

Shortest Paths in Free Spaces Including Obstacles with Fuzzy Boundaries

-ファジィ境界をもつ障害物を有する空間での 2 点間最短パス-

齋藤誠慈 (同志社大学 工学部)
石井博昭 (大阪大学 大学院情報科学研究科)
葉光毅 (国立成功大学 工学部都市計画系)
夏皓清 (国立成功大学 工学部都市計画系)

Seiji Saito(Doshisha University)
Hiroaki Ishii(Osaka University)
Kuang-Yih Yeh(National Cheng Kung University)
Hao-Ching Hsia(National Cheng Kung University)

In this paper we introduce definitions of distances defined by norms in linear spaces in order to find optimal paths in free spaces with obstacles. Euler-Lagrange equations in the variational method give the optimal solutions for the problems of optimal paths. Finally we discuss that our future studies for optimal paths in free spaces with obstacles, which have fuzzy boundaries, is useful in getting shortest paths in realistic environment with natural damage, for example, earthquakes etc.

1 ノルムによって定まる距離

都市建造物が位置する平面上の 2 点間を測るには, 次のゲージ (gauge), あるいはノルム (norm) や距離 (metric, distance) が用いられる ([15] 参照).

定義 1.1 n 次元線形空間の部分集合 $S \subset \mathbf{R}^n$ はコンパクト凸で, 原点を内点として含む. 点 $x \in \mathbf{R}^n$ のゲージ $\gamma: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ とは, 次のように定義される.

$$\gamma(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda S\}.$$

さらに, S が対称的, すなわち $y \in S \Rightarrow -y \in S$ ならば, x のゲージは, 特に x のノルム $\|x\|$ といい, ノルムから x, y の距離 $d(x, y)$ が定義できる:

$$\gamma(x) = \|x\|_\gamma, \quad d(x, y) = \|x - y\|_\gamma.$$

と表す.

ゲージ γ は, 一般に対称性はない. $\gamma(x, y) = \gamma(y - x)$ とおくと, $g(x, y) \neq g(y, x)$ が成り立つことがあるからである. ノルムは対称的である: $\|x - y\| = \|y - x\|$. ゲージは次の 3 性質より特徴付けられる: (i) $\gamma(x) \geq 0$ and $(\gamma(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$; (ii) $\gamma(\lambda x) = \lambda \gamma(x)$ ($\lambda \geq 0$) (iii) $\gamma(x + y) \leq \gamma(x) + \gamma(y)$.

ノルム $\|\cdot\|$ が定義された $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ をノルム空間, 距離 d が定義された (\mathbf{R}^n, d) を距離空間という.

2 可視概念と最短パス

ノルム $\|\cdot\|$ が定義された \mathbf{R}^n には, 距離 $d(x, y) = \|x - y\|_d$ ($x, y \in \mathbf{R}^n$) 導入されているとする. 有限個の障害物集合 $\{B_i \subset \mathbf{R}^n : i = 1, \dots, N\}$ は, すべて閉集合で内点を含み, 互いに素, すなわち $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とする. その和集合を次のようにおく: $B = \bigcup_{i=1}^N B_i$. 次の集合

$$\mathcal{F} = \mathbf{R}^n - \text{int}(B) = \{x \in \mathbf{R}^n : x \notin B, \text{ or, } x \in \partial B\}$$

は実行可能領域で, 自由スペース (free space) という. \mathcal{F} は連結と仮定する. 連結な自由スペースにおける最短距離 d_B を次のように定義する.

2点 $x, y \in \mathcal{F}$ の x - y パス (path) とは, 区分的滑らかな曲線 $P : p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))^T$ ($t \in I = [0, 1]$) が存在し, $p(0) = x, p(1) = y$ をみたすことをいう. 長さ $\ell(P)$ は次のように表される:

$$\ell(P) = \int_0^1 \left\| \frac{dp}{dt} \right\|_d dt.$$

x - y パスは, その曲線 P と障害物集合 B の内部との交わりがないとき, すなわち $p(I) \cap \text{int}(B) = \emptyset$ のとき, 許容 x - y パス (permitted path) という. x - y 許容パスより, d -最短許容パス (d -shortest permitted path), 障害距離 (barrier distance), 最適パス (optimal path), ジオデスティックパス (geodesic path) といわれる $d_B(x, y)$ が定義される:

$$d_B(x, y) = \inf \{ \ell(P) : P \text{ is permitted path} \}$$

d -最短許容パスは, 同次的でないのでノルムとはならないが, 距離の性質をみたす ([15]).

(i) $d_B(x, y) \geq 0$ and $(d_B(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \in \mathcal{F})$; (ii) $d_B(x, y) = d_B(y, x)$; (iii) $d_B(x, y) \leq d_B(x, z) + d_B(z, y)$.

ゆえに, \mathbf{R}^n の距離 d と障害物集合 B に対する (\mathcal{F}, d_B) は距離空間である. 一般に, d -最短許容パス $d_B(x, y)$ は \mathbf{R}^n の距離 $d(x, y)$ より短くならない:

$$d_B(x, y) \geq d(x, y) \text{ for } x, y \in \mathcal{F}.$$

定義 2.1 d -最短許容パスと \mathbf{R}^n の距離 $d(x, y)$ が等しいとき, すなわち $d_B(x, y) = d(x, y)$ のとき, x, y は d -可視的 (visible) という.

可視的でない部分は, 影 (shadow) という.

定義 2.2 $x \in \mathcal{F}$ から d -可視的でない点の集合

$$\text{shadow}_d(x) = \{y \in \mathcal{F} : d_B(x, y) > d(x, y)\}$$

を, x の d -影 (shadow) という.

距離を次のように, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ のマンハッタンノルム (Mahhattan norm) $M = \ell_1$ と $E = \ell_2$ -ノルムによる影を次に図示する.

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad ; \quad E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}.$$

Figure 2.1: $E(= \ell_2)$ ノルムによる影 (左図) と, $M(= \ell_1)$ ノルムによる影 (右図) とは異なる.

3 滑らかな自由スペースでの最短距離

距離空間 (\mathbf{R}^n, d) において, 障害物集合 B が単一のコンパクト凸集合

$$B = \{x \in \mathbf{R}^n : G(x) \leq 0\},$$

ただし (G は凸で, 2回連続微分可能 $\nabla G \neq 0$, ∂B は $n-1$ 次元微分可能多様体を仮定) の自由スペース $\mathcal{F} = \mathbf{R}^n - B$ における 2点 $x, y \in \mathcal{F}$ の d 最短許容パスを見出す最適化問題を次に定式化する:

$$\begin{aligned} \min J(p) &= \int_0^1 F(t, p, p') dt, \text{ where } F(t, p, q) = \|q(t)\|_d, \\ \text{such that } &p(0) = x, p(1) = y, p(I) \cap \text{int}(B) = \emptyset. \end{aligned} \quad (3.1)$$

2点 $x, y \in \mathcal{F}$ に対する d 最短許容パス p の解法には, 変分法を応用する. 簡単には G は単位円とする.

例 3.1 凸関数 $G: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を次のようにおく:

$$G(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} - 1 \quad (3.2)$$

d -最短許容パス p は, スラック関数 $\mu: I \rightarrow \mathbf{R}$ とベクトル値関数 $u: I \rightarrow \partial B$ を用いて, 次のように表される:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) + \mu(t)^2 \nabla G(u(t)), \text{ where } u(t) \in \partial B, \mu(t) \in \mathbf{R}, \\ \text{such that } &G(u(t)) \text{ on } I. \end{aligned}$$

また, 連続な u と区分的に滑らかな μ は次の関係をみたす (図 3.1 を参照):

$$\begin{aligned} G(u(t)) &= 0 \text{ for } t \in I, \\ u(0) + \mu(0)^2 \nabla G(u(0)) &= x, \\ u(1) + \mu(1)^2 \nabla G(u(1)) &= y, \end{aligned}$$

凸関数 (3.2) に対する最適化問題 (3.1) に関して, 自由スペースの 2点 $x, y \in \mathcal{F}$ の d -最短

Figure 3.1: 障害物が単位円のときの, 最短パス p , スラック u , ベクトル関数 μ の関係

許容パス p がみたす必要条件は, 次の条件 (a), あるいは (b) が成り立つことである ([15]):

(a) p は, 次の Euler - Lagrange 方程式をみたす:

$$\frac{\partial F}{\partial p_j}(t, p, p') - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j}(t, p, p') = 0, \quad q_j = p'_j, j = 1, 2, \dots, n;$$

(b) p は $G(p(t)) = 0$ および, 次の方程式をみたす.

$$\frac{\partial F}{\partial p_i}(t, p, p') - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_i}(t, p, p') + \lambda(t) \frac{\partial G}{\partial p_i}(p) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

4 今後の研究課題

今後の研究課題としては、(1) 曖昧な境界をもつ障害物（複数個）が存在する空間における2点最短距離の確定するアルゴリズムの考案；(2) 最短パスの滑らか性に関する条件を緩やかなものとして検討する；(3) 曖昧な情報を含む道路交通量に基づいて河川に橋を最適化配置する問題の解法を考案することである。詳しくは次のとおり：

(1) 地震などの災害発生時では、複数の建物が破壊されて障害物となり通過可能な道路が制限され、不可能な場合がある。しかも、障害物の地点は特定されても、被害の度合いが明確でないことがある。このような場合、障害物の境界が曖昧な制約条件のもとで、最短のパスを発見するアルゴリズムの考案は有効である。

(2) 障害物全体 B を取り除いた自由空間の2点 $x, y \in F$ 内に考えられる最短許容パスの距離 $d_B(x, y)$ は、区分的に滑らかであることを仮定した。この条件を緩めて、無限個の微分不可能な点が存在するパス、例えば、絶対連続、あるいはリップシッツ連続（ほとんど至る所微分可能）であるパスと同様な滑らかでない境界 $\partial(B)$ に関して、最適化(3.1)の必要条件を与えることも必要である。障害物の境界やパスは、必ずしも滑らかとは限らないからである。

(3) 都市を形成する道路は重要なファクターであり、河川に橋をかけて交通量を調整することがある。しかし、車両の交通量は常に確定的というよりは、「だいたい」あるいは「約」という不確実性が伴うことがある。今後の研究では、交通量をファジィ数として考え、ファジィ線形空間を構成し、河川にかける橋の最適位置を決定する最適化問題を定式化し解法を試みる。

ファジィ数の集合 $\mathcal{F}_b^{\text{st}}$ （正規、有界サポート、狭義ファジィ凸、上半連続のメンバーシップ関数の集合）に同値関係を導入し、商集合 $\mathcal{F}_b^{\text{st}}/\sim$ に、和とスカラー倍が定義される線形空間の構成する。この線形空間 $\mathcal{F}_b^{\text{st}}/\sim$ には、ハウスドルフ距離によりノルムが定義でき、完備性も保証される。図4.1が示すモデルでは、川の左・右の道路交通量として、ファジィ

Figure 4.1: 川をはさんで、左・右の道路の交通量は、ファジィ数 $A, L_1, L_2, \dots, L_n, C; B, R_1, R_2, \dots, R_m, D$ で与えられるモデルである。

数 $A, L_1, L_2, \dots, L_n, C; B, R_1, R_2, \dots, R_m, D$ が与えられている。ファジィ線形空間における変分不等式問題・最適化問題を導き、変分法を用いて、橋の最適配置を見出す解法を検討する。

5 最短パスの例と課題

矩形 $[-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ の中に、障害物 $B = \{u = (u_1, u_2)^T : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$ があるとき、自由空間は $F = [-1, 1]^2 - B = [-1, 1]^2 \cap B^c$ である。研究課題(1)の特殊な場合「曖昧な境界をもつ障害物が存在する空間における2点最短距離の確定するアルゴリズム」に関して例を示す。曖昧な境界をもつ障害物は、 B_r (半径 r の円)、 r はファジィ数、そのメンバーシップ関数は $\xi \geq 1$ を実数として

$$\mu_r(\xi) = \begin{cases} A + \frac{1-A}{r_1-1}(\xi-1) & (\xi \geq r_1 \geq 1); \\ 1 + \frac{1}{r_2-r_1}(\xi-r_1) & (r_1 < \xi \leq r_2) \\ 0 & (\xi > r_2) \end{cases}$$

とする。ファジィ数の半径 r は、外的原因により変化して $r_1 \geq 1$ を中心として、最大 $r_2 > r_1$ に変化することを仮定する。変化 $r_1 \geq 1$ の有無を含めて考えるために $0 \leq A \leq 1$ とする。 α カット集合 $L_\alpha(\mu_r) = \{\xi : \mu_r(\xi) \geq \alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$ は、 $L_\alpha(\mu_r) = [R_1(\alpha), R_2(\alpha)]$ と表せる。ここで、

$$R_1(\alpha) = \min\{\xi : \mu_r(\xi) = \alpha\}, \quad R_2(\alpha) = r_1 + (1 - \alpha)(r_2 - r_1).$$

図 5.1 は、障害物 B_r に含まれない 2 点 $x(x_1, x_2), y(y_1, y_2) \in [-1, 1]^2$ を自由にとり

Figure 5.1: 障害物の半径は $\xi_1, \xi_2 \in [R_1(\alpha), R_2(\alpha)]$, α は帰属度、とする。2 点 x, y を自由にとり、帰属度 $0 < \alpha \leq 1$ に応じて、半径 $\xi_\alpha \in [R_1(\alpha), R_2(\alpha)]$ を決める。自由スペース内の $x - y$ 間最短パスを見出すためには、いくつかの計算の可能性が生じる。

に、障害物を通らずに自由スペースを通過する最短パスの解を示している。障害物の境界は曖昧となり、帰属度 $0 < \alpha \leq 1$ と半径 $\xi_\alpha \in [R_1(\alpha), R_2(\alpha)]$ に依存する。曖昧な境界をもつ障害物は

$$B_{\alpha, \xi_\alpha} = \{u \in \mathbf{R}^2 : \|u - c\| \leq \xi_\alpha\}$$

表す。 c は障害物 (円) の中心、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。今後、 $F_{\alpha, \xi_\alpha} = [-1, 1]^2 - B_{\alpha, \xi_\alpha}$ とおく。この最短パス問題を定式化する。2 点 x, y と境界 $\|u - c\| = \xi_\alpha$ の各々、接線を Q_1, Q_2 , その長さを p_1, p_2 とする (図 5.2 参照)。直角三角形 cQ_1x, yQ_2c の $p_1 = \|Q_1 - x\|$,

Figure 5.2: 障害物の境界は中心 $c \in \mathbf{R}^2$; 半径 $\xi_\alpha \geq 1$ で、点 x, y とは点 Q_1, Q_2 で接する。ベクトル $c - x$ と $Q_1 - x$, $Q_2 - y$ と $c - y$, $Q_1 - c$ と $Q_2 - c$ のなす角を各々 $\theta_1, \theta_2, \theta$ とする。なお反時計方向を正とする。 T を線分 Q_1c を c の方向に延ばした直線と境界 $\partial B_{\alpha, \xi_\alpha}$ の交点とする。

$p_2 = \|Q_2 - y\|$ は各々、

$$p_1 = \sqrt{\|c - x\|^2 - \xi_\alpha^2}, \quad p_2 = \sqrt{\|c - y\|^2 - \xi_\alpha^2}$$

である。回転角 θ の回転行列を $M(\theta)$ とすると、

$$Q_1 = x + p_1 M(\theta_1) \frac{c - x}{\|c - x\|}, \quad Q_2 = y + p_2 M(-\theta_2) \frac{c - y}{\|c - y\|}$$

である。直角三角形 $Q_1 T Q_2$ の斜辺の長さは $2\|\xi_\alpha\|$ で円 $\|u - c\| = \xi_\alpha$ に内接することより、 $2\|\xi_\alpha\| = \|Q_1 - Q_2\| / (\sin \frac{\theta}{2})$ から $\theta = 2 \arcsin^{-1} \frac{\|Q_1 - Q_2\|}{2\|\xi_\alpha\|}$ で、弧 $Q_1 Q_2$ の長さは

$$\text{arc} Q_1 Q_2 = 2\|\xi_\alpha\| \theta$$

となる。最適化問題は、 $r \in \mathcal{F}_B^{\text{st}}, 0 < \alpha \leq 1, \xi_\alpha \in [R_1(\alpha), R_2(\alpha)]$ に対し

$$\min(p_1 + p_2 + \text{arc} Q_1 Q_2)$$

s.t. Q_1, Q_2 は境界上の接点; p_1, p_2 は接線の長さ;

パスは、 x, y を両端として自由スペース F_{α, ξ_α} 中にあること;

となる。今後、障害物が k 個ある場合、接点は p_1, p_2, \dots, p_m ($m \geq 2$) があり、その接点の個数の確定すること、2 接点の弧長計算、そして適切なパスの最短距離を計算するためのアルゴリズムを、ダイクストラのアルゴリズムを用いて考案することが今後の課題である。

References

- [1] M.L. Puri, D.A. Ralescu, Differential of Fuzzy Functions, *J. Mathematical Analysis and Applications*, Vol.91, p.552-558(1983).
- [2] R. Horst, P. M. Pardalos and N. V. Thoai " Introduction to Global Optimization", Kluwer Academic Press Publ.(1995).
- [3] 石井博昭, 坂和正敏, 岩本誠一, 『ファジィOR』, 朝倉出版 (2001).
- [4] 中島信之, 竹田英二, 石井博昭, 『ファジィ理論入門』, 裳華房 (1994).
- [5] 日本ファジィ学会編, 講座ファジィ 『ファジィ集合』, 日刊工業新聞社 (1993).
- [6] 西田俊夫, 田畑吉雄編, 『現代OR入門』, 現代数学社 (1995).
- [7] 坂和正敏, 石井博昭, 西崎一郎 『ソフト最適化』, 朝倉書店 (1995).
- [8] 古川長太, 『ファジィ最適化の数理』, 森北出版 (1999).
- [9] Jr. R. Goetschel, W. Voxman , Topological Properties of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, Vol 9, p.87-99(1983).
- [10] Jr. R. Goetschel, W. Voxman , Elementary Fuzzy Calculus, Fuzzy Sets and Systems, Vol 18, p.31-43(1986).
- [11] 坂和正敏, 『ファジィ理論の基礎と応用』, 森北出版 (1989).
- [12] 河田敬義, 三村征雄, 『現代数学概説II』, 岩波書店 (1965).
- [13] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press (1970).
- [14] G.Ruiz-Garzón, R.Osuna-Gómez and A.Rufián-Lizana, Generalized Invex Monotonicity, *European J. Operat. Res.*, Vol. 144, 501-512 (2003).
- [15] K. Klamroth, Single-facility Location problem Problems with Barriers, Springer-Verlag (2002).

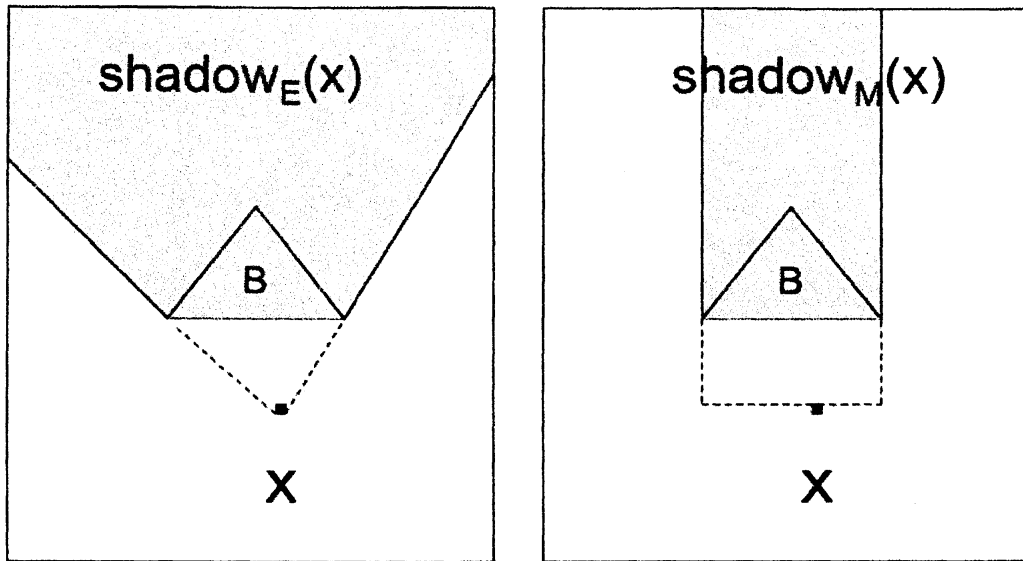


Figure 2.1: $E(= \|\cdot\|_1)$ ノルムによる影 (左図) と, $M(= \|\cdot\|_\infty)$ ノルムによる影 (右図) とは異なる.

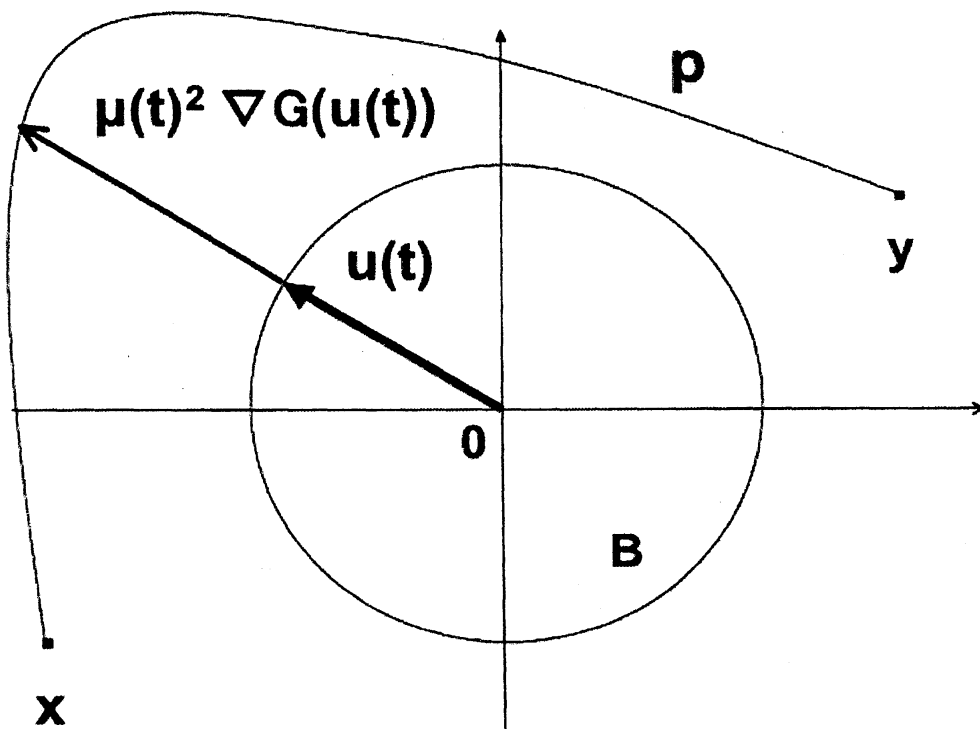


Figure 3.1: 障害物が単位円のときの, 最短パス p , スラック u , ベクトル関数 μ の関係

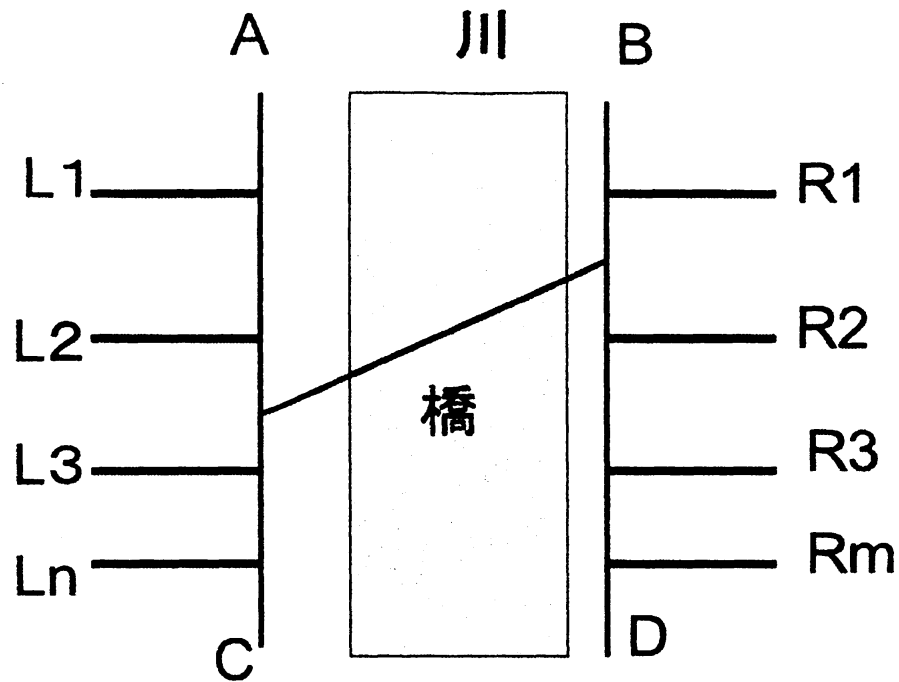


Figure 4.1: 川をはさんで、左・右の道路の交通量は、ファジィ数 $A, L_1, L_2, \dots, L_n, C; B, R_1, R_2, \dots, R_m, D$ で与えられるモデルである。

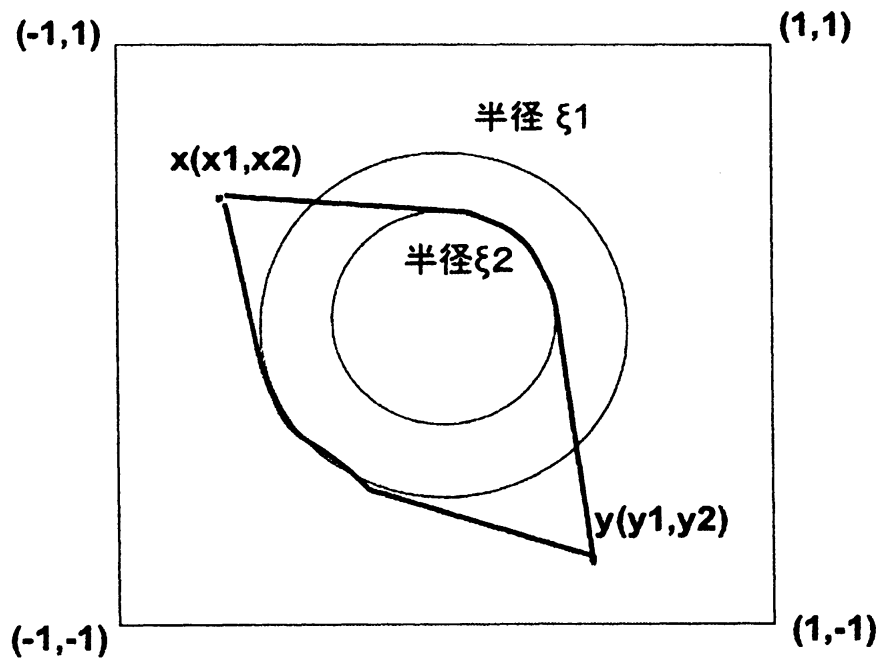


Figure 5.1: 障害物の半径は $\xi_1, \xi_2 \in [R_1(\alpha), R_2(\alpha)]$, α は帰属度、とする。2点 x, y を自由にとり、帰属度 $0 < \alpha \leq 1$ に応じて、半径 $\xi_i \in [R_1(\alpha), R_2(\alpha)]$ を決める。自由スペース内の $x-y$ 間最短パスを見出すためには、いくつかの計算の可能性が生じる。

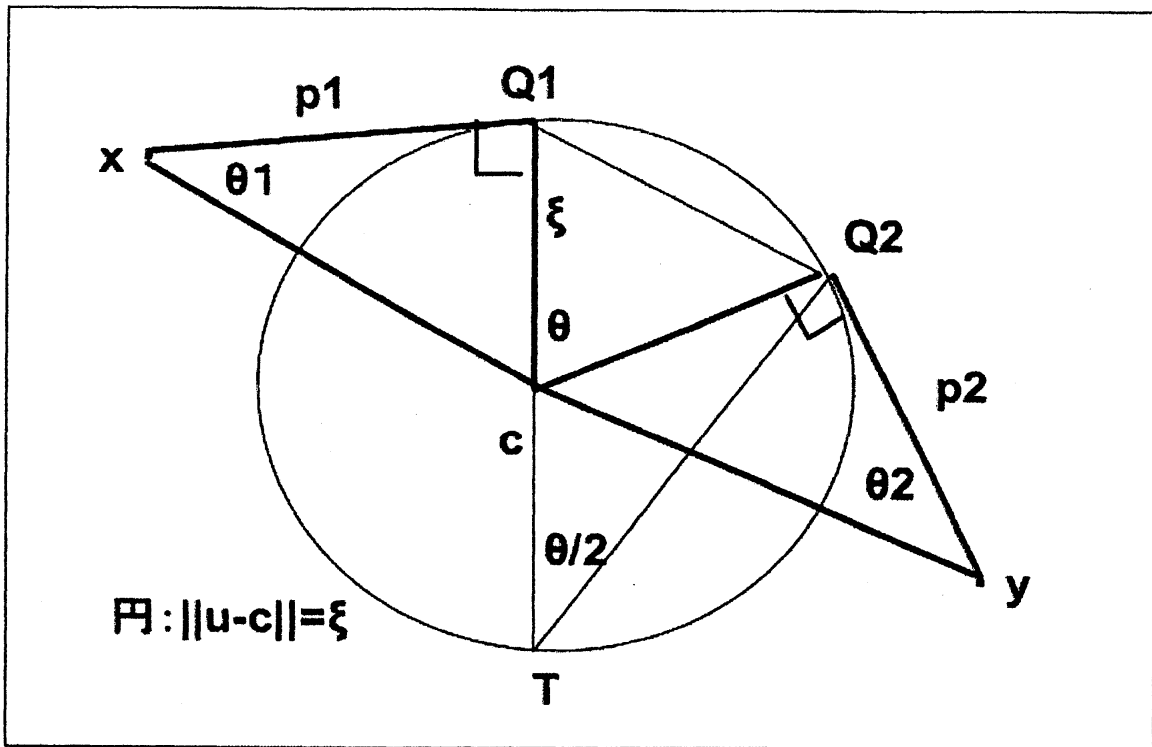


Figure 3.2: 障害物の境界は中心 $c \in \mathbb{R}^2$, 半径 $\xi, \xi \geq 1$ で, 点 x, y とは点 Q_1, Q_2 で接する. ベクトル $c-x$ と Q_1-x , Q_2-y と $c-y$, Q_1-c と Q_2-c のなす角を各々 $\theta_1, \theta_2, \theta$ とする. なお反時計方向を正とする. T を線分 Q_1c を c の方向に延ばした直線と境界 $\partial B_{\xi,c}$ の交点とする.