

## カオス力学系の不安定周期軌道の統計について

京都大学 数理解析研究所 斉木 吉隆<sup>1</sup> (Yoshitaka SAIKI)

山田 道夫<sup>2</sup> (Michio YAMADA)

Research Institute for Mathematical Sciences,  
Kyoto University

### 概要

近年, 流体乱流における研究において, 少数の周期の短い不安定周期軌道 (UPO) が乱流の統計量をよく近似するという報告がなされている. カオスアトラクタには無限個の不安定周期軌道が埋め込まれており, 短い周期軌道がカオス (無限長カオス軌道) の統計性質をよく近似するという事実は驚くべきものである. 本研究では, この性質の背景を考察するために, 低次元の連続カオス力学系であるローレンツ系とレスラー系の比較的短い周期をもつ不安定周期軌道を網羅的に検出して, それらの統計性質と有限長カオス軌道の統計性質との比較をおこなった. そして, 数値計算の範囲内では, 同じ程度の長さをもつ不安定周期軌道と有限長カオス軌道は大きく異なる統計性質をもち, 不安定周期軌道は同程度の長さをもつ有限長カオス軌道と比較してカオス (無限長カオス軌道) の統計性質を近似する確率が圧倒的に高いという結果を得た.

## 1 はじめに

カオス力学系は, 特に幾何学的アプローチにおいて, そのカオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道 (UPO) に注目した議論がしばしばなされてきた. 一方, 近年, 流体乱流の分野において, 短い周期をもつごく少数の不安定周期軌道を用いて乱流の統計性質や秩序構造を捉えることができるという報告がなされた. Kawahara and Kida [5] は, 幾分低いレイノルズ数ながらもナビエ・ストークス方程式によって記述されるクエット乱流に埋め込まれた短い不安定周期軌道を検出して, その軌道上の平均速度プロファイルなどがクエット乱流のそれに良く一致することを発見した. 一方, Kato and Yamada[4] は, 発達した乱流に関するシェルモデルの不安定周期軌道を発見し, 1本の軌道によって乱流のコロモゴロフ則や間欠性といった統計性質を再現できることを明らかにした. これらの研究では, 周期の短い少数の不安定周期軌道を用いて, カオスの統計性質を近似することに成功している. 一般にカオスアトラクタには無限個の不安定周期軌道が埋め込まれており, 直観的には, 周期の長い不安定周期軌道はカオスの統計性質を近似すると期待できるが, 周期の短い不安定周期軌道がこれほどまでにカオスの統計性質を反映するのは驚くに値する. 本報告では, 周期の短い不

<sup>1</sup>saiki@kurims.kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>yamada@kurims.kyoto-u.ac.jp

安定周期軌道がカオスの統計性質を反映しうる背景を探る目的で、カオス力学系から比較的大きい周期をもつものを含めて網羅的に検出された不安定周期軌道の統計量解析をおこなった。連続カオス力学系の例としてローレンツ系とレスラー系を採用して多数の不安定周期軌道を検出し、それら周期軌道上の時間平均量の考察をおこなった。

## 2 ローレンツ系

古典パラメタにおけるローレンツ系は非双曲系(特異双曲系)であるが、アトラクタには無限個の不安定周期軌道が稠密に埋め込まれている [8, 9]。ローレンツ系の不安定周期軌道はこれまでにいくつかの視点で研究されてきた。また, Franceschini et al.[3] や Viswanath[10, 11] は系統だった不安定周期軌道の検出をおこない, ローレンツ系の不安定周期軌道が適当なシンボルでラベリング可能であることも知られている。最近は, 詳細な分岐構造の解析もなされている [2]。本報告では, 周期軌道上で Nusselt 数という量の時間平均をとり, その分布を考察した。

ローレンツ系は以下で示す  $\mathbf{R}^3$  上の常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (3)$$

であり, 本報告では, 古典的なパラメタ  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$  [7] を採用した。後で用いる Nusselt 数は

$$Nu = 1 + \frac{2}{br}xy \quad (4)$$

で定義される。本解析では, 検出された各不安定周期軌道上の Nusselt 数  $Nu$  の時間平均  $\overline{Nu}$  に着目する。時間長  $T$  の不安定周期軌道とカオス軌道断片上の Nusselt 数  $Nu$  の時間平均  $\overline{Nu}$  は,

$$\overline{Nu} = \int_{t=0}^T Nu dt \quad (5)$$

である。

まず, ローレンツ系からニュートン・ラフソン・ミーズ法 [6] を用いて数値的に 1000 個以上の周期軌道を検出した。検出された周期軌道の周期は 1.558 と 14.431 の間である。本報告では周期軌道の周期として本来の実数値周期のほかに整数値周期  $N_T$  を用いる。これは,  $z = 27$  をポアンカレ断面に取った際のポアンカレ写

像周期であり、直観的には周期軌道がもつ渦数に対応している。図1は、検出された周期軌道の整数値周期  $N_T$  に対する個数をあらわしており、指数的な増大を示している [1]。以下の解析は、網羅的に検出されている整数値周期 13 までのものを用いた。なお、11 周期までの周期軌道は完全に網羅されている。図2は、整数値周期 13 までをもつ不安定周期軌道の時間平均 Nusselt 数  $\overline{Nu}$  をプロットしたものである。周期が長くなると多様な  $\overline{Nu}$  をもつ様な印象を受ける。そこで同じ整数値周期  $N_T$  をもつものでグループ分けを行なって、もう少し詳細な統計解析を行なう。図3は、同じ整数値周期  $N_T$  ( $6 \leq N \leq 13$ ) をもつ不安定周期軌道をひとつの集団とみなして、平均 Nusselt 数  $\overline{Nu}$  の出現頻度分布を描いたものである。これによれば、分布はカオス軌道の平均 Nusselt 数 ( $Nu = 2.682$ ) 付近にピークをもち、周期  $N_T$  によらず、ほとんど違いが見られないことが観察される。これを定量的に確認するために分布の標準偏差を計算したものが図4であり、図4ではさらに同じ程度のカオス軌道断片の平均 Nusselt 数  $\overline{Nu}$  の出現頻度分布の標準偏差を計算して比較している。この図によれば、軌道長が短い場合に、カオス軌道断片は、 $\overline{Nu}$  の散らばりも大きいのが、不安定周期軌道の場合には  $\overline{Nu}$  はある程度の散らばりでおさまっていることがわかる。すなわち、ローレンツ系の  $\overline{Nu}$  は、短い不安定周期軌道を用いることによって長い不安定周期軌道とほぼ同じ程度の確率でカオス軌道の Nusselt 数を近似する、もしくは近似しないということの意味している。なお、この結果は軌道長が短くとも、カオス軌道断片は相空間のさまざまな部分を通り得るが、不安定周期軌道の場合には、そうではないことを示唆している。

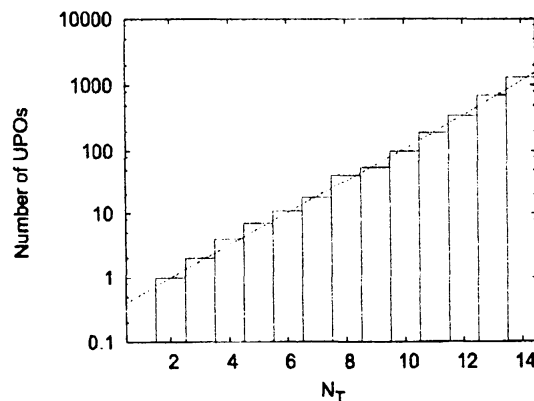


図1: 検出された整数値周期  $N_T$  ( $1 \leq N_T \leq 14$ ) の不安定周期軌道 (UPO) の数 (周期に対して指数的な増大を示している)

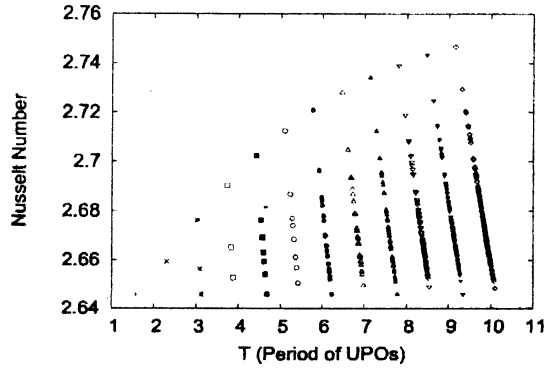


図 2: 検出された不安定周期軌道 (UPO) ( $2 \leq N_T \leq 13$ ) の平均 Nusselt 数  $\overline{Nu}$  (但し, カオス軌道の  $\overline{Nu}=2.682$ )

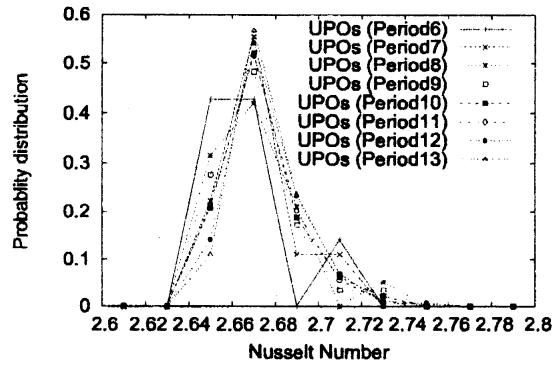


図 3: 整数値周期  $N_T$  ( $6 \leq N_T \leq 13$ ) をもつ不安定周期軌道 (UPO) の平均 Nusselt 数  $\overline{Nu}$  の出現頻度分布 (刻み幅は 0.02) ( $N_T$  に依らず, ほとんど同じ様な分布をもつ)

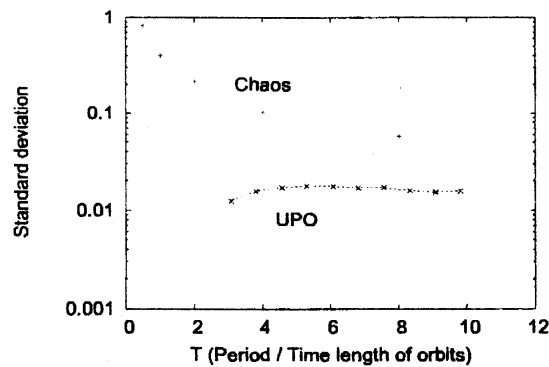


図 4: 軌道長  $T$  の  $10^6$  本のカオス軌道断片の平均 Nusselt 数  $\overline{Nu}$  の出現頻度分布の標準偏差 (軌道長  $T$  のカオス軌道断片の  $\overline{Nu}$  の標準偏差は  $T^{-0.8}$  のペースで減衰) と不安定周期軌道 (整数値周期  $N_T$  ( $4 \leq N_T \leq 13$ )) に関する出現頻度分布 (図 3) の標準偏差 (複数の整数値周期  $N_T$  の周期軌道のうち代表的な周期を用いてプロット) の比較

### 3 レスラー系

レスラー系に対してもローレンツ系と同様の解析をおこなった。まず、 $R^3$  上常微分方程式系であるレスラー系

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ry, \quad (7)$$

$$\frac{dz}{dt} = r + xz - sz \quad (8)$$

( $r = 0.2, s = 5.7$ ) から整数値周期で周期 16 までの周期軌道を網羅的に求めた。周期に対して検出された周期軌道の個数は指数的に増大している (図 5)。そして、検出された個々の周期軌道上で  $x$  変数に関する時間平均値 ( $\bar{x}$ ) をローレンツ系の場合と同様に計算して、周期に対してプロットした (図 6)。ローレンツ系の場合と同様で、周期が長くなると一見、 $\bar{x}$  は多様な値をとる印象を受ける。そこで周期軌道を同じ整数値周期  $N_T$  をもつものでグループ分けを行なって、もう少し詳細な統計解析を行なう。図 7 において、軌道長 (整数値周期)  $N_T = 12$  の不安定周期軌道と  $10^6$  本のカオス軌道断片の  $\bar{x}$  の分布を比較しているが、それぞれの分布は大きく異なることがわかる。図 8 では、分布を定量的に比較しており、軌道長 (整数値周期  $N_T$ ) を変えて、それぞれの分布の分散を比較している。この計算結果もローレンツ系の場合と同様に、軌道長が短い場合に、カオス軌道断片は、 $\bar{x}$  の散らばりも大きいですが、不安定周期軌道の  $\bar{x}$  は比較的小さな散らばりでおさまっていることがわかる。

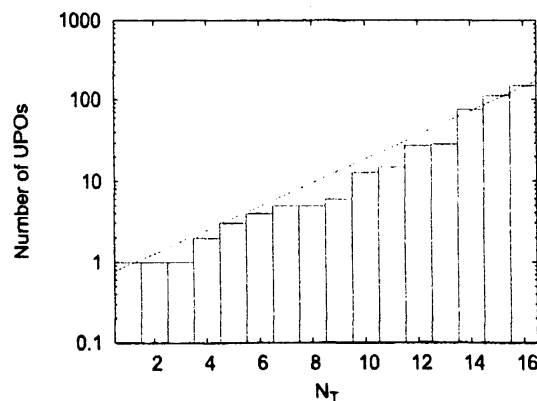


図 5: 検出された不安定周期軌道 (UPO) ( $1 \leq N_T \leq 16$ ) の個数 (周期に対して指数的な増大を示している)

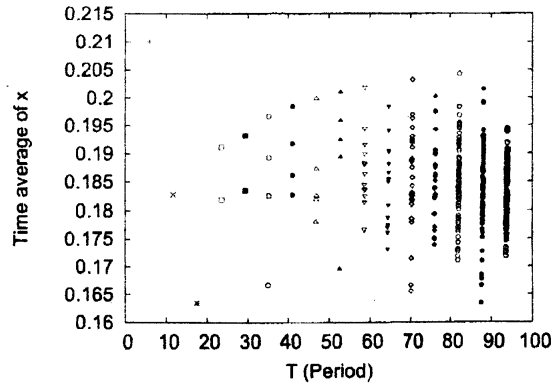


図 6: 検出された不安定周期軌道 (UPO) ( $1 \leq N_T \leq 16$ ) の  $x$  変数の時間平均 ( $\bar{x}$ )

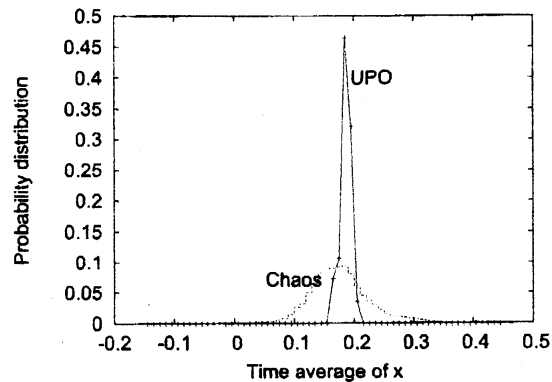


図 7: 整数値周期  $N_T$  が 12 である不安定周期軌道 (UPO) と同等の長さのカオス軌道断片の  $x$  変数の時間平均 ( $\bar{x}$ ) の出現頻度分布 (横軸刻み幅 0.01) (両者の分布は、ほぼ同じところにピークをもつものの大きく異なる)

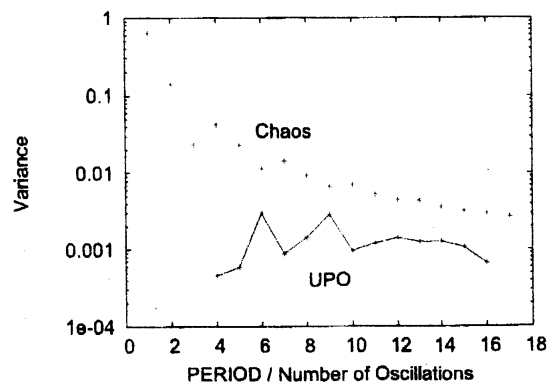


図 8: 整数値周期 (軌道長)  $N_T$  の周期軌道と  $10^6$  本のカオス軌道断片の  $x$  の時間平均 ( $\bar{x}$ ) の出現頻度分布の分散の比較

## 4 まとめ

本報告では、まずローレンツ系に埋め込まれた 1000 個以上の比較的短い周期をもつ不安定周期軌道を網羅的に検出して、時間平均 Nusselt 数という量に着目して統計解析をおこなった。数値計算の範囲内では、不安定周期軌道の平均 Nusselt 数は、同じ程度の長さをもつカオス軌道断片に比べて、軌道長が短い場合にも散らばりが遥かに小さく、カオスの長時間平均値を近似する傾向にあることがわかった。また、不安定周期軌道をポアンカレ写像周期で分類して、平均 Nusselt 数の出現頻度分布を見ると、ほとんど変化が見られないことが確認された。また、同様の解析をレスラー系に対してもおこない、ローレンツ系の場合と同種の性質を示すことを確認した。本報告で紹介したローレンツ系、レスラー系のほかに景気循環モデルなど、複数の連続力学系において同様の性質が確認されており、これはある程度、普遍的な性質であることが予想される。今後は、この性質がどういった力学系に対して成り立つのか、また、無限に存在する不安定周期軌道がアトラクタにおいてどのように配置しているためにこの性質が生み出されるのかということを探りたい。

## 参考文献

- [1] Bowen, R., *Topological entropy and Axiom A, Global Analysis* (Berkeley, CA, 1968) *Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** AMS, Providence, RI (1970) 23–41.
- [2] Doedel, E. J., B. Krauskopf, H. M. Osinga, *Nonlinearity*, **19** (2006), 2947–2972.
- [3] Franceschini, V., C. Giberti and Z. Zheng, *Nonlinearity*, **6** (1993) 251–258.
- [4] Kato, S. and M. Yamada, *Phys. Rev. E*, **68** (2003) 25302–25305.
- [5] Kawahara, G. and S. Kida, *J. Fluid Mech*, **449** (2001) 291–300.
- [6] Saiki, Y., *Nonl. Proc. Geophys.* **14**, 615–620 (2007)
- [7] Sparrow, C., *The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attractors.* (Applied Mathematical Sciences, Vol.41), Springer-Verlag (1982).
- [8] Tucker, W., *C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. I Math.*, **328**, 1197–1202 (1999)
- [9] Tucker, W., 14th problem, *Found. Comput. Math.*, **2**, 53–117 (2002)
- [10] Viswanath, D., *Nonlinearity*, **16** (2003) 1035–1056.
- [11] Viswanath, D., *Physica D*, **190** (2004), 115–128.