数理解析研究所講究録
第 1611 巻 2008 年 180-185



# ベクトル均衡点問題に対するEkelandの変分原理

新潟大学大学院 自然科学研究科　荒谷　洋輔 (ARAYA, Yousuke)*
(Graduate School of Science and Technology, Niigata University)

## 1　はじめに

本論文では，ベクトル均衡点問題 (Vector Equilibrium Problem, VEP) を考える。それは関数 $f : X \times X \to Y$ に対し、

$$f(x_0, y) \notin -\mathrm{int}C \quad \text{for all } y \in X$$

を満たすような $x_0 \in X$ を見つける問題である。ここで、$C$ は通常、凸錐を想定し、"$\notin -\mathrm{int}C$" は実数の大小における "$\not< 0$" の（一般のベクトル空間に対する）アナロジーで実数空間においては "$\geq 0$" と同じ意味を成す。ベクトル均衡点問題は均衡点問題はもちろん、ベクトル最適化問題、ベクトル相補性問題、ベクトル変分不等式問題、ベクトル鞍点問題などいろいろな問題を含んでいる。

今回、注目したのは2005年に発表された Bianchi, Hassay and Pini [4] の結果で、それは実数値関数についての均衡点問題に対する Ekeland の変分原理である。通常の Ekeland の変分原理は、最小化問題に対するものであるが、この論文では均衡点問題が最小化問題の一般化であることをうまく利用して Ekeland 型の変分原理に対応する定理を与えている。さらに彼らは、その定理をベクトル値関数へ拡張している（[5])。

本論文では、彼らの結果 [5] とは違う型のベクトル均衡点問題に対する Ekeland の変分原理を紹介し、さらにその定理の系として、Caristi 型不動点定理も紹介する。

## 2　ベクトル最適化からの準備

まず、$(X, d)$ を完備距離空間、$Y$ を実ノルム空間とする。集合 $A \subset Y$ に対し、$A$ の代数的内部、位相的内部、位相的閉包をそれぞれ cor$A$、int$A$、cl$A$ と表す。また、この論文で、$C$ は $Y$ の部分集合で閉凸錐を表すものとする。つまり、

(a) $\mathrm{cl}C = C$

*E-mail: yousuke@m.sc.niigata-u.ac.jp

(b) $C + C \subseteq C$,

(c) $\lambda C \subseteq C$ for all $\lambda \in [0, \infty)$.

なお、錐 $C$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed とは $C \cap (-C) = \{0\}$ が成立する場合である。関数 $f : X \times X \to Y$ に対し、$f(x, X) = \bigcup_{y \in X}\{f(x, y)\}$ と表し、$\theta_Y$ を空間 $Y$ の原点とする。凸錐 $C$ によって以下のようなベクトル（半）順序 $\leq_C$ が導入され、空間 $(Y, \leq_C)$ は半順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2 - y_1 \in C$$

もし、$C$ が pointed ならベクトル順序 $\leq_C$ は反対称的となる。逆に一般の（実）半順序ベクトル空間に対して、その順序と一意に対応する凸錐を構成することができ、その凸錐から生成される半順序が元のベクトル順序と一致することが確かめられる。

さて、Gerth(Tammer) と Weidner は次のようなスカラー化関数を導入した（[7, 9]）。

**補題 2.1 ([7, 9]).** $C$ を閉凸錐とする。ベクトル $k^0 \in C \setminus (-C)$ を選び、写像 $h_{C,k^0} : Y \to [-\infty, \infty]$ を次で定義する。

$$h_{C,k^0}(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in tk^0 - C\}$$

この時、関数 $h_{C,k^0}$ は次の 6 つの性質をもつ。

(i) $\mathrm{dom}h_{C,k^0} := \{y \in Y | h_{C,k^0}(y) < \infty\} \neq \emptyset$ であると同時に、任意の $y \in Y$ に対して $h_{C,k^0}(y) > -\infty$

(ii) $h_{C,k^0}$ は下半連続 (つまり、任意の $t \in R$ に対して、$\{y \in Y | h_{C,k^0}(y) \leq t\}$ が閉集合)

(iii) $h_{C,k^0}$ は劣加法的 (つまり、任意の $y_1, y_2 \in Y$ に対して、$h_{C,k^0}(y_1 + y_2) \leq h_{C,k^0}(y_1) + h_{C,k^0}(y_2)$)

(iv) $h_{C,k^0}$ は $C$-単調 (つまり、$y_1 \leq_K y_2$ なら $h_{C,k^0}(y_1) \leq h_{C,k^0}(y_2)$ )

(v) $\{y \in Y | \varphi(y) \leq t\} = tk^0 - C$

(vi) 任意の $y \in Y$、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $h_{C,k^0}(y + \lambda k^0) = h_{C,k^0}(y) + \lambda$

さらに、もし $k^0 \in \mathrm{int}C$ なら $h_{C,k^0}$ は有限の値をとり、$\{y \in Y | h_{C,k^0}(y) < t\} = tk^0 - \mathrm{int}C$、$y_2 - y_1 \in \mathrm{int}C$ なら $h_{C,k^0}(y_1) < h_{C,k^0}(y_2)$ である。その上、$h_{C,k^0}$ は連続である。

関数 $h_{C,k^0}$ は guage 関数に近い性質を持っていることがわかるので、$h_{C,k^0}$ が $Y$ 上の劣線形関数となって、通常の超平面による 2 つの凸集合の分離定理の "超平面" の代わりに凸錐を直接利用した次のような非凸集合に対する分離定理を Gerth(Tammer) と Weidner が発表した。

**補題 2.2** **([7, 8]).** $Y$ を線形位相空間、$C$ を *solid* な閉凸錐、$A \subset Y$ を $A \cap (-\mathrm{int}C) = \emptyset$ を満たす空でない集合とする。そのとき関数 $h_{C,k^0}$ は有限値をとる連続な関数で、任意の $x \in A$、$y \in \mathrm{int}C$ に対し次の式を満たす。

$$h_{C,k^0}(-y) < 0 \leq h_{C,k^0}(x)$$

さらに、任意の $x \in \mathrm{int}A$ について $h_{C,k^0}(x) > 0$ である。

上の2つの結果は、本論文において重要な役割を果たす。

# 3 主な結果

前述の補題を利用してベクトル均衡点問題に対する Ekeland の変分原理とその Caristi 型不動点定理を述べることにする。従来、ベクトル最適化問題においては、錐が solid に限定して考察されていた。しかし、実 $l_2$ 空間における非負象限による順序錐は内部が空であることから、solid でない例となっている。つまり、無限次元の抽象空間では solid でない場合も普通に起こりうるので、筆者は solid でない場合も重要と考え、定理は錐が solid である場合とそうでない場合の2種類示すことにした。

## 3.1 ベクトル均衡点問題に対する Ekeland の変分原理

**定理 3.1 (type 1; C:solid, $k^0 \in \mathrm{int}C$).** $f : X \times X \to Y$ を2変数ベクトル値関数とし、次の4つの条件を満たすとする。

(i) 任意の $x \in X$ に対し、$f(x, X) \cap (\tilde{y} - \mathrm{int}C) = \emptyset$ を満たすような $\tilde{y} \in Y$ が存在する。

(ii) $\{y \in X | f(x, y) + d(x, y)k^0 \in -C\}$ が任意の $x \in X$ に対して閉集合となる。

(iii) 任意の $t \in X$ に対して $f(t, t) = \theta_Y$ となる。

(iv) 任意の $x, y, z \in X$ に対し $f(x, z) \leq_C f(x, y) + f(y, z)$ が成立する。

その時、任意の $x_0 \in X$ に対し、次の2条件を満たす $\bar{x} \in X$ が存在する。

(1) $f(x_0, \bar{x}) + d(x_0, \bar{x})k^0 \in -C,$

(2) 任意の $x \neq \bar{x}$ について $f(\bar{x}, x) + d(\bar{x}, x)k^0 \notin -C$。

*Proof.* 定理の証明の概要のみ記す。

まず最初に $\inf_{y \in X} h_{C,k^0}(f(x, y))$ は任意の $x \in X$ で下に有界であることを示す。補題 2.2 から、任意の $x \in X$、$y \in \mathrm{int}C$ に対して

$$h_{C,k^0}(-y) < 0 \leq \inf_{z \in (f(x,X) - \tilde{y})} h_{C,k^0}(z) \leq \left[\inf_{y \in X} h_{C,k^0}(f(x, y))\right] + h_{C,k^0}(-\tilde{y})$$

が言える。さらに補題 2.1 の (iii) を使うことにより、次の不等式を得る。

$$-\infty < h_{C,k^0}(-y) - h_{C,k^0}(-\tilde{y}) < \inf_{y\in X} h_{C,k^0}(f(x,y))$$

次に、以下のような集合値写像 $F : X \to 2^X$ を定義する。

$$F(x) := \{y \in X | f(x,y) + d(x,y)k^0 \in -C\}$$

仮定 (ii) から $F(x)$ は任意の $x \in X$ で閉集合で、さらに $F$ は次のような性質を持つ:

(a) $x \in F(x)$ (反射律)

(b) if $y \in F(x)$ then $F(y) \subset F(x)$ (推移律)。

さらに、上記の写像 $F$ を用いて、次のような関数を定義できる。

$$v(x) := \inf_{z\in F(x)} h_{C,k^0}(f(x,z))$$

また関数 $v$ の定義より、次のような評価式を得ることができる。

**(D)** 任意の $x \in X$ に対して $\mathrm{Diam}(F(x)) \leq -2v(x)$

次に $x_0$ から始まる次のようなベクトル列を定義する: $x_{n+1} \in F(x_n)$ を $h_{C,k^0}(f(x_n, x_{n+1})) \leq v(x_n) + 2^{-(n+1)}$ を満たすように選ぶ。これは下限の定義より可能である。定理 3.1 の条件 (iv) と補題 2.1 を使い次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} v(x_{n+1}) &\geq \inf_{y\in F(x_n)} h_{C,k^0}(f(x_{n+1}, y)) \\ &\geq \left(\inf_{y\in F(x_n)} h_{C,k^0}(f(x_n, y))\right) - h_{C,k^0}(f(x_n, x_{n+1})) \\ &= v(x_n) - h_{C,k^0}(f(x_n, x_{n+1})) \end{aligned}$$

さらに

$$-v(x_n) \leq -h_{C,k^0}(f(x_n, x_{n+1})) + 2^{-(n+1)} \leq v(x_{n+1}) - v(x_n) + 2^{-(n+1)}$$

がわかり、(D) と合わせて次の関係式を得る。

$$\mathrm{Diam}(F(x_n)) \leq -2v(x_n) \leq 2 \cdot 2^{-n}$$

上の事実は閉集合の直径の列 $F(x_n)$ が 0 に収束することを意味する。Cantor の定理より

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} F(x_n) = \{\bar{x}\}$$

を得る。$\bar{x}$ は集合 $F(x_0)$ に属するので、結論 (1) がわかる。さらに $\bar{x}$ は任意の $F(x_n)$ に属するので、私たちは $F(\bar{x}) \subset F(x_n)$ から $F(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ を得ることができ、それは結論 (2) を意味する。 □

**定理 3.2 (type 2; C:not solid, $k^0 \in C \setminus \{0\}$).** $f : X \times X \to Y$ を2変数ベクトル値関数とし、$f(X, X) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda k^0\}$ を満たすとする。さらに、関数 $f$ が次の条件を満たすとする。

(i) 任意の $x \in X$ に対し、$f(x, X) \cap (tk^0 - C) = \emptyset$ を満たすような $t \in \mathbb{R}$ が存在する。

(ii) 定理 3.1 の条件 (ii)、(iii)、(iv)

その時、任意の $x_0 \in X$ に対し定理 3.1 と同じ結果が得られる。

**注意 1.** 定理 3.1 と定理 3.2 で $Y = \mathbb{R}$、$C = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ $k^0 = 1 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ とすると、私たちは [4] の定理 2.1 を得る。さらに定理 3.1 と定理 3.2 において、関数 $f$ を $f(x, y) = g(y) - g(x)$ とおくと、[2] の定理 3.1、定理 3.2 をそれぞれ得ることができる (ベクトル値関数における Ekeland の変分原理)。

**注意 2.** 定理 3.1 と定理 3.2 の (i) の条件は2変数ベクトル値関数 $f$ のある種の下への有界性の条件であるが、それは [5] の定理 1 の条件 (iv) より弱い。さらに $C$ が pointed であることは、定理 3.1 と定理 3.2 を証明するのに不要である。

## 3.2 Caristi 型不動点定理

**定理 3.3 (type 1; C:solid, $k^0 \in \mathrm{int}C$).** $f : X \times X \to Y$ を2変数ベクトル値関数とし、定理 3.1 の条件を満たすとする。さらに次の条件を加える。

**(C)** 写像 $T : X \to X$ が $f(Tx, x) + d(Tx, x)k^0 \in -C$ を満たす。

その時 $T$ は不動点をもつ、すなわち $T\hat{x} = \hat{x}$ を満たす $\hat{x} \in X$ が存在する。

*Proof.* 任意の $x \in X$ について $Tx \neq x$ が成立すると仮定する。定理 3.1 を $x_0 \in X$ に適用すると、

$$f(Tx, x) + d(Tx, x)k^0 \notin -C$$

を満たすような $Tx \neq x$ が存在することになり、定理 3.3 の仮定に反する。 □

**定理 3.4 (type 2; C:not solid, $k^0 \in C \setminus \{0\}$).** $f : X \times X \to Y$ を2変数ベクトル値関数とし、$f(X, X) \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda k^0\}$ を満たすとする。さらに、定理 3.2 の条件と定理 3.3 の条件 (C) を満たすとする。その時 $T$ は不動点をもつ。

**注意 3.** 定理 3.3 と定理 3.4 において、関数 $f$ を $f(x, y) = g(y) - g(x)$ とおくと、[2] の定理 4.1、定理 4.2 をそれぞれ得ることができる (ベクトル値関数における Caristi の不動点定理)。

## 4 結論と今後の課題

本論文では、ベクトル均衡点問題に対するEkelandの変分原理についてBianchi, Hassay and Pini[5]より弱い形で得ることができた。本論文は2007年に開かれた非線形解析と凸解析に関する第五回国際会議(NACA2007)で発表した内容であるが、その会議中Wayne州立大学のMordukhovich教授から、このベクトル均衡点問題の摂動解が存在することと関数の定義域の空間の完備性は同値なのか、という質問を受けた。それについてはまだ未解決で、今後の課題である。

## 参考文献


[1] Q. H. Ansari, J. C. Yao, *An existence result for the generalized vector equilibrium problem*, Appl. Math. Lett. **12**, 53–56 (1999).

[2] Y. Araya, *Ekeland's variational principle and its equivalent theorems in vector optimization*, submitted to J. Math. Anal. Appl.

[3] Y. Araya, T. Tanaka, *Existence of vector equilibria via Ekeland's variational principle* , to appear in Taiwanese J. Math.

[4] M. Bianchi, G. Hassay, R. Pini, *Existence of equilibria via Ekeland's principle*, J. Math. Anal. Appl. **305**, 502–512 (2005).

[5] M. Bianchi, G. Hassay, R. Pini, *Ekeland's principle for vector equilibrium problems*, Nonlinear Anal. **66**, 1454–1464 (2007).

[6] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47**, 324–354 (1974).

[7] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. **67** (1990) 297–320.

[8] A. Gopfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zalinescu, *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York 2003.

[9] A. Gopfert, C. Tammer, and C. Zalinescu, *On the vectorial Ekeland's variational principle and minimal points in product spaces*, Nonlinear Anal. **39**, 909–922 (2000).