数理解析研究所講究録
第 1608 巻 2008 年 14-25

オイラーの方程式導出と流体運動のゲージ理論

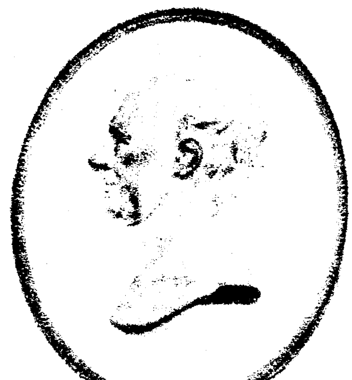
陳省身数学研究所（中国、天津）
神部　勉　（Tsutomu Kambe）
Chern Institute of Mathematics
南開大学（Nankai University）

本稿を書くに当って，まず最初にその問題意識を提示すると，(1) 質点力学の微分形･運動方程式を最初に書いたのは一体誰だったのか？ (2) オイラーの流体力学方程式は、質点の運動方程式と類似の形をしている．その歴史的背景はどのようなものであったのか？ (3) 流体力学でオイラー方程式を導く従来の変分原理は完全とはいえない点がある．そこで、ゲージ原理を基礎とする新しい流体変分原理を提案する．Part I では、オイラーの流体方程式とその導出に至る過程のレビューであるが、オイラーは自ら導いた運動方程式が回転性（ゼロでない渦度）の流れを記述することを述べている．Part II では、同じ側面を現代的視点でみて、流体方程式を再構成する定式化について述べる．　　　LEOO= Leonhard Euler, Opera Omnia (オイラー著作全集).

Part I: オイラーの力学と流体力学

1. 科学史からみた運動方程式

現代の解析的な力学の淵源はレオナード・オイラーにあると言っても過言ではないであろう。18世紀にオイラーがなしとげた力学の革新はこれまで過小に評価されてきた。それに加えて、オイラーは流体の‘運動方程式’および‘連続の方程式’を導出した。それは今から約 250 年前であった。現在でも同じ方程式が研究の最前線で使われているという事実は、オイラーの洞察の深さを示すものであろう。注目すべきなのは、質点力学の運動方程式と流体力学の運動方程式とが同じ形で表現されていることである。20 世紀になってからの科学史研究者[1,2]の努力が実って、“それが何故なのか“、その辺の関連性が見えてきた。それは、質点の運動方程式を 3 次元デカルト座標系の微分方程式の形で最初に書いたのがオイラーであったことと関係がある。この辺りのことは物理学者の間でもあまり認識されてないかもしれない。そのため、運動方程式の科学史をまず簡単に振り返ってみたい。その後で、オイラーが提出した流体の連続の式と運動方程式について述べることにする。



写真：　Leonhard Euler　（名前の下に Medaillon execute par Dominique Rachette, 1781 とある）.［LEOO, Ser.II, vol.12 の巻頭］

3 次元の (x,y,z) ユークリッド空間で質量 m の質点に力 (X,Y,Z) が作用しているとする。時刻 t での質点の位置を $(x(t),y(t),z(t))$ とすると、質点力学では運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X(x,y,z),\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y(x,y,z),\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z(x,y,z) \qquad \text{(A)}$$

と書かれる。これがニュートン力学の運動方程式であり、時間tを独立変数とする 2 階の連立常微分方程式系であることはいうまでもない。ところが、ニュートンの著した「プリンキピア」(1687)の運動の法則 II は文章のみで書かれている。それは、“運動の変化は、及ぼされる駆動力に比例し、その力が及ぼされる直線の方向に行われる.”と訳されている。プリンキピアの力学問題の解はほとんどが幾何学的で、微分方程式は何処にも見当たらない（ニュートンは微小だが有限の時間変化を暗に想定していた)。それでは、いつ、誰が上の形の微分方程式を書いたのであろうか？文章による第II法則から、上の微分方程式の形に至るまでに、歴史的には数十年がかかっている。この辺りの歴史的経緯については、山本義隆氏が「ニュートンの力学」と「ニュートン力学」、あるいは順ニュートン問題と逆問題などと共に文献[3]に詳述している。ニュートンの主著（通称プリンキピア）は「自然哲学の数学的原理」と訳される。いうまでもなく、万有引力に支配される惑星系と地上物体の運動とを統一的に記述した著作である。自然哲学の意味するところは、「事物の現象するところから神意に及ぶのは、まさしく自然哲学である」と理解されている。プリンキピアのこのような神学的な衣を剥いで、古典力学あるいは現在の自然科学に通ずる力学の微分方程式(A)を提示したのがオイラーであった。本研究会でも山本義隆氏が「オイラーの力学」というタイトルで、その科学史をレビューしている[4].

トルースデルは科学史文献の詳細な分析の結果、1960 年の論文[1]で「微分方程式で表された最初のニュートンの運動方程式は、1750 年のオイラーの論文[6]で提示された」と結論づけている。オイラーは 1736 年の論文[5]で,「私がニュートン の‘プリンキピア’や ヘルマンの‘ホロノミア（運動学)’を学んだとき、たとえ多くの問題の解法を十分に理解したと思っても、それらとわずかにしか異ならない問題でも、その解を自分で得ることが出来なかった」と書いている[3]。ニュートンの運動学は汎用性が十分でなく、それは幾何学的解法に原因があることを暗に述べ、新たな運動の解析学を提案したわけである。

2. オイラーの新力学

力学の歴史で重要なのは、質点の概念である。それを明確にしたのはいったい誰であったかというと、オイラーであった。それは最初の解析力学の論文といわれる 1736 年の論文[5]にあるという。質点に対する運動方程式を 3 次元デカルト座標で微分方程式として最初に発表したのは、1747 年の「天体の運動一般の研究」であったという[4]. 20 世紀初期の文献では、質点概念が物体の運動法則を確立させ、‘古典力学をして古典力学たらしめた要素’と認識されていたが、それが誰によるのか、その時でも関心をもたれていなかった。

オイラーは、‘無限に小さくて、その全質量が一点に集中した物体’を定義し、その質量をmとし、そのような質点がなんらかの力を受けて運動する場合の微分方程式を提出した。質点には進行運動以外の運動（回転などの内部運動）はないと想定されている。このような質点を物体の構成要素として、質点・剛体・流体のすべてにわたる力学の基本原理として，1750 年の論文「力学の新原理の発見」[6]では、その方程式を次の形に書いている：

$$m\,ddx=P\,dt^2,\qquad m\,ddy=Q\,dt^2,\qquad m\,ddz=R\,dt^2 \qquad \text{(B)}$$

（原論文では、mは$2M$と書かれている。それは当時の特殊な単位系によると解釈されている[4].）これはもちろん方程式(A)と同等である。

18 世紀の前半では、運動の方程式は軌道の接線方向とそれと直角の法線方向に分解して書かれるのが普通であった。これは質点の運動の記述には適していても、剛体や流体などの連続体の運動の記述にはむいていない。しかし新たに提出されたデカルト座標系のこの 3 成分の運動方程式(B)には発展性があった。ここに流体力学でいうオイラー的記述の芽生えが見られる。

オイラーは方程式(B)を力学の基本原理の方程式と考えた[1, 6]。ニュートンのプリンキピアに新たな概念を加えたと考えたからである。それは次の三点にある。(I) 方程式(B)は精密に定義された質点に対して適用される。プリンキピアでは、曖昧に定義された物体に対する法則であった。(II) 任意の軌道に対して、加速度を座標の時間 2 階微分として明確に定義した。プリンキピアでは、運動の変化として言語で定義されていた。(III) 平行四辺形の合成則に従うベクトルの概念が、力だけではなく、等式(B)によって加速度、速度、位置座標にも拡張され、一般化された。成分表示なら平行四辺形の合成則と言わずに、単に成分間の和ですむ。この(III)は後のラグランジュの変分原理につながる幾何学的に重要な進一歩である。実は力学の最小作用の原理を最初に定式化したのもオイラーであり[3, 4]、自身でも“将来必ず、物体の運動と平衡の理論の土台として認識されるであろう”と述べている[2, 8].

方程式(B)に従えば、運動の第 1 法則の慣性の法則は、力 (X, Y, Z) がゼロの特別の場合として、単に方程式の積分から得られる。しかし、現代物理学の視点に立てば、第 1 法則は‘慣性の法則が成立する系が存在する’という原理として見直される。

3. オイラーの流体力学

オイラーの流体力学が歴史的な意味で成功したのは、流体の連続性と圧力の概念を明確に把握し、一般性のある法則を方程式の形で確立した点にある[8]。当時でも、物質が微小な粒子(corpuscles) から構成されているという考えはあったが、物理学的には成功していなかった。原子・分子の存在が物理的に実証されるのはずっと後、100 年以上も後のことである。当時のあいまいな粒子構造の概念の弱点を認識して、むしろ理想・抽象化した連続性の概念に立脚する道を選んだ。流体が連続性を保って運動するときに満足しなければならない連続の式を導いたが、それは偏微分方程式の形で表現された。質点の運動方程式は常微分方程式であるから、これは新タイプの法則であった (最初に連続の式を導いたのはダランベールだったと言われている)。また空気のような圧縮性のある流体にも適用されるので、general principle と称した。

流体力学的に大変重要と思われるのは、圧力に現代的な定義を与えたことである[2, 8]。静止状態の流体の性質を次のように規定している。“ある体積の流体が平衡にあるとしたら、その表面のすべての点で、その面に垂直でかつ等しい力が作用している。”これこそ現在の圧力の定義そのものである。もし流体が微小な無数の粒子(固体の corpuscles) から構成されているとしたら不安定であろうと推論している。流体の性質を物質構造からではなく、その中の圧力の性質によって規定したところに卓見があった。面積 a^2 の微小な面に作用する力を pa^2 で定義して、この圧力 p の概念によって、容器の壁に作用する力、流体中に潜在する固体表面に作用する力が決められる。さらに、もし密度 ρ を圧力の関数として知るならば各点で密度が求まる、と述べている。ここに、重力、中心力の他に、圧力の概念が導入され、質点の方程式と併せて、流体の運動方程式への道が開かれた。

(a) オイラーの連続の式

流体の運動に目を転じよう。連続の式は質量保存の式とも呼ばれる。3 次元ユークリッド空間で流体が運動しているとして、その速度が(u, v, w)とする。流体の中に微小な体積 Vを考える。

密度を q とすると、Vの中の質量は積 qV である。わずかな時間 dt の後には体積 Vは移動してV' になろう。それに応じて密度 q も q' に変化し、質量は $q'V'$となる。質量は不変であるべきことを偏微分方程式の形で表したのが連続の式である。さらに運動がいかなるものであろうとも満足されなければならない条件として、'流体は連続性を保つ（すなわち間隙がない）' ことを要請する。このような前提で、オイラーは次の偏微分方程式を導いた[2, 6, 8]：

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{dqu}{dx}\right)+\left(\frac{dqv}{dy}\right)+\left(\frac{dqw}{dz}\right)=0 \qquad \text{(C)}$$

現在では、(dq/dt)などの 4 項はすべて偏微分記号で書かれるが、当時はまだ $\partial/\partial t$ 等の記号は使われておらず、その代わり( )の記号で表されていた。密度 q が一定の場合は、連続の式は

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0 \qquad \text{(D)}$$

となる。

(b) オイラーの運動方程式

流体力学の運動方程式は、1755 年の論文[9]で(出版は 1757) 最終的に示された。現代的な意味で重要なのは、その方程式が渦度のある回転性の運動をも記述できることを示したことである。上で定義した微小体積 Vの質量は $m=\rho V$である。これを流体粒子と呼ぶことにしよう。この粒子に重力のような質量に比例する外力と、圧力のような表面積に比例する流体内の力が作用する、とするのがオイラーの着眼点である。前者は単位質量当り $F=(P, Q, R)$と表す。さらに、粒子の表面に周囲から圧力がはたらく。それを Gで表わす。オイラーの運動方程式は、流体粒子を質点のようにみて、

$$m\vec{A}=\vec{\mathrm{G}}+m\vec{F} \qquad \text{(E)}$$

の形のニュートン力学の運動方程式で表わされる（Aは流体粒子の加速度）。オイラーの着眼点は、この方程式が流体内部の各点で成り立つとすることにある。流体粒子の加速度の x 成分A_xが次のように与えられることである：

$$A_x=\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right). \qquad \text{(F)}$$

次に流体圧力による作用は、x, y, z各軸に垂直な面を有する 3 辺が $\Delta x, \Delta y, \Delta z$の直方体で考察する。$x$ 軸に垂直な左右の面に作用する圧力の差から、x 軸の方向に作用する力の合力 G_xは

$$G_x=-\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{dp}{dx}\right)=-\frac{m}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) \qquad (\Delta x\Delta y\Delta z=m/q)$$

となる。従って、運動方程式の x 成分は,

$$m A_x=-(m/q)(dp/dx)+mP \qquad \text{(G)}$$

となる. 式(F)を使い、共通因子の m をとりさると、

$$\left(\frac{du}{dt}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)=-\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)+P \qquad \text{(H)}$$

を得る。まったく同様に、運動方程式の 成分も書ける。

これらがオイラーが書いた方程式であり、式 (B), (C), (D), (H) は、オイラーの論文にある形そのままである。記号 ( ) のついた微分を偏微分記号で書けば、今でもまったく同じ形が使われている。

(c) ダランベールの原理

質点の運動方程式が、静止慣性座標系 K で、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}^{(ext)},$$

と書けるとする。左辺の項を右辺に移すと、

$$0=\boldsymbol{F}^{(ext)}-m\ddot{\boldsymbol{r}},$$

となる。これはしばしばダランベールの原理と呼ばれ、運動方程式は静止系の平衡の式と同等であるとされる。しかしこれには別の見方も可能である。というのは、質点が静止している運動座標系 K' では、質点は相対的に静止で加速度ゼロなのに対し、加速系 K' では見かけの力 $-m\ddot{\boldsymbol{r}}$ が作用し、右辺第 2 項はその見かけの力であると説明できるからである。従って、この式はやはり運動方程式とみることができる。ゲージ原理では、物理法則は座標系によらないと主張するので、ダランベールの原理は、実はゲージ原理の別の言い方であると解釈することができる。

オイラーの運動方程式 (G) は、このような座標系によらない性質を暗にもつ（実際、座標変換によって示せる）だけでなく、それが空間の各点で成立している。これは、ゲージ理論では局所不変性とよばれる性質である。すなわち、オイラーの運動方程式 (G) は、ゲージ原理の性質を満たしているのである。このことが 250 年の歳月にもかかわらず、物理学で通用する由縁といえよう。

Part II: Gauge principle による変分原理

従来の流体変分原理は完全とはいえないところがある。というのは Euler 的変分では、一様エントロピーの場合、速度場が irrotational となってしまうからである。そこで、ゲージ原理を基礎とする流体変分原理をここに提案して [10, 11, 12]、批判をあおぎたいと思う。

4 a-空間の方程式

4.1 ラグランジュ関数

まず初めにラグランジュ粒子座標 $\boldsymbol{a}=(a^1,a^2,a^3)=(a,b,c)$ で表現されたラグランジュ関数の変分問題を考察しよう。独立変数は $a^\mu=(\tau,a^1,a^2,a^3)$ と書いて、μ は 0,1,2,3 の値をとり, a^0 はラグランジュ座標と組みになった時間変数 $\tau(=t)$ を表す。対応する物理空間座標（オイラー座標）は $\boldsymbol{x}=(x,y,z)=(x1{\cdot}x^2,x^3)$ と書き、時間は t とする。粒子 $\boldsymbol{a}$ の物理空間の位置座標を $X^k(a^\mu)$, あるいは $(X^k)=(X,Y,Z)$ などで表す。粒子速度は $v^k=\partial_\tau X^k$, あるいは X_0^k で与えられる。

ラグランジュ座標は, $\mathrm{d}^3\boldsymbol{a} = \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c$ が体積要素 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ の中の質量 dm を表すように定義する. すなわち $dm = \mathrm{d}^3\boldsymbol{a} = \rho\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ (ρ は密度). 質量要素は運動の不変量なので、

$$\partial_\tau(\mathrm{d}m) \equiv \partial_\tau(\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}) = 0\,. \tag{1}$$

が常に満たされければならない. $dm = \mathrm{d}a\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}c = \rho\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z$ の関係から、密度が

$$\rho = \frac{1}{J}, \qquad J = \frac{\partial(X^1, X^2, X^3)}{\partial(a^1, a^2, a^3)} = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(a, b, c)}\,. \tag{2}$$

と表される。J は $\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{x}$ 変換の Jacobian である。

完全流体は、運動エネルギーの散逸のない流体として定義される。したがって、単位質量当りのエントロピーを s とすると、$s = s(a, b, c)$ と表せて、エントロピー不変の式、

$$\partial_\tau\, s = 0\,. \tag{3}$$

が成り立つ。熱力学より、流体の内部エネルギー、エンタルピーをそれぞれ単位質量当り、ε, h とすると、密度変化 $\delta\rho$, δh に対する、それらの変化は、

$$\delta\epsilon = (\delta\epsilon)_s = \frac{p}{\rho^2}\,\delta\rho, \quad (\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho})_s = \frac{p}{\rho^2}, \quad \delta h = \frac{1}{\rho}\delta p, \tag{4}$$

で与えられる。ここで p は圧力、エンタルピーの定義は $h = \epsilon + p/\rho$、また $(\cdot)_s$ は s 固定の微分を表す。

このような流体の運動の Lagrange 関数 L, 作用積分 I は次のように与えられる $(k, l = 1, 2, 3)$:

$$\Lambda_{\mathrm{T}} = \int_{M_a} \tfrac{1}{2}\, X_\tau^k\, X_\tau^k\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a} - \int_{M_a} \epsilon(\rho, s)\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}\,, \tag{5}$$

$$I \;=\; \int L(X_\mu^k)\, \mathrm{d}^4 a, \qquad \mathrm{d}^4 a = \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}, \tag{6}$$

$$L(X_\mu^k) = \tfrac{1}{2}\, X_0^k\, X_0^k - \epsilon(X_l^k, a^k). \tag{7}$$

最後の式の $\epsilon(X_l^k, a^k)$ は、$\epsilon(\rho, s)$ の ρ 依存性が X_l^k で、s 依存性が a^k で表されている。

4.2 オイラー・ラグランジュ方程式

式 (7) のラグランジュ関数 L から、次のオイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial}{\partial a^\mu}\Big(\frac{\partial L}{\partial X_\mu^k}\Big) - \frac{\partial L}{\partial X^k} = 0, \qquad X_\mu^k = \frac{\partial X^k}{\partial a^\mu} \tag{8}$$

が導かれ、さらに次のエネルギー運動量テンソル T_μ^ν が定義できる [12]：

$$T_\mu^\nu \equiv X_\mu^k \Big(\frac{\partial L}{\partial X_\nu^k}\Big) - L\, \delta_\mu^\nu\,, \tag{9}$$

ただし、$k = 1, 2, 3$. これを使って、ネーサーの定理は次のように表せる：

$$\frac{\partial}{\partial a^\nu}\, T_\mu^\nu = 0\,. \tag{10}$$

(***a***) $\mu \neq 0$ ($x^\mu = \alpha$) に対しては、保存方程式 $\partial_\nu T^\nu_\mu = 0$ は次の運動量方程式に帰着する：

$$\partial_\tau V_\alpha + \partial_\alpha F = 0 \quad (V_\alpha \equiv X_\alpha X_\tau + Y_\alpha Y_\tau + Z_\alpha Z_\tau), \tag{11}$$

ここで、$F = -\frac{1}{2}v^2 + h$. 他の2つの方程式は、α を (a, b, c) の順置換で置き換えて得られる。τ について上式を0から t まで積分すると、次の Weber の変換 [13, §15]:

$$V_\alpha(\tau) \equiv X_\alpha X_\tau + Y_\alpha Y_\tau + Z_\alpha Z_\tau = V_\alpha(0) - \partial_\alpha \chi, \tag{12}$$

$$\chi = \int_0^t F\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t (-\tfrac{1}{2}v^2 + h)\mathrm{d}\tau. \tag{13}$$

式 (11) の V_α は $\boldsymbol{a}$-空間に変換された速度である (5.1 節). 初期値 $V_\alpha(0, \boldsymbol{a})$ および $h(0, \boldsymbol{a})$ ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$) に対する、その時間発展が式 (12), (13) で与えられる。

(***b***) $\mu = 0$ に対しては, つぎのエネルギー方程式を得る：

$$\begin{aligned} \partial_\tau H \;&+\; \partial_a\Big[p\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(\tau,b,c)}\Big] + \partial_b\Big[p\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(a,\tau,c)}\Big] \\ &+\; \partial_c\Big[p\frac{\partial(X,Y,Z)}{\partial(a,b,\tau)}\Big] = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

ここで、$H = \frac{1}{2}v^2 + \epsilon$. 方程式 (11) からは、加速度 $\mathcal{A}_\alpha(\tau, \boldsymbol{a})$ に対する次の方程式が導かれる：

$$\mathcal{A}_\alpha \equiv X_\alpha X_{\tau\tau} + Y_\alpha Y_{\tau\tau} + Z_\alpha Z_{\tau\tau} = -\frac{1}{\rho}\,\partial_\alpha p. \tag{15}$$

これはラグランジュ形の運動方程式として知られている [13, §13]. これは直ちに次の方程式に変換される：

$$X_{\tau\tau} = -\frac{1}{\rho}\,\partial_x p, \qquad \partial_x p = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial\alpha}. \tag{16}$$

左辺 $X_{\tau\tau}$ は粒子 $\boldsymbol{a}$ の加速度なので、右辺に外力項 P を加えれば、これはオイラーの方程式 (G) と同等である (3 節 (b))。オイラーの導いた式はラグランジュ関数 L の変分原理と同等（無矛盾）である。

4.3 変換の任意性（自由度）

方程式 (15) についていうと、$\boldsymbol{a}$-空間から $\boldsymbol{x}$-空間への変換には任意性がある。というのは、中間辺の式が2つのベクトルの内積の形をしているからである。すなわち、$\boldsymbol{x}$-空間の粒子加速度 $(X_{\tau\tau}, Y_{\tau\tau}, Z_{\tau\tau})$ と、$\boldsymbol{a}$-空間の α-軸を表す方向ベクトル $(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$ との内積である。

言い換えると、方程式 (15) は、粒子の $\boldsymbol{x}$-空間の変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{X} = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ の回転変換で不変である。同じ自由度が、式 (12) の粒子速度 $V_\alpha(\tau, \boldsymbol{a})$ についても言える。

この自由度に一意性を与えるために、後に考察されるように、ラグランジュ関数に回転対称性が許容する項を導入することが求められる。

5 $\boldsymbol{x}$-空間の方程式

5.1 オイラー空間での作用

オイラー記述は独立変数 (t, x, y, z) によって表現される. 流体運動の局所ゲージ対称性は文献 [11, 12] で考察されている. 時間微分 ∂_τ のオイラー表示は次の D_t で表される：

$$\partial_\tau = \mathrm{D}_t, \qquad \mathrm{D}_t \equiv \partial_t + v^k\partial_k = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y + w\partial_z = \partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\,. \tag{17}$$

時間微分演算子 D_t はゲージ不変であることが示せる。速度場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ は粒子速度で定義される：

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \partial_\tau \boldsymbol{X} = \mathrm{D}_t \boldsymbol{x}. \tag{18}$$

加速度場 $\mathcal{A}(\boldsymbol{x},t)$ も同様に定義される：

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x},t) = \partial_\tau{}^2 \boldsymbol{X} = \mathrm{D}_t \boldsymbol{v} = (\partial_t + v^k \partial_k)\boldsymbol{v}. \tag{19}$$

ここで 4.1 節に示した不変性を思い起こそう。質量 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a})$ およびエントロピー $s = s(\boldsymbol{a})$ は方程式 (1) および (3) を満たす．これらの性質のために、次の 2 つのラグランジュ関数を導入することができる：

$$L_\phi = -\int_M \partial_\tau \phi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}, \qquad L_\psi = -\int_M s\, \partial_\tau \psi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}. \tag{20}$$

$\phi(\boldsymbol{a},\tau)$ および $\psi(\boldsymbol{a},\tau)$ は質量およびエントロピーに関係するスカラー場（potentials）である。そこで、(5) の Λ_T に L_ϕ および L_ψ を加えて、全 Lagrangian Λ_T^* を次式で定義する：

$$\Lambda_\mathrm{T}^* = \Lambda_\mathrm{T} - \int \partial_\tau \phi \ \mathrm{d}^3\boldsymbol{a} - \int s\, \partial_\tau \psi \ \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}. \tag{21}$$

さらに作用積分は,

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda_\mathrm{T}^* \mathrm{d}\tau = \int \mathrm{d}\tau \, \Lambda_\mathrm{T} - \int \mathrm{d}\tau \int \partial_\tau \phi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a} - \int \mathrm{d}\tau \int s\, \partial_\tau \psi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}$$

で定義される．第 2 項の積分 $I_\phi = \int \mathrm{d}\tau \int \partial_\tau \phi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}$ は変数 τ について積分できて、$\int [\phi] \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}$ で表される．ただし、$[\phi] = \phi|_{\tau_2} - \phi|_{\tau_1}$ は 2 つの時刻 τ_2, τ_1 での ϕ の差であり、間の時刻 $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ の ϕ には独立である。同様に、第 3 項の積分は、s が τ に独立なので、$I_\psi = \int [\psi] s \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{a}$ と表される．このことは、$\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ に対する作用 I の変分で得られる運動方程式には、(ゲージ) ポテンシャル ϕ, ψ は現れないことを意味する。

しかしすぐ後に示すように、$\boldsymbol{x}$-空間の変数と場で表現された変分では、これらの積分は nontrivial な働きをする．というのは、それらの積分は、置換 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{a} = \rho\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ および $\partial_\tau = \mathrm{D}_t$ によって、$L_\phi = -\int_M \rho\, \mathrm{D}_t \phi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$, および $L_\psi = -\int_M \rho s \, \mathrm{D}_t \psi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ と書けるからである。

$\boldsymbol{x}$-空間での全 Lagrangian を $\Lambda_\mathrm{T}^* = \int_M \mathcal{L}(\boldsymbol{v}, \rho, s, \phi, \psi) \ \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ と書くと、ラグランジュ密度関数 $\mathcal{L}$ は次式で与えられる：

$$\mathcal{L} \equiv \tfrac{1}{2} \rho\, v^k v^k - \rho\epsilon(\rho, s) - \rho \mathrm{D}_t \phi - \rho s \mathrm{D}_t \psi \tag{22}$$

これが $\boldsymbol{x}$-空間で可能な形として提示されるラグランジュ密度である。作用は $I = \int \mathcal{L}(\boldsymbol{v}, \rho, s, \phi, \psi) \ \mathrm{d}^4x$ で定義される（$\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}t \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$）．しかしながら、作用原理から導かれる速度場は、一様エントロピー s_0 の場では、速度ポテンシャルを有し、渦なしの流れが得られるのみである (文献 [11]).

5.2 変分の結果

作用 I は、場の変分に対し不変であることを要請する。最初に、次の微小変換を考える：$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)$. このとき、体積要素 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ は、1 次変分までとすると $\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' = (1 + \partial_k \xi^k) \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ に変換されので、体積変分は $\Delta(\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}) = \partial_k \xi^k \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$ で与えられる。一方、密度、速度およびエントロピーの変分は、$\Delta\rho = -\rho \, \partial_k \xi^k$, $\Delta\boldsymbol{v} = \mathrm{D}_t \boldsymbol{\xi}$, および $\Delta s = 0$ である。これらに不変式 (1)、(3) を考慮すると (ϕ, ψ は固定), I の変分は次式で与えられる：

$$\Delta I = \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \Delta\boldsymbol{v} + \frac{\partial L}{\partial \rho} \Delta\rho + \frac{\partial L}{\partial s} \Delta s + L \, \partial_k \xi^k \right].$$

任意の変分 ξ^k に対してこれがゼロとなることを要請すると、オイラー・ラグランジュの方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial v^k}) + \frac{\partial}{\partial x^l}(v^l \frac{\partial L}{\partial v^k}) + \frac{\partial}{\partial x^k}(L - \rho \frac{\partial L}{\partial \rho}) = 0 \tag{23}$$

となる。同様に、ϕ および ψ の任意の変分 ($\Delta\phi$ および $\Delta\psi$ とする) に対する I の不変性から、次の式が導かれる：

$$\Delta\phi \quad : \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \qquad (\text{連続の式}), \tag{24}$$

$$\Delta\psi \quad : \quad \partial_t (\rho s) + \nabla \cdot (\rho s \boldsymbol{v}) = 0\,. \tag{25}$$

5.3 ネーサーの定理（オイラー表示）

式 (23) に関連して, 運動量密度 m_k および運動量流束テンソル M_k^l を次のように定義することができる：

$$m_k = \frac{\partial L}{\partial v^k}, \quad M_k^l = v^l \frac{\partial L}{\partial v^k} + (L - \rho \frac{\partial L}{\partial \rho})\, \delta_k^l\,. \tag{26}$$

式 (7) より, $m_k = \rho v_k$ および $M_k^l = \rho v_k v^l + p\, \delta_k^l$ を得る（今考察しているユークリッド空間では $v_k = v^k$). 式 (23) は運動量保存の式 $\partial_t(\rho v^k) + \partial_l(\rho v^l v^k) + \partial_k p = 0$ ($\partial_k = \partial/\partial x^k$) に書くことができる. さらに、(24) を使うと、これは次のオイラーの運動方程式に帰着する：

$$\partial_t v^k + (v^l \partial_l) v^k = -\frac{1}{\rho}\, \partial_k\, p \quad (= -\partial_k\, h). \tag{27}$$

これは方程式 (16) と同等である. 方程式 (14) は次のエネルギー保存の式に変換される：

$$\partial_t \left[\rho(\tfrac{1}{2} v^2 + \epsilon)\right] + \partial_k \left[\rho v^k\, (\tfrac{1}{2} v^2 + h)\right] = 0.$$

6 回転対称性

次に回転対称性と渦度場構造のトポロジーについて考察する。対称群は回転群 $SO(3)$ である。無限小回転はリー代数 $\mathbf{so}(3)$ である。回転ゲージ変換の解析から [12]、共変微分 ∇_t, 速度 $\boldsymbol{v}$ および加速度 $\mathcal{A}$ は次のように表される：

$$\nabla_t \;=\; \partial_t + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla), \tag{28}$$

$$\boldsymbol{v} = \nabla_t \boldsymbol{x} \;=\; (\partial_t + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla))\boldsymbol{x}, \tag{29}$$

$$\mathcal{A} = \nabla_t \boldsymbol{v} \;=\; \partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} \tag{30}$$

$$\nabla_t \boldsymbol{v} \;=\; \partial_t \boldsymbol{v} + \mathrm{grad}(\tfrac{1}{2}\, v^2) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}. \tag{31}$$

最後の式 $\nabla_t \boldsymbol{v} = \partial_t \boldsymbol{v} + \nabla(\frac{1}{2} v^2) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ は、それが回転ゲージ不変性を満たすだけでなく、渦度 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{v}$ が回転対称性のゲージ場であることを表している。それに加えて、$\nabla_t \boldsymbol{v}$ の表現が、一つの座標系 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ から、一定速度 $\boldsymbol{U}$ で相対運動している他の座標系 $(t_*, \boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{v}_*)$ へのガリレイ変換に対して、共変的である性質がある。ここで、ガリレイ変換は $t_* = t$, $\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{U}t$, $\boldsymbol{v}_* = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{U}$ であり、変換共変性とは、次式が成り立つことである：$\nabla_t \boldsymbol{v} = (\nabla_t \boldsymbol{v})_*$.

7 回転対称性に関連するLagrangian

ゲージ原理に従って、回転対称性の新しいLagrangianを考察する．次のことに注意しよう。5.1節における式(20)の２つの積分の被積分関数は、$\partial_\tau(\cdot)$の形をしている．作用は$I = \int\int[\Lambda_T + \partial_\tau(\cdot)]\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}$で、この形はゲージ理論のトポロジー項の最も簡単な表現になっている [14]~[17]．回転性流れ場の観点からは、helicity (または Hopf invariant, [18]) が渦度場の non-trivial topology を記述する。これはゲージ理論の Chern-Simons term と同じで、作用Iの４次元時空より１次元低い空間の項として知られている。というのは、トポロジー項は発散形、すなわち$\partial_\mu F^\mu$の形で表せることによる。ここでは、5.1節からヒントを得て、τに独立の場を求めることにする．

7.1 Lagrangian Λ_A およびヘリシティ

方程式(11)から、τに独立の場を見つけることができる．座標変数(a,b,c)について、この方程式の curl をとると、

$$\nabla_a \times \partial_\tau \boldsymbol{V}_a = \partial_\tau(\nabla_a \times \boldsymbol{V}_a) = 0, \tag{32}$$

を得る．ただし、$\nabla_a = (\partial_a, \partial_b, \partial_c)$．それ故、$\nabla_a \times \boldsymbol{V}_a = \boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{a})$と表せる．

ベクトル$\boldsymbol{V}_a$は、$\boldsymbol{x}$-空間速度$\boldsymbol{v} = (X_\tau, Y_\tau, Z_\tau) = (u,v,w)$の$\boldsymbol{a}$-空間へ変換された速度である．1-形式で書くと次のV^1で定義される：

$$\begin{aligned} V^1 &= V_a\,\mathrm{d}a + V_b\,\mathrm{d}b + V_c\,\mathrm{d}c \qquad (33)\\ &= u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z. \qquad (34)\end{aligned}$$

ここで、$V_a = ux_a + vy_a + wz_a$, $x_a = \partial X/\partial a$, $u = X_\tau$, *etc.*．微分$\mathrm{d}V^1$は2-形式$\Omega^2 = \mathrm{d}V^1$を与える:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \Omega_a \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}c + \Omega_b \mathrm{d}c \wedge \mathrm{d}a + \Omega_c \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \\ &= \omega_x \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \omega_y \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \omega_z \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \qquad (35)\end{aligned}$$

ただし、$(\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c) = \boldsymbol{\Omega}_a$．ここで$\nabla \times \boldsymbol{v} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \boldsymbol{\omega}$は渦度である．この等式から$\boldsymbol{\Omega}_a$は、$\boldsymbol{x}$-空間渦度$\boldsymbol{\omega}$の$\boldsymbol{a}$-空間へ変換された渦度であることがわかる．方程式(32)は、2-形式Ω^2のτ-微分に書き直され、次の Lie 微分の形に書ける：$\mathcal{L}_{\partial_\tau}\Omega^2 = 0$.

次に、$\boldsymbol{a}$-空間でのゲージポテンシャルのベクトル$\boldsymbol{A}_a = (\overline{A}_a, \overline{A}_b, \overline{A}_c)$を導入し、その1-形式$A^1$を$A^1 = \overline{A}_a\,\mathrm{d}a + \overline{A}_b\,\mathrm{d}b + \overline{A}_c\,\mathrm{d}c = \overline{A}_x\,\mathrm{d}x + \overline{A}_y\,\mathrm{d}y + \overline{A}_z\,\mathrm{d}z$によって定義する．可能なタイプのLagrangianが次の式で定義される：

$$\Lambda_A = -\int_M \langle \partial_\tau \boldsymbol{A}_a, \boldsymbol{\Omega}_a \rangle\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{a} = \int_M \langle \boldsymbol{A}, E_W[\boldsymbol{\omega}] \rangle\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x},$$

ここで、$E_W[\boldsymbol{\omega}] \equiv \partial_t \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\omega}$.

このLagrangianから、３つの新しい結果が導かれる [12]: (i) 速度$\boldsymbol{v}$が新たな回転性の項を含む, (ii) $\boldsymbol{A}$の変分から次の渦度方程式が導かれる：

$$E_W[\boldsymbol{\omega}] = \partial_t \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\omega} = 0,$$

そして、(iii) ゼロでないヘリシティHが得られる．ただし,

$$H = \int_V \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} = \int_V \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{E_W[\mathrm{curl}\boldsymbol{A}]}{\rho}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{x},$$

これより、$E_W[\boldsymbol{B}]$なる因子がヘリシティを生ずることがわかる（$\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\boldsymbol{A}$）.

7.2 変換の一意性

Lagrangian $\boldsymbol{a}$ 空間から Eulerian $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a})$ 空間への変換は、局所的に変換行列 $\partial x^k/\partial a^l$ の 9 個の成分によって決定される．しかしながら、5.3 節で考察された最初の解では 6 個の関係式、すなわち $\boldsymbol{v} = (X_\tau, Y_\tau, Z_\tau)$ と (V_a, V_b, V_c) との間の 3 個の関係式 (12), および $\mathcal{A} = (X_{\tau\tau}, Y_{\tau\tau}, Z_{\tau\tau})$ と $(\mathcal{A}_a, \mathcal{A}_b, \mathcal{A}_c)$ との間の 3 個の関係式 (15) を持つのみであった．残りの 3 個の条件は、$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ と $\boldsymbol{\Omega}_a(\boldsymbol{a}) = (\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c)$ とを結ぶ方程式 (35) で与えられる．たとえば、Ω_a は次式で決定される：

$$\begin{aligned}\Omega_a &= \omega_x\,(\partial_b y\,\partial_c z - \partial_c y\,\partial_b z) + \omega_y\,(\partial_b z\,\partial_c x - \partial_c z\,\partial_b x)\\ &\quad + \omega_z\,(\partial_b x\,\partial_c y - \partial_c x\,\partial_b y).\end{aligned} \tag{36}$$

すなわち、$\boldsymbol{x}$ 空間と $\boldsymbol{a}$ 空間の 2 空間で、初期条件に従う発展方程式で決定される 3 つのベクトルがある：速度、加速度および渦度．これら両空間の 3 ベクトルの間の変換関係式は、9 個の行列要素 $\partial x^k/\partial a^l$ を局所的に決定するのに十分である．このようにして，Lagrangian $\boldsymbol{a}$ 空間と Eulerian $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a})$ 空間の間の変換が一意的に決定される [12].

8 要約および discussion

理論物理の場の理論のゲージ原理のシナリオにしたがって、流体運動の変分原理を構成し、共変微分および新たに定義されたラグランジュ関数を使って、再定式化をおこなうことができた。ここで与えた変分の方式は矛盾がなく、総体的に、無理のない方法で完全流体の流れを記述する。特に、連続の式、エントロピーの式は、拘束条件として与えるのではなく、変分から導かれる．

回転対称性を考慮した改良したラグランジュ関数では、渦度方程式が新たに導かれ、さらに変換の関係式 (35) が与えられる。その結果、速度、加速度および渦度の 3 ベクトルの間の変換関係式から、9 個の変換係数 $\partial x^k/\partial a^l$ を各点で決定することができる。このようにして，Lagrangian $\boldsymbol{a}$-空間と Eulerian$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a})$-空間の間の変換が一意的に決定される

文献

[1] C. Truesdell, 1960, "Rational Mechanics, 1687-1788", Arch. Hist. of Exac. Sci. 1, 3-36.

[2] C. Truesdell, 1954, "Rational Fluid Mechanics, 1687-1765", LEOO, .II, Vol.12, 9-125.

[3] 山本義隆，古典力学の形成—ニュートンからラグランジュへ，日本評論社，1997.

[4] 山本義隆，オイラーの力学、数理研研究会「オイラー方程式 250 年」講究録.

[5] L. Euler, 1736, [E15,E16] "Mechanica, sive motus scientia analytice exposita" (Mechanics, motion of science of analytic exposition), LEOO, Ser.II, Vol.1, 2.

[6] L. Euler, 1750,[E177] "Decouverte d ' un nouveau principe de Mecanique" (Discovery of a new principle of mechanics), LEOO, Ser.II, Vol.5.

[7] L. Euler, 1752, [E258] "Principia motus fluidorum" (Principles of the motions of fluids), LEOO, Ser.II, Vol.12, 133-168.

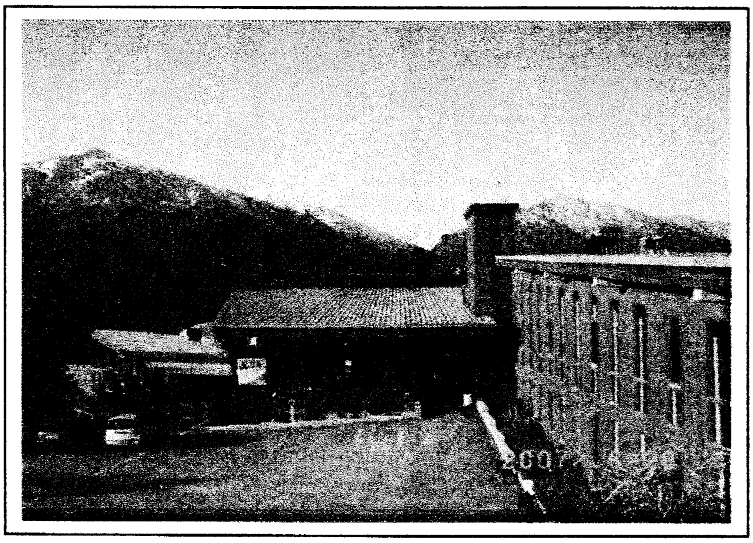
[8] L. Euler, 1753, [E225] "Principes generaux de l'etat d'equilibre des fluides" (General Principles of the state of equilibrium of fluids), LEOO Ser.II, vol.12, 2-53. (Berlin 1757).

[9] L. Euler, 1755, [E226] "Principes generaux du mouvement des fluides" (General Principles of the motions of fluids), LEOO, Ser.II, vol.12, 54-91. (Berlin 1757). 英訳: "General laws of the motion of fluids", Fluid Dynamics, vol.34, no.6, 801-822 (1999).

[10] T. Kambe, 2007, "Variational formulation of the motion of an ideal fluid on the basis of gauge principle", *Preprint*: http://arxiv.org/abs/0707.1779, accpted t o Physica D (2008), Proc. of the Conference "Euler Equations: 250 Years On" (2007, France).
[11] T. Kambe 2007, "*Gauge principle and variational formulation for ideal fluids with reference to translation symmetry*", Fluid Dyn. Res. 39, 98 – 120.
[12] T. Kambe 2007, "Variational formulation of ideal fluid flows according to gauge principle", accepted to Fluid Dyn. Res.; *Preprint* TK2007b, http://www.purple.dti.ne.jp/kambe/
[13] H.Lamb, *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
[14] S.S. Chern, *Complex manifolds without potential theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1979.
[15] R. Jackiw, "Chern-Simons terms and cocycles in physics and mathematics", in *Fradkin Festschrift*, Adam Hilger, Bristol, 1985.
[16]} S. Desser, R. Jackiw R and S. Templeton, *Annals of Physics*, 140 (1982) 372 - 411.
[18] R. Jackiw, *Lectures on Fluid Mechanics* (Springer, 2002).
[19] V.I. Arnold and B. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics*, Springer, 1998.

今年 2007 年は、オイラーが運動方程式の論文[8]を出版してから 250 年になり、それを記念して国際会議 "Euler Equations: 250 Years On" が、フランスのアルプス・レゾート Aussois の CNRS ポール・ランジュバン・センター(下の写真)で去る 6 月に開催された。日本からは 7 名が招待された。小生も委員の末席で微力ながら協力の機会を与えられたことは誠に光栄の至りである。Proceedings は Physica D: Nonlinear Phenomena で出版の予定である (2008).

参考までに、EE250 のウェブサイトは http://www.obs-nice.fr/etc7/EE250/ .



CNRS ポール・ランジュバン・センター (フランス)