数理解析研究所講究録
第 1611 巻 2008 年 165-171

Zero points of set-valued operators and fixed point theorems

松下 慎也* (Shin-ya Matsushita) 高橋 渉† (Wataru Takahashi)
* 松江工業高等専門学校 情報工学科
Department of Information Engineering
Matsue National College of Technology
† 東京工業大学 大学院情報理工学研究科
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

E を Banach 空間、C を E のコンパクト凸部分集合とし、$T : C \to 2^{E^*}$ を集合値写像とする。ただし、E^* は E の共役空間とする。$u \in C$ が次の条件を満たすとき、u は T の零点であるという：

$$0 \in Tu \tag{1.1}$$

E が Hilbert 空間のとき、$E = E^*$ となり、任意の $x \in C$ に対して $(T-I)(x)$ を対応させる写像は E から 2^E への集合値写像となる。ただし、I は E における恒等写像である。ここで $u \in C$ が T の不動点であること、つまり $u \in Tu$ であることは $0 \in (T-I)(u)$ と等価であり、零点を見つける問題は不動点問題と密接に関係している。また集合値写像の零点の存在性は、凸最小化問題、変分不等式、均衡問題などの解の存在性と関係があり、これまで様々なアプローチから研究が進められている [1, 2, 3, 13, 14]。

集合値写像の零点の存在性に関して、Cornet [6] は次の定理を証明している：

定理 A K をノルム空間 X のコンパクト凸集合とし、$S : K \to 2^X$ を上半連続な集合値写像とし、任意の $x \in K$ に対して Sx は X の空でない閉凸部分集合とする。このとき、

$$Sx \cap T_K(x) \neq \emptyset \quad (\forall x \in K) \tag{1.2}$$

が成り立つならば、$S^{-1}0 \neq \emptyset$。

*E-mail : matsushita@matsue-ct.ac.jp

ここで $T_C(x) = \mathrm{cl} \cup_{t>0} \frac{1}{t}(K - x)$、cl$D$ は集合 D の閉包、$S^{-1}0 = \{z \in C : 0 \in Sz\}$ である。定理 A に関連のある結果として Fan [8], Caristi [5], Aubin [1, 2], Aubin-Frankowska [3] がある。ここで (1.1) で考えた集合値写像は値域が E^* の部分集合なので条件 (1.2) を直接適用することはできない。

これに対して最近著者達 [11] は次の条件を導入した：

$$Tx \subset (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in C). \tag{1.3}$$

ただし、$N_C(x) = \{x^* : \langle y - x, x^* \rangle \leq 0 \quad (\forall y \in C)\}$、$D^c$ は集合 D の補集合とする。本研究の目的は、コンパクト凸集合上で定義され、値域が E^* の集合となる集合値写像の零点の存在性について研究することである。そこで、第 2 節では準備と条件 (1.3) を満たす具体例を挙げる。また、条件 (1.2) と条件 (1.3) の関係についても言及する。第 3 節ではコンパクト凸集合上で定義された上半連続な集合値写像に対する零点の存在定理を示す。その応用として第 4 節では、Hilbert 空間における集合値写像の不動点定理を示す。さらにその結果を用いて角谷の不動点定理を導出する。

2 準備

E を Banach 空間とし、E^* をその共役空間とする。$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ と表す。C を Banach 空間 E のコンパクト凸部分集合、$T : C \to 2^{E^*}$ を集合値写像　とする。T が $x \in C$ で上半連続であるとは、任意の Tx の近傍 V に対して、ある x の近傍 U が存在して $Ty \subset V \quad (\forall y \in U)$ が成り立つときをいう。T の零点の集合 $\{z \in C : 0 \in Tz\}$ を $T^{-1}0$ とあらわす。

次に、条件 (1.3) を満たす具体例を挙げる。

例 2.1 E から 2^{E^*} への集合値写像 J を

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (\forall x \in E)$$

と定義する。J を E 上の双対写像という．このとき

$$-Jx \subset (N_{B[0]}(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in B[0]).$$

ただし、$B[0] = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ である ([11] 参照)。

例 2.2 C を *Hilbert* 空間 H の閉凸部分集合、$T : C \to C$ とする。T が

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C)$$

を満たすとき非拡大写像という。このとき T の不動点、つまり $Tu = u$ を満たす $u \in C$ が存在すれば

$$(T - I)x \in (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in C). \tag{2.1}$$

証明 (2.1) が成り立たないと仮定する。つまり $(T-I)x_0 \in N_C(x_0) \setminus \{0\}$ となる $x_0 \in C$ が存在する。$(T-I)x_0 \neq 0$ かつ $N_C(x_0)$ の定義より

$$\langle y - x_0, (T-I)x_0 \rangle \leq 0 \quad (\forall y \in C). \tag{2.2}$$

ここで (2.2) が成り立つ事と $P_C T x_0 = x_0$ は同値となる ([13, 14] 参照)。ただし、P_C は H から C の上への距離射影である。このとき $u \in C$ を T の不動点とすると $(T-I)x_0 \neq 0$ と (2.2) から

$$\begin{aligned}
\|x_0 - u\|^2 &= \|P_C T x_0 - T x_0 + T x_0 - u\|^2 \\
&= \|P_C T x_0 - T x_0\|^2 + \langle P_C T x_0 - T x_0, T x_0 - u \rangle + \|T x_0 - u\|^2 \\
&= \|T x_0 - u\|^2 + \langle P_C T x_0 - T x_0, P_C T x_0 - u \rangle - \|P_C T x_0 - T x_0\|^2 \\
&\leq \|T x_0 - u\|^2 - \|P_C T x_0 - T x_0\|^2 \\
&< \|T x_0 - u\|^2 \\
&\leq \|x_0 - u\|^2
\end{aligned}$$

となり矛盾。よって (2.1) が成り立つ。 ■

$(N_C(x) \setminus \{0\})^c$ と $T_C(x)$ との関係については次の結果がある ([11] 参照)。

補助定理 2.1 C を Hilbert 空間 H の凸閉集合とする。このとき

$$T_C(x) \subset (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (\forall x \in C)$$

が成り立つ。

この結果より、条件 (1.2) を満たす一価写像は Hilbert 空間では条件 (1.3) を常に満たすことがわかる。

3 存在定理

この節では，コンパクト凸集合上で定義された上半連続な集合値写像に対する零点の存在定理を得る。以下の結果は主定理を証明するのに必要となる ([12, 13, 14] 参照)。

補助定理 A X を線形位相空間のコンパクト凸集合とし、f を次の *(1),(2),(3)* の条件を満たす $X \times X$ 上の実数値関数とする。

(1) 任意の $y \in X$ に対して、x の関数 $f(x,y)$ は上半連続である*;*

(2) 任意の $x \in X$ に対して、y の関数 $f(x,y)$ は凸関数である*;*

(3) $f(x,x) \leq c$ $(\forall x \in X)$ となる実数 c が存在する.

このとき $f(x_0,y) \leq c$ $(\forall y \in X)$ となるような $x_0 \in X$ が存在する。

次の定理は Kneser [10] によって得られた。

定理 B X を線形空間の凸部分集合、Y を *Hausdorff* 線形位相空間のコンパクト凸部分集合とし、$f : X \times Y \to \mathbb{R}$ を、任意の $x \in X$ に対して、$y \in Y$ の関数 $f(x,y)$ が下半連続な凸関数であり、任意の $y \in Y$ に対して、$x \in X$ の関数 $f(x,y)$ が凹関数であるとする。このとき

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x,y) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y)$$

が成り立つ。

次に主定理を示す。

定理 3.1 C を Banach 空間 E の空でないコンパクト凸集合とし $T : C \to 2^{E^*}$ を上半連続な集合値写像とする。ただし、任意の $x \in C$ に対して Tx は空でないコンパクト凸集合とする。このとき

$$Tx \subset (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (x \in C) \tag{3.1}$$

が成り立つならば $T^{-1}0 \neq \emptyset$ である。

証明の概略 任意の $z \in C$ に対して $0 \notin Tz$ と仮定する。ここで関数 g を

$$g(x,y) = \sup_{x^* \in Tx} \langle x - y, x^* \rangle \quad (\forall (x,y) \in C \times C)$$

と定義する。このとき関数 g は補助定理 A の条件 (1),(2),(3) を満たすことが証明できる。ただし、(3) は $g(x,x) = 0 (\forall x \in C)$ である。したがって補助定理 A より

$$-g(z_0, y) \leq 0 \quad (\forall y \in C)$$

となる $z_0 \in C$ が存在する。g の定義より

$$-\sup_{z^* \in Tz_0} \langle z_0 - y, z^* \rangle \leq 0 \quad (\forall y \in C),$$

したがって

$$\inf_{y \in C} \sup_{z^* \in Tz_0} \langle z_0 - y, z^* \rangle \geq 0$$

が得られる。Kneser の minimax 定理 (定理 B) より

$$\inf_{y \in C} \sup_{z^* \in Tz_0} \langle z_0 - y, z^* \rangle = \sup_{z^* \in Tz_0} \inf_{y \in C} \langle z_0 - y, z^* \rangle.$$

ここで Tz_0 はコンパクト集合であるので $\inf_{y \in C} \langle z_0 - y, \hat{z}^* \rangle \geq 0$、つまり

$$\langle z_0 - y, \hat{z}^* \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in C)$$

を満たす $\hat{z}^* \in Tz_0$ が存在する。$N_C(z_0)$ の定義より $\hat{z}^* \in N_C(z_0)$ となる。一方 T は条件 (3.1) を満たす。つまり $Tz_0 \subset (N_C(z_0) \setminus \{0\})^c$ であるので $\hat{z}^* = 0$ となり矛盾。よって $T^{-1}0 \neq \emptyset$。

■

4 応用

この節では、まず定理 3.1 を用いて Hilbert 空間における集合値写像の不動点定理を得る。さらにその結果を用いて角谷の不動点定理を証明する。

定理 4.1 C を Hilbert 空間 H のコンパクト凸集合、$S : C \to 2^H$ を上半連続な集合値写像で任意の $x \in C$ に対して Sx を空でないコンパクト凸集合とする。このとき

$$Sx \subset x + (N_C(x) \setminus \{0\})^c \quad (x \in C) \tag{4.1}$$

が成り立つとき

$$x_0 \in Sx_0.$$

を満たす $x_0 \in C$ が存在する。

証明の概略 任意の $x \in C$ に対して集合値写像を

$$Tx = Sx - x$$

と定義する。このとき T は上半連続な集合値写像となる。実際、Tx の任意の近傍 V に対して、$Tx = Sx - x \in V$ より、$Sx \in x + V$ となる。$x + V$ は Sx の近傍であり、S は上半連続なので x の近傍 U が存在して、$Sy \in x + V(\forall x \in U)$ となる。よって $Tx = Sx - x \in V(\forall x \in U)$ となり、T が上半連続であることがわかる。また、任意の $x \in C$ に対して S の定義から Sx は空でないコンパクト凸集合であるから、Tx は空でないコンパクト凸集合となる。

S の条件 (4.1) から任意の $x \in C$ に対して

$$Tx = Sx - x \subset (N_C(x) \setminus \{0\})^c$$

となる。したがって定理 3.1 より $0 \in Tx_0$ となる $x_0 \in C$ が存在する。すなわち $x_0 \in Sx_0$。

■

定理 4.1 と補助定理 2.1 より Hilbert 空間での角谷の不動点定理 [9] が証明できる (Fan [7] と Browder [4] を参照)。

定理 4.2 (角谷 [9]) C を Hilbert 空間 H のコンパクト凸集合とし $S : C \to 2^C$ を上半連続な集合値写像とし任意の $x \in C$ に対して Sx は空でない閉凸集合とする。このとき

$$x_0 \in Sx_0.$$

となる $x_0 \in C$ が存在する。

証明の概略 T_C の定義より任意の $x \in C$ に対して $C - x \subset T_C(x)$ となる。よって任意の $x \in C$ に対して $C \subset x + T_C(x)$。補助定理 2.1 より任意の $x \in C$

に対して

$$
\begin{aligned}
Sx &\subset C \\
&\subset x + T_C(x) \\
&\subset x + (N_C(x) \setminus \{0\})^c.
\end{aligned}
$$

定理 4.1 より $x_0 \in Sx_0$ を満たす $x_0 \in C$ が存在する。

■

参考文献

[1] J.-P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland Publishing, Amsterdam-New York, 1979.

[2] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[3] J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[4] F. E. Browder, *The fixed point of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann. **177** (1968), 283–301.

[5] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976) 241-51.

[6] B. Cornet, *Paris avec handicaps ct theèorremes de surjectivité de correspondances*, C. R. Acad. Sc. Paris Sér A **281** (1975) 479-482.

[7] K. Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **38** (1952), 121–126.

[8] K. Fan, *A minimax inequality and applications*, Inequalities, III (Proc. Third Sympos., Univ. California, Los Angeles, Calif., 1969), Academic Press, New York, 1972 103-113.

[9] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8** (1941), 457–459.

[10] H. Kneser, *Sur un theéoréme fondamental de la théorie des jeux*, C. R. Acad. Sci. Paris, **234** (1952), 2418-2420.

[11] S. Matsushita and W. Takahashi, *Existence theorems for set-valued operators in Banach spaces*, Set-Valued Anal. **15** (2007), 251-264.

[12] W. Takahashi, *Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities*, J. Optim. Theory Appl. **24** (1978), 499–506.

[13] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[14] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama-Publishers, 2000.