

# エラスティカと交通流 –オイラーの遺産– Elastica and traffic flow: Euler's legacy

東京大学・院工・航空宇宙 西成 活裕 (Katsuhiko Nishinari)  
Department of Aeronautics and Astronautics  
Faculty of Engineering, University of Tokyo

## 1 はじめに

本年度は流体力学の基礎方程式である「オイラー方程式」が提出されて 250 年にあたる年である。現在でもその方程式は様々な分野で基盤として使われており、近年は数値計算の発展などによりますますその研究の重要性が増している。この方程式は非線形であるため、特別な場合を除いて厳密解を得ることが難しく、数値的な研究が近年主流になっている。

しかし数値計算には誤差がつきまとうため、数理解析的な研究は常にこれらに平行して行われなければならない。本論文では、オイラーの残してくれた課題のうち、彼の時代にはまだ無かった新たな数理解析的手法を用いて得られた結果について、筆者が関わったものについて紹介したい。

そこで取り上げるのが、「エラスティカの拡張」と「交通流」という研究テーマである。この 2 つはオイラーが問題意識を持っていた、連続体のダイナミクスの研究流れの中にあるといえるテーマであり、ともに非線形ゆえの困難がつきまとう。しかし 1960 年以降に発展したソリトン理論により、人類は非線形解析に対してこれまで無かった視点や武器を得ることができた。このオイラーの遺産に対してソリトン理論を使った研究結果を以下に説明する。

## 2 エラスティカの拡張

まず、特殊コッセラ理論による 1 次元弾性体の定式化を述べる。この理論では、1 次元弾性体をその中立軸の運動と断面の運動の連成で考え、断面の運動は、中立軸の各点に付随する一種の「内部自由度」の運動、と捉えるところがポイントになる。このように新たな内部自由度を持つ理論を極性理論と呼ぶ。また、幾何学的に大変形を厳密に表現するために、中立軸にそった自然座標系を用いて記述するという特徴がある。

1 次元弾性体の運動で具体的な解が得られる場合に関しては、どれだけ研究が進んでいるのだろうか。実は 1700 年代のオイラーのエラスティカ理論以来、大きな進展は無いと言えるだろう。ここで見出された楕円関数の場合以上に広いクラスの解は見出されていない。それは 1900 年代に抽象化の道をたどった弾性論の宿命であろう。ここでは、ソリトンの枠組みに弾性論を入れ込むことで、ソリトンの解の構成方法から弾性論の解を見出すという新しい枠組みを以下に述べる。

### 2.1 弾性棒を表す基本量

3 次元空間内を運動する 1 次元弾性体を表す式について考えよう。弾性棒が伸びていないときの棒に沿ってつけたパラメータを  $\sigma$  とする。これは伸びが無いときには弧長  $s$  に一致するが、伸び

ているときにはもちろん異なる。この関係についてはまた後で考察する。時刻  $t$  において、断面中心の 3 次元空間における位置ベクトルは  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma, t)$  と表される。そしてこれは中立軸 (中立曲線) を表している。弾性棒を表す主役になる量は、この中立軸の位置ベクトル  $\mathbf{r}$  と断面を表す正規直交基底  $\mathbf{d}_k (k = 1, 2, 3)$  の計 4 つのベクトルである (図 1)。

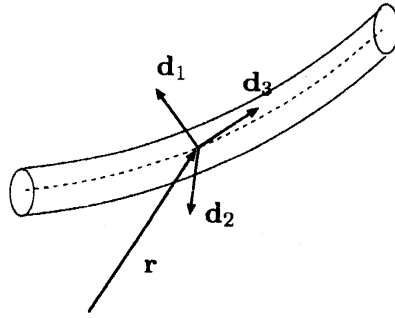


図 1: 1 次元弾性体を表す 4 つの基本ベクトル

断面を表す正規直交基底のうち、 $\mathbf{d}_1$  と  $\mathbf{d}_2$  は断面内にあるベクトルで 2 次元の断面を張っており、 $\mathbf{d}_3$  は断面に垂直な面である。そして、ここでは必ずしも断面は中立軸に垂直でなくてもよい。

次に 4 つの基本ベクトルの空間微分と時間微分を考えよう。これは、これから 1 次元弾性体の運動を考える上で必要になる重要な計算である。そして、閉じた形で表現するためには、微分した結果を再び基本ベクトルで表現するのがよい。

まず、一般的に空間微分は

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_k}{\partial \sigma} = \mathbf{u} \times \mathbf{d}_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2)$$

であり、時間変化は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{d}_k}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{d}_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (4)$$

と書くことができる。ただし新たに導入した 4 つのベクトル  $\mathbf{g}$ 、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\boldsymbol{\Omega}$  は基底  $\mathbf{d}_k$  を用いて

$$\mathbf{g} = g_1 \mathbf{d}_1 + g_2 \mathbf{d}_2 + g_3 \mathbf{d}_3 \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{d}_1 + u_2 \mathbf{d}_2 + u_3 \mathbf{d}_3 \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{d}_1 + v_2 \mathbf{d}_2 + v_3 \mathbf{d}_3 \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_1 \mathbf{d}_1 + \omega_2 \mathbf{d}_2 + \omega_3 \mathbf{d}_3 \quad (8)$$

と表す。ここで (1) は位置ベクトルの空間変化を表すので、 $\mathbf{g}$  は中立軸の「ひずみ」を表す。そして、 $g_3$  が垂直ひずみ、 $g_1$  と  $g_2$  がせん断ひずみに相当している。

次に (2) と (4) を外積を使わずに成分表示を用いるとそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書くことが出来る。(9) がいわゆるフレネー＝セレの関係式と言われているものである。そして  $u_1$  と  $u_2$  が曲げ曲率であり、 $u_3$  がねじれ曲率を表している。そして、(10) より  $\Omega$  は直交座標系の回転の角速度を表していることも分かる。ちなみに論文や文献では  $\mathbf{d}_k$  や  $u_k$  は

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{t} \quad (11)$$

$$u_1 = \eta, \quad u_2 = \kappa, \quad u_3 = \tau \quad (12)$$

という記号で書かれることが多い。となることが分かる。

## 2.2 可解条件

以上の式を利用して、 $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{d}_k$  に関する可解条件を考えよう。つまり、 $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{d}_k$  の運動は勝手に選べるのではなく弾性体の 1 次元性からくる制限条件を満足しなくてはならない。そして、これらが矛盾無く定義できるためには

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbf{r}(\sigma, t) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(\sigma, t) \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \sigma} \mathbf{d}_k(\sigma, t) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{d}{dt} \mathbf{d}_k(\sigma, t) \quad (14)$$

が成り立たなくてはならない。

(13) より、(1) と (3) を代入すればただちにひずみの時間変化に対する式

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} \quad (15)$$

が得られる。これを成分表示すれば、

$$\frac{dg_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial \sigma} - \omega_2 g_3 + \omega_3 g_2 + u_2 v_3 - u_3 v_2 \quad (16)$$

$$\frac{dg_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial \sigma} - \omega_3 g_1 + \omega_1 g_3 + u_3 v_1 - u_1 v_3 \quad (17)$$

$$\frac{dg_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial \sigma} - \omega_1 g_2 + \omega_2 g_1 + u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad (18)$$

となる。また、(14) より (2) と (4) を代入すると

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \times \mathbf{d}_k) = \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Omega \times \mathbf{d}_k) \quad (19)$$

となり、これをさらに変形すると曲率の時間変化に対する式

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \omega_l}{\partial \sigma} \mathbf{d}_l \quad (20)$$

が得られる。これもまた成分表示すれば、

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \sigma} - \omega_2 u_3 + \omega_3 u_2 \quad (21)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \sigma} - \omega_3 u_1 + \omega_1 u_3 \quad (22)$$

$$\frac{du_3}{dt} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma} - \omega_1 u_2 + \omega_2 u_1 \quad (23)$$

となる。以上、可解条件より  $\mathbf{g}$  と  $\mathbf{u}$  に関する発展方程式が得られた。逆に言えば、 $\mathbf{g}$  と  $\mathbf{u}$  はこれを満足するように変化しなくてはならない。

### 2.3 弧長とパラメータの関係

中立軸は一般に伸び縮みするわけであるが、その軸に沿った真の長さ、つまり弧長  $s$  とパラメータ  $\sigma$  との関係を求めよう。まず、(1) より

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad (24)$$

である。これより、 $\sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}}$  が、ベクトル  $\partial \mathbf{r} / \partial \sigma$  の大きさであることが分かる。 $\sigma$  は伸びが無いときにあらかじめ軸に書いた目盛であり、その目盛が単位長さ変化するときの  $\mathbf{r}$  の変化が  $\partial \mathbf{r} / \partial \sigma$  である。従って、区間  $d\sigma$  の真の長さは、 $\sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} d\sigma$  で与えられ、これが弧長  $ds$  の定義になる。つまり、

$$ds = \sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} d\sigma \quad (25)$$

である (図 2)。

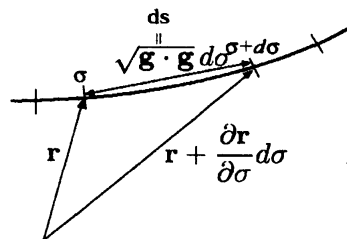


図 2: 弧長とパラメータ

また、(25) を積分すれば

$$s = \int^{\sigma} \sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} d\sigma'. \quad (26)$$

が得られる。これは  $\sigma$  より真の長さを計算する公式である。

次に、これまで書いてきた  $\sigma$  による微分を  $s$  による微分に書き直す時に必要になる公式を導こう。それは (25) より直ちに

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} \frac{\partial}{\partial s} \quad (27)$$

となる。しかしその際に注意するのは時間に関する微分は弾性棒が伸びる場合、全微分と偏微分を区別しなくてはならなくなる、ということである。まず、明らかに  $t$  による微分と  $\sigma$  による微分は可換であり、

$$\left[ \frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial \sigma} \right] \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{d}{dt} = 0 \quad (28)$$

が成り立つ。しかし弧長  $s$  は時間とともに各点で変化する量なので  $t$  と  $s$  による微分は可換でない。それは流体力学におけるオイラー微分とラグランジュ微分の関係に似ており、

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \quad (29)$$

となる。ただし、(26) より

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \int^{\sigma} \frac{1}{2} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}) d\sigma' \\ &= \int^s \frac{d}{dt} \ln \sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} ds' \end{aligned} \quad (30)$$

となる。これより、

$$\left[ \frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = - \left( \frac{d}{dt} \ln \sqrt{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} \right) \frac{\partial}{\partial s} \quad (31)$$

が得られる。

## 2.4 運動量 $\mathbf{P}$ と角運動量 $\mathbf{\Pi}$

本節では、前節までで得られた諸ベクトルの基本的な関係式を用いて、1次元弾性体の運動方程式を導こう。基本的な考え方は、弾性棒を「中立軸」と「断面」の運動に分けることである。これは剛体の力学で、その運動を重心運動と重心周りの回転運動に分けて考えることに似ている [1, 2]。

まず、棒のある断面  $A$  を考える。この断面の運動量  $\mathbf{P}$  と角運動量  $\mathbf{\Pi}$  が運動方程式を考える上で基本的な量になる。断面の運動量  $\mathbf{P}$  とは、断面を構成する棒の微小要素の運動量の総和であり、

$$\mathbf{P} = \int \int_A \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt} dX_1 dX_2 \quad (32)$$

で定義される。ただし積分は断面  $A$  全体にわたってとる。ここで、断面  $A$  上の任意ベクトル  $\mathbf{x}$  を断面中心  $C$  を原点として

$$\mathbf{x} = X_1 \mathbf{d}_1 + X_2 \mathbf{d}_2 \quad (33)$$

と表す。(図3)。

次に断面中心  $C$  まわりの角運動量  $\mathbf{\Pi}$  は

$$\mathbf{\Pi} = \int \int_A \rho (\mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt}) dX_1 dX_2 \quad (34)$$

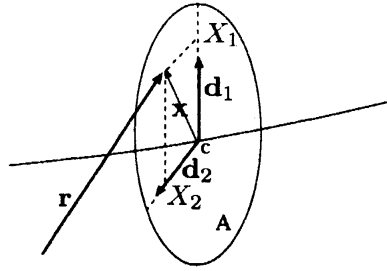


図 3: 断面上の位置ベクトル

で定義される。この積分は、これまで得られた公式を用いて具体的に計算することができる。断面形状は不変であることより  $X_1, X_2$  は時間  $t$  によらないことを考慮すると、(33) より

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= X_2^2 \omega_1 \mathbf{d}_1 + X_1^2 \omega_2 \mathbf{d}_2 + (X_1^2 + X_2^2) \omega_3 \mathbf{d}_3 \\ &\quad - X_1 X_2 \omega_2 \mathbf{d}_1 - X_1 X_2 \omega_1 \mathbf{d}_2 \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで、簡単のために断面  $A$  は円形断面としよう。こうすることによって積分の評価を簡単にすることができる。一般の断面への拡張は上記の積分評価をきちんと行うとともに、ワーピング現象を考慮しなければならない [2]。この扱ひも、各論に属するため本書では割愛する。また、棒の密度も各部分で均一で定数とする。

円形断面なので、 $X_1$  と  $X_2$  の積分範囲は同じであり、また中心  $C$  から見て全方位対称図形なので、(35) のうち、最後の 2 項は積分すればゼロになる。そして、断面 2 次モーメント  $I$  を

$$I = \int \int_A \rho X_1^2 dX_1 dX_2 \quad (36)$$

とおけば、最終的に角運動量  $\Pi$  は

$$\Pi = I \mathbf{d}_1 \times \frac{d\mathbf{d}_1}{dt} + I \mathbf{d}_2 \times \frac{d\mathbf{d}_2}{dt} \quad (37)$$

$$= I \omega_1 \mathbf{d}_1 + I \omega_2 \mathbf{d}_2 + 2I \omega_3 \mathbf{d}_3 \quad (38)$$

となる。また、以上の条件のもとでは運動量  $\mathbf{P}$  もさらに簡単になり、

$$\mathbf{P} = \rho Z \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (39)$$

である。ただし、 $Z$  は断面積であり、 $Z = \int \int_A dX_1 dX_2$  である。つまり、断面積の各部分の平均速度は、断面中心の速度に等しいのである。

## 2.5 運動方程式

以上の準備のもとに、特殊コッセラー理論の基礎方程式を導こう。棒の微小要素  $d\sigma$  に働く力とモーメントをそれぞれ  $\mathbf{n}(\sigma, t)$ ,  $\mathbf{m}(\sigma, t)$  とすると、力とモーメントのバランスの方程式はそれぞれ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \sigma} \quad (40)$$

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \times \mathbf{n} \quad (41)$$

となる (図 4)。

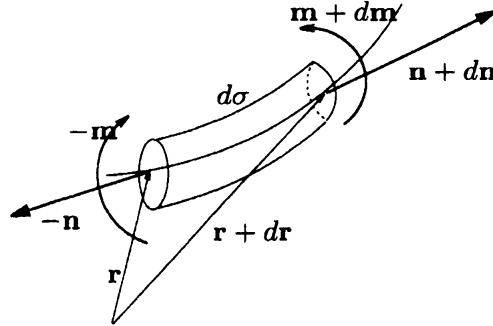


図 4: 応力とモーメントのバランス

(40)、(41) の左辺はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \rho Z \frac{d}{dt} (v_1 \mathbf{d}_1 + v_2 \mathbf{d}_2 + v_3 \mathbf{d}_3) \\ &= \rho Z \left( \frac{dv_1}{dt} - \omega_3 v_2 + \omega_2 v_3 \right) \mathbf{d}_1 + \rho Z \left( \frac{dv_2}{dt} + \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \right) \mathbf{d}_2 \\ &\quad + \rho Z \left( \frac{dv_3}{dt} - \omega_2 v_1 + \omega_1 v_2 \right) \mathbf{d}_3 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} &= I \mathbf{d}_1 \times \frac{d^2 \mathbf{d}_1}{dt^2} + I \mathbf{d}_2 \times \frac{d^2 \mathbf{d}_2}{dt^2} \\ &= I \left( \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \omega_3 \right) \mathbf{d}_1 + I \left( \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_1 \omega_3 \right) \mathbf{d}_2 + 2I \frac{d\omega_3}{dt} \mathbf{d}_3 \end{aligned} \quad (43)$$

となる。また右辺は

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{d}_1 + n_2 \mathbf{d}_2 + n_3 \mathbf{d}_3 \quad (44)$$

$$\mathbf{m} = m_1 \mathbf{d}_1 + m_2 \mathbf{d}_2 + m_3 \mathbf{d}_3 \quad (45)$$

とおけば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \sigma} &= \left( \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} - n_2 u_3 + n_3 u_2 \right) \mathbf{d}_1 + \left( \frac{\partial n_2}{\partial \sigma} + n_1 u_3 - n_3 u_1 \right) \mathbf{d}_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial n_3}{\partial \sigma} - n_1 u_2 + n_2 u_1 \right) \mathbf{d}_3 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \times \mathbf{n} &= \left( \frac{\partial m_1}{\partial \sigma} - m_2 u_3 + m_3 u_2 + g_2 n_3 - g_3 n_2 \right) \mathbf{d}_1 \\ &\quad + \left( \frac{\partial m_2}{\partial \sigma} + m_1 u_3 - m_3 u_1 - g_1 n_3 + g_3 n_1 \right) \mathbf{d}_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial m_3}{\partial \sigma} - m_1 u_2 + m_2 u_1 + g_1 n_2 - g_2 n_1 \right) \mathbf{d}_3 \end{aligned} \quad (47)$$

となる。したがって両辺で  $\mathbf{d}_i (i = 1, 2, 3)$  の係数を比較すると (42) と (46) より順に

$$\rho Z \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} + \rho Z (\omega_3 v_2 - \omega_2 v_3) - n_2 u_3 + n_3 u_2 \quad (48)$$

$$\rho Z \frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial n_2}{\partial \sigma} - \rho Z (\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3) + n_1 u_3 - n_3 u_1 \quad (49)$$

$$\rho Z \frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial n_3}{\partial \sigma} + \rho Z (\omega_2 v_1 - \omega_1 v_2) - n_1 u_2 + n_2 u_1 \quad (50)$$

となり、また (43) と (47) の比較によって

$$I \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\partial m_1}{\partial \sigma} - I \omega_2 \omega_3 - m_2 u_3 + m_3 u_2 + g_2 n_3 - g_3 n_2 \quad (51)$$

$$I \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\partial m_2}{\partial \sigma} + I \omega_1 \omega_3 + m_1 u_3 - m_3 u_1 - g_1 n_3 + g_3 n_1 \quad (52)$$

$$2I \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\partial m_3}{\partial \sigma} - m_1 u_2 + m_2 u_1 + g_1 n_2 - g_2 n_1 \quad (53)$$

が得られる。これらが速度ベクトル  $\mathbf{v}$  と角速度ベクトル  $\boldsymbol{\Omega}$  の成分の発展方程式を与える。

以上の基礎方程式の変数と式の数を調べてみよう。まず、変数の数は全部で 24 であり、すべて 3 次元ベクトルで

$$\mathbf{r}, \mathbf{d}_k, \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{u}, \mathbf{g}, \mathbf{n}, \mathbf{m}$$

である。ただし、 $\mathbf{d}_k (k = 1, 2, 3)$  は全部で 9 つの成分を持つが、その中で独立なものはオイラー角を考えれば分かる通り、3 つだけである。よって  $3 \times 8 = 24$  の独立変数がある。次に式の数であるが、全部で 18 本あり、それは発展方程式で上記の変数の始めの 6 つの時間変化を表す方程式である。具体的には

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{d}_k}{dt}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \frac{d\mathbf{g}}{dt}$$

がすべてこれまでに与えられている。そして、最後に  $\mathbf{n}, \mathbf{m}$  に対する 6 つの式が必要であるが、これが応力、モーメントの構成方程式である。構成方程式も独自の研究分野になっているが、最も良く使われる線形関係のみを仮定しよう。まず、超弾性体 (hyperelastic rod) を仮定し、

$$n_j = \frac{\partial W}{\partial g_i}, \quad m_j = \frac{\partial W}{\partial u_j} \quad (54)$$

となるポテンシャル  $W = W(\mathbf{g}, \mathbf{u})$  が存在するとする。さらに線形弾性体として

$$W = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{2} G_j (u_j - \hat{u}_j)^2 + \frac{1}{2} E_j (g_j - \hat{g}_j)^2 \right) \quad (55)$$

と選ぶ。ただし、 $\hat{u}_j, \hat{g}_j$  は平衡時の曲率やひずみの値であり、 $G_j, E_j$  は弾性定数である。以上より、 $j = 1, 2, 3$  に対して

$$n_j = E_j (g_j - \hat{g}_j) \quad (56)$$

$$m_j = G_j (u_j - \hat{u}_j) \quad (57)$$

となる。これが 6 つの構成方程式であり、 $\mathbf{u}$  は  $\mathbf{g}$  に、 $\mathbf{m}$  は  $\mathbf{u}$  に関連付けられた。



## 2.6 ソリトン方程式と厳密解

オイラーが見出したエラスティカは、現代の用語では楕円関数で表される解である。そして、ソリトン理論を適用することによりこのエラスティカの解を含む、さらに一般的な厳密解を求める手法について簡単に見てゆこう [3][4][5]。

そのもとになっている基本的な考えは、方程式系 (9) と (10) を **Lax** ペアとみなす、という事である。可解条件より得られる式はひずみ (メトリック) に関して (16)~(18) であり、また曲率に関しては (21)~(23) である。これらの非線形方程式が、ある場合にソリトン方程式に帰着できることを以下に示す。

まず、弾性体の仮定としてよく用いられる、「せん断力なし」の条件を取り入れよう。すると、

$$g_1 = g_2 = 0 \quad (58)$$

となる。そして見やすいように曲率は (12) のように書き直す。すると、メトリックに対する (16)~(18) は

$$0 = \frac{\partial v_1}{\partial \sigma} - \omega_2 g_3 + \kappa v_3 - \tau v_2 \quad (59)$$

$$0 = \frac{\partial v_2}{\partial \sigma} + \omega_1 g_3 + \tau v_1 - \eta v_3 \quad (60)$$

$$\frac{dg_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial \sigma} + \eta v_2 - \kappa v_1 \quad (61)$$

となり、また曲率に対する (21)~(23) は

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \sigma} - \omega_2 \tau + \omega_3 \kappa \quad (62)$$

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \sigma} - \omega_3 \eta + \omega_1 \tau \quad (63)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma} - \omega_1 \kappa + \omega_2 \eta \quad (64)$$

となる。

ここで、

$$v_3 = \frac{1}{2}\kappa^2, \quad v_1 = \kappa_\sigma, \quad v_2 = 0, \quad \eta = \tau = 0 \quad (65)$$

とおくと、運動は 2 次元平面内になり上記 (59)~(64) は 1 つの曲率の式にまとめることができ、その方程式は

$$\kappa_t = \kappa_{\sigma\sigma\sigma} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_\sigma \quad (66)$$

となる。これは変形 KdV 方程式といわれるソリトン方程式である。次に

$$\begin{aligned} v_3 &= -\kappa^2 - \eta^2, \quad v_1 = -2(\kappa_s + \tau\eta) \\ v_2 &= 2(\eta_s - \tau\kappa) \end{aligned} \quad (67)$$

とおき、橋本変換

$$\psi = (\kappa - i\eta) \exp(i \int \tau ds) \quad (68)$$

を通して新しい変数  $\psi$  を導入すると

$$\psi_t + 3|\psi|^2\psi_s + 2\psi_{sss} = 0 \quad (69)$$

が得られる。これは複素変形 KdV 方程式といわれる。また、速度成分を

$$v_3 = 0, \quad v_1 = \eta, \quad v_2 = \kappa \quad (70)$$

とおくと、橋本変換により曲率に対する方程式は

$$\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi = 0 \quad (71)$$

となる。これは非線形シュレディンガー方程式である。このように特別な  $\mathbf{v}$  を選ぶとソリトン方程式になり厳密な解析が可能になる。ソリトン方程式は可算無限個あり、このような  $\mathbf{v}$  の選び方も無限個あることをコメントしておく。

それでは、これらのソリトン方程式の解は、残り半分の弾性体の基礎式 (48)–(53) を満たすのか、という問題を考えてみよう。もしもそうなれば弾性論の厳密解がいくらかでも求められることになるが、実はこれは否定的であり、ある制限されたクラスの解のみが弾性論の基礎式を満たすことが分かる。それは、伝播解と見なすことの出来るクラスで、いわば 1 ソリトン解や楕円関数解および 2 ソリトン解の特殊な場合に相当する。その例として、(66) の 1 ソリトン解は

$$\kappa = 2a \operatorname{sech}(a(s + a^2)t) \quad (72)$$

であるが、曲げ剛性が弱いとするとこの解は

$$a^4 = \frac{E_3}{\rho}(1 + \varepsilon)\varepsilon \quad (73)$$

という条件で弾性論の厳密解になっていることが示せる。ただし、 $g_3 = 1 + \varepsilon$  であり、 $\varepsilon$  は定数である。これはループが紐を伝わる運動を表す。その他の例は複素変形 KdV 方程式の 0 ソリトン解で

$$\psi(s, t) = \kappa_f \exp(is\sqrt{\kappa_f^2/2 + v/2} + i(2\kappa_f^2 - v)t) \quad (74)$$

のように与えられる。これは曲率で書けば

$$\kappa = \kappa_f \cos c(s + vt) \quad (75)$$

$$\eta = \kappa_f \sin c(s + vt) \quad (76)$$

となる。ただし、 $c = \tau - \sqrt{\kappa_f^2/2 + v/2}$  であり、 $\tau$  や  $\kappa_f$  は定数である。この解も、

$$v = \pm \sqrt{\frac{E_3}{\rho Z} g_3 (g_3 - 1)} \quad (77)$$

$$G_2 c + (G_1 - G_2)\tau = 0 \quad (78)$$

という条件のときに弾性論を満たすことが分かる。これは螺旋波が紐を伝わる運動を表している。その他、オイラーのエラスティカの解は全てこのソリトン理論の枠組みの中に含まれることが示される。

### 3 交通流におけるオイラー＝ラグランジュ変換

もう一つの話題が交通流である。この研究の歴史は、工学サイドからのものは古くからあるが、数理物理サイドからの研究は近年の複雑系科学と結びついて大いに発展してきている。もっとも人が行動する原理は物理学の法則のような単純なもので記述されるわけではない。石ころと違って人には意思があり、自分自身の判断で動けるため慣性の法則や作用＝反作用の法則を一般に満たさない。このような意思を持った粒子を従来のニュートン粒子と区別して「自己駆動粒子」(self-driven particle) という [6]。そして自己駆動粒子の集団は、従来のニュートンの運動方程式を満たす多体系とは異なった様々な興味深い現象を示す。このような研究はここ十数年足らずの新しい分野であり、日本やドイツのグループを中心に活発に研究が行なわれている。私はこの研究を「渋滞学」と名づけた [7]。

この研究においては、粒子間の相互作用が心理的な要因に由来するものが多いため、その定量化は困難である。従って、現象論的な記述により対象の行動を単純にルールベースでモデル化して、その振る舞いを定性的に理解する方法が主な研究の方法であり、これまで様々な自己駆動粒子系のモデルが提案されてきた。現象を捉えたミニマムモデルとして、シンプルでかつ広範囲のモデルに応用できるものの一つに ASEP (非対称単純排除過程) があげられる。これは排除体積効果を持つ粒子系の最も単純な運動を表すモデルであり、かつ厳密に解ける可解確率過程である。この決定論的なモデルはルール 184 モデルといわれているものである。これは CA は Wolfram の ECA の一つであり [8]、ルールを物理的に表現すると以下の通りである。「道路をセルに区切り、車のいるセルを 1、いないセルを 0 で表す。進行方向を右向きにとり、車は前が空いていれば時間 1 ステップで 1 セル右に動けるとする。もしも前に車がなければ動けずその場にとどまる。」このルールをすべてのセルで同時に適用して時間更新してゆくという単純なものであり、セルの排他律だけを考慮している。

#### 3.1 拡張された交通流 CA モデル

次にルール 184 モデルの主な拡張について見てゆこう。

##### 3.1.1 スロースタートモデル

ルール 184 モデルに車の慣性の効果を入れたもので、一度止まった車は動きにくいことをルールに組み込むものである。代表的なものとして、一度停止した車は前が空いて動けるようになっても一度待ってから動き始める、とする「一回休み」のルールである。停止した車以外はルール 184 モデルと同じである。なお、このルールを初めて扱った高安らの原論文 [9] では、「停止した車の前の空きが 2 セルになったら動き始める」、と書いてあるが、これを文字通り解釈すると空きが 1 セルの間はずっと先に進まないことになり、高密度のとき不自然な動きになる。したがって、「一度停止した場合、前が空いても 1 時間ステップ待つ」と解釈した方が自然である。注目すべき点は、スロースタートルールを組み込むことで一様流れが不安定になる現象が出現したことである。この一様流不安定性は交通流の本質であり、自然渋滞の種になっていると考えられている。

##### 3.1.2 NS モデルとその周辺

ランダム性を取り入れた確率 CA への拡張は 1992 年に Nagel と Schreckenberg(NS) によって

なされた [10]。その時間更新ルールは 4 つのステップで構成される。ステップ 1 は加速過程で、もしも現在の速度が系の最高速度  $V_{\max}$  より小さい場合、なるべく早く移動したいという心理から速度を 1 増加させる。ステップ 2 は減速過程で、前の車との衝突を避けるために、もしもステップ 1 の後の速度が前の車との車間セル数を超えていれば、その速度を車間セル数まで落とす。ステップ 3 はランダム化と呼ばれ、各々の運転者は一般に個性があり加減速の仕方にばらつきがあると考え、確率  $p$  で今の速度を 1 下げる操作を全ての車についておこなう。ステップ 4 で以上の 3 ステップの後に得た新しい速度で車を移動させる。以上で時間 1 ステップになる。そして時間更新は、全ての車で同時に同期して行う。

### 3.1.3 BCA モデルとその周辺

最後に超離散化の方法を使った新しい CA モデルについてふれよう [11]。これは、Burgers CA (BCA) といわれ、一つのセルに 0, 1 だけでなく最大  $L$  までの整数が入ることができる多値モデルである。詳細は次節で述べる。ルール 184 CA は  $L = 1$  の場合であり、その多値拡張版になっている。この多値の物理的解釈は 2 つあり、一つは  $L$  車線をまとめて考えて粗視化したものであり、もう一つは 1 セルの長さを最大  $L$  台車が入る長さと考ええるものである。そのルールは、前のセルの空きに最大限移動するというものである。今のセルの位置を  $j$  とし、時刻  $t$  でのその位置のセルの数字を  $U_j^t$  と表すと、その先のセルの空きは  $L - U_{j+1}^t$  と表される。したがって、セル  $j$  からセル  $j+1$  にうつる車の台数は  $\min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)$  である。同様にセル  $j$  に入ってくる車の台数は  $\min(U_{j-1}^t, L - U_j^t)$  となるので、セル  $j$  の時間変化は

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (79)$$

と表される。この基本図はメタ安定は出ず、ルール 184 CA モデルと同じ 3 角形になる。BCA をメタ安定ができるように拡張したものが拡張 BCA (EBCA) である [12][13]。それは以下のようなルールである。まず、ルール 184 で 1 を動かす。そして「その動いた 1 の中で」さらに動けるものがあれば、もう 1 つ動かす。この新しいルールでは、実は時間 1 ステップで 2 つのセルを動ける車があり、ルール 184 の速度アップ版、と考えられる。あるいはドライバーの積極性を表現している、と考えても良い。そして、スロースタートルールを内包していることも示せる。

## 3.2 各モデルの関係

これまで様々な CA モデルの紹介をしてきたが、この章では他のモデルとの数理的な関係について考えてゆく。各モデルの特徴を考える上でモデル同士のつながりを明らかにするのは大変重要である。交通流モデルは大きく、1) 流体モデル (Burgers 方程式 [14] など)、2) 追従モデル (最適速度モデル [15] など)、3) CA モデルの 3 つに分けることができる。そしてこれらの関係であるが、まず、1) と 3) を超離散法によって、そして 2) と 3) を Euler=Lagrange 変換によって関連付けられるのを見てゆこう。

### 3.2.1 超離散法

最近、ソリトン理論の発展により、ソリトン方程式に対応した可積分 CA が見出された [16]。その際に、差分方程式から CA への変数変換の方法が新しく提案され、それを超離散法という。そ

して、この手法を用いてルール 184 モデルと Burgers 方程式とは密接な関係があることが明らかになった [11]。まず、Burgers 方程式は

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \quad (80)$$

である。これは武者らによって 1978 年に初めて交通流のモデルとして使われ、 $u$  は車の密度を表している。(80) は Cole-Hopf 変換  $u = f_x/f$  によって線形化できて、熱伝導方程式  $f_t = f_{xx}$  になることは良く知られている。さて、この CA を求めるわけであるが、まず第一ステップでは微分方程式を差分方程式にする。差分方程式でもこの線形化可能という構造を不変に保つために、まず熱伝導方程式から差分してゆく。それは

$$f_j^{t+1} - f_j^t = \delta(f_{j+1}^t - 2f_j^t + f_{j-1}^t) \quad (81)$$

としておこう。ただし、 $\delta = \Delta t / \Delta x^2$  であり、 $\Delta t$ 、 $\Delta x$  はそれぞれ時間、空間差分間隔である。次に、Cole-Hopf 変換の離散版として、 $c$  を定数として  $u_j^t = cf_{j+1}^t/f_j^t$  というものを考える。そしてこれを用いて式 (81) を  $u$  のみで表すと

$$u_j^{t+1} = u_j^t \frac{1 - 2\delta + \delta(\frac{c}{u_j^t} + \frac{u_{j+1}^t}{c})}{1 - 2\delta + \delta(\frac{c}{u_{j-1}^t} + \frac{u_j^t}{c})} \quad (82)$$

となる。これが時間・空間の差分されたバーガス方程式である。次にこれを CA に変換する。そのために従属変数を離散化する操作が必要であり、これが超離散と言われる手法である。まず、

$$u_j^t = \exp\left(\frac{U_j^t}{\varepsilon}\right), \quad \frac{1 - 2\delta}{c\delta} = \exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right), \quad \frac{1}{c^2} = \exp\left(-\frac{L}{\varepsilon}\right) \quad (83)$$

において、新たに小さい変数  $\varepsilon$  を導入し、さらに  $\delta, c$  の代わりに  $L, M$  を導入する。そして極限  $\varepsilon \rightarrow +0$  を考える。すると、超離散公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left( \exp\left(\frac{A}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right) \right) = \max(A, B) = -\min(-A, -B) \quad (84)$$

より、式 (82) は

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t). \quad (85)$$

となる。これが BCA である。もし  $M > 0$ 、 $L > 0$  で、かつ全ての  $j$  に対して  $0 \leq U_j^t \leq L$  ならば、全ての  $j$  に対して  $0 \leq U_j^{t+1} \leq L$  が成り立つことが示せる。つまり式 (79) は  $\{0, 1, \dots, L\}$  の  $(L+1)$  状態 3 近傍 CA と見なすことができる。また、式 (79) において、 $L = M = 1$  とおくと、0 と 1 の値をとる通常の CA になり、これがまさにルール 184 モデルになっていることが分かる。以上により、2 つの一見異なる交通流モデルの数理的關係が示された。そして  $M$  は全体的な流量制限 (ボトルネック) を表しているの、 $M \geq L$  とすれば  $\min$  の中で効いてくることは無いことが分かる。これが前節で述べた (79) である。

### 3.2.2 Euler=Lagrange 変換

次に (79) と最適速度モデルの関係について考える。最適速度モデルでは、自分の車の速度をそのときの車間距離で決まるある最適な速度に調整するように動かすものである。したがって車に注目したモデルであり、(79) は道路に注目したもので車の個別性はないモデルである。流体力学的に言えば、最適速度モデルは Lagrange 変数で表したモデルであり、上記 CA モデルは Euler 変数のモデルである。したがってこれらの変換を考えよう。まず、(79) における関数  $U$  を  $U_j^t = G_{L(j+1)}^t - G_{Lj}^t$  定義される  $G$  を用いて変換する。これを (79) に代入すると  $G$  に対する式

$$G_{Lj}^{t+1} = \max(G_{L(j-1)}^t, G_{L(j+1)}^t - L). \quad (86)$$

を得る。また、 $G$  の定義より、それは単調増加関数で  $U \neq 0$  のとき、つまり車が存在するときのみその値が 1 増えることが分かる。したがって  $G$  を

$$G_j^t = \sum_{i=0}^{N-1} H(j - x_i^t - 1) \quad (87)$$

とおくことが出来る。ここで  $H(x)$  はステップ関数であり、また、 $N$  は道にいる車の全台数である。変数  $x_i^t$  がいわゆる「Lagrange 変数」で、左から数えて  $i$  台目の車の時刻  $t$  における位置を表す。(87) を (86) に代入し簡単にすると Lagrange 変数だけの式に変形できて最終的に

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(L, x_{i+L}^t - x_i^t - L) \quad (88)$$

となることが示せる [17]。つまり、これが Lagrange 変数で書かれた BCA である。そして  $L = 1$  とすればもちろんルール 184 モデルのラグランジュ表現になっている。(88) を少し一般化して

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(V, x_{i+S}^t - x_i^t - S) \quad (89)$$

としよう。ここで  $V = S = L$  とすれば (88) に一致する。そして、 $V$  は系の最高速度、 $S$  は運転者の見通しという物理的な意味があることも分かる。ここでさらに最適速度モデルとの関連を考えよう。 $S = 1$  とした Lagrange 表現において両辺に  $-(x_i^t - x_i^{t-1})$  を加えると

$$x_i^{t+1} - 2x_i^t + x_{i-1}^t = \min(V, h_i^t) - (x_i^t - x_i^{t-1}) \quad (90)$$

となる。ここで  $h_i^t = x_{i+1}^t - x_i^t - 1$  は  $i$  番目の車と  $i+1$  番目の車との車間距離を表す。そして  $\Delta t \rightarrow 0$  の連続極限をとって適当なスケール変換をすれば

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \min(V, h_i^t) - \frac{dx_i}{dt} \quad (91)$$

が得られる。これはまさに OV モデルであり、最適速度関数は  $\min(V, h_i^t)$  という区分線形タイプ [?] のものが自動的に得られたことになる。ただし、ここで得られた OV モデルも感応度のパラメータが大きい場合に相当しており、一様流は安定なものに限られている。

## 参考文献

- [1] Antman, S. S., *Nonlinear problems of elasticity* (Springer, New York, 1995)
- [2] Coleman, B. D. and Dill, E. H., 1992, *Journal of the Acoustical Society of America*, **91** p. 2663.
- [3] Nishinari, K, *Proc. R. Soc. Lond. A.*, Vol.453 (1997) pp.817-833.
- [4] Nishinari, K, *ASME J. Appl.Mech.*, vol.65 (1998) pp.737-747.
- [5] Nishinari, K, *ASME J. Appl.Mech.*, vol.66 (1999) pp.695-701.
- [6] Chowdhury, D, Schadschneider, A and Nishinari, K, *Phys. Life Rev.* 2 (2005) pp.318-352.
- [7] 西成 活裕「渋滞学」新潮選書、2006
- [8] Wolfram, S., *Theory and applications of cellular automata*, World Scientific, Singapore, 1986.
- [9] Takayasu, M and Takayasu, H, *Fractals*, 1(1993), 860-866.
- [10] Nagel, K. and Schreckenberg, M., *Journal of Physics I France* 2(1992) 2221-2229.
- [11] Nishinari, K. and Takahashi, D., *Journal of Physics A: Mathematical and general*, 31(1998), 5439-5450.
- [12] Nishinari, K. and Takahashi, D, *Journal of Physics A: Mathematical and general*, 32(1999), 93-104.
- [13] Nishinari, K. and Takahashi, D., *Journal of Physics A: Mathematical and general*, 33(2000), 7709-7720.
- [14] Musya, T. and Higuchi, H., *Journal of Physical Society of Japan*, 17(1978), 811-816.
- [15] Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A. and Sugiyama, Y., *Physical Review E*, 51(1995), 1035-1042.
- [16] Tokihiro, T., Takahashi, D., Matsukidaira, J. and Satsuma, J., *Physical Review Letters*, 76(1996), 3247-3250.
- [17] Junta Matsukidaira and Katsuhiro Nishinari, *Physical Review Letters*, 90(2003) p.088701.