–534.

[14] J. Langer and D. Singer, *Knotted elastic curves in* $\mathbf{R}^3$, J. London Math. Soc. (2) **30** (1984), 512–520.

[15] J. Langer and D. Singer, *The total squared curvature of closed curves*, J. Differential Geom. **20** (1984), 1–22.

[16] J. Langer and D. Singer, *Liouville integrability of geometric variational problems*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), 272–280.

[17] J. Langer and D. Singer, *Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod*, SIAM Rev. **38** (1996), 605–618.

[18] A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, Fourth Ed. Dover Publications, New York, 1944.

[19] U. Pinkall, *Hopf tori in* S^3, Invent. Math. **81** (1985), 379–386.

[20] Y. Shi and J. Hearst: *The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrödinger equation, and DNA supercoiling*, J. Chem. Phys. **101** (1994), 5186–5200.

[21] A. Tani and T. Nishiyama, *Solvability of equations for motion of a vortex filament with or without axial flow*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997), 509–526.

[22] H. Tsuru, *Equilibrium shapes and vibrations of thin elastic rod*, J. Phys. Soc. Japan **56** (1987), 2309-2324.

Fukuoka 814-0180, Japan
E-mail: `kawakubo@math.sci.fukuoka-u.ac.jp`