

## 表現空間への等変写像の分類とその例

京都産業大学理学部 牛瀧文宏 (Fumihito Ushitaki)  
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

### 1 はじめに

この小論を通して特に断らない限り、 $G$  は有限群を表し、写像といえば連続写像を意味するものとする。

いま、 $X$  と  $Y$  を  $G$ -空間とする。この小論では  $G$ -同変写像  $\varphi : X \rightarrow Y$  にさらに条件をつけた  $G$ -等変写像と呼ばれるものを考察の対象とする。 $G$ -同変写像  $\varphi : X \rightarrow Y$  に対しては、 $x \in X$  と  $\varphi(x) \in Y$  のアイソトロピー部分群の間に  $G_x \subset G_{\varphi(x)}$  なる関係が常に成り立つが、任意の  $x \in X$  に対して、 $G_x = G_{\varphi(x)}$  なる関係を常に成り立たせるような  $G$ -同変写像が  $G$ -等変写像 ( $G$ -isovariant map) である。この定義は、「 $X$  の同じ  $G$ -軌道上の二点  $x_1, x_2$  について、 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  が成り立つならば、 $x_1 = x_2$  が成り立つ」という条件と同値である。

2つの  $G$ -等変写像  $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$  が  $G$ -ホモトピックであるとする。 $\varphi$  から  $\psi$  への  $G$ -ホモトピー  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  が  $G$ -等変写像であるとき、 $F$  を  $\varphi$  から  $\psi$  への  $G$ -等変ホモトピーといい、 $\varphi$  と  $\psi$  とは  $G$ -等変ホモトピックであるという。また、 $G$ -等変写像の全体を  $G$ -等変ホモトピックで分類した時の同値類の集合を  $G$ -等変ホモトピー類といい  $[X, Y]_G^{\text{isov}}$  と表す。

この小論は、京都府立医科大学大学院の長崎教授との共同研究中の内容に関するものの中からの紹介であり、これまで我々は  $X$  が自由な  $G$ -作用を持つ多様体  $M$  で、 $Y$  が  $G$ -表現球面  $SW$  の場合に、それらの間の  $G$ -等変写像を  $G$ -等変ホモトピーの意味で分類することを問題としてきた。すなわち  $M$  から  $SW$  への  $G$ -等変写像の  $G$ -等変ホモトピー類  $[M, SW]_G^{\text{isov}}$  の決定問題である。本稿では、これまでの研究を振り返ってみると共に、このたび新しく考察した例について述べることを目的とする。本誌に掲載されている長崎教授の研究報告と併せてご覧いただければ、本研究の動機や全体像をより一層把握いただけると考える。

## 2 等変写像の分類問題の概要

$G$ -等変ホモトピー類  $[M, SW]_G^{\text{iso}}$  を話題にするに際して、これから先では特に断らない限り  $M$  と  $SW$  は前節で取り上げたものを表しているとする。

$M$  から  $SW$  への  $G$ -等変写像の分類問題を議論するためには、その前提として存在問題があることは言うまでもない。この件については、次の結果を既に得ている。定理 2.1 中の  $SW^{>1}$  は  $G$  の  $SW$  への作用の特異集合と呼ばれるもので、 $SW^{>1} = \bigcup_{\{1\} \neq H \leq G} SW^H$  と定義される。

**定理 2.1** ([4, 6]).  $G$  を有限群、 $M$  を自由  $G$ -作用をもつ  $m$ -次元弧状連結  $C^\infty$  閉多様体  $W$  を  $G$  の忠実なユニタリー表現とする。不等式

$$\dim M + 1 \leq \dim SW - \dim SW^{>1} \quad (1)$$

がなりたてば、 $M$  から  $G$ -表現球面  $SW$  への  $G$ -等変写像  $f: M \rightarrow SW$  が存在する。ただし、 $SW^{>1} = \emptyset$  の場合は  $\dim SW^{>1} = -1$  とおく。□

尚、この存在定理の研究は、Borsuk-Ulam 型定理の等変写像版の一つといえる次の A. G. Wasserman の結果と関連している。一言でいえば定理 2.1 はこの逆問題であり、それはいわゆる「Borsuk-Ulam 型不等式」の下での等変写像の存在定理である\*。

**命題 2.2** ([11] 等変 Borsuk-Ulam 定理).  $G$  を有限可解群とする。  $V, W$  を  $G$ -表現とする。  $G$ -等変写像  $f: V \rightarrow W$  が存在すれば、

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つ。

話題を等変写像の分類問題に戻そう。存在定理と関係して我々が研究を進めているのは、Borsuk-Ulam 型不等式 (1) の元での  $G$ -等変写像の分類問題である。これについては不等式 (1) で、不等号がストリクトに成立している場合と等号が成立している場合に分けて議論するのが妥当である。ここで以後、 $d = \dim SW - \dim SW^{>1}$  とおく。前者の場合は次のようになる。

**定理 2.3** ([3, 4, 6]). 定理 2.1 の条件の下、 $\dim M < d - 1$  が成り立てば、 $M$  から  $SW$  への任意の  $G$ -等変写像は  $G$ -等変ホモトピー同値である。□

\*このような、群作用を持つ空間の間の同変写像や等変写像の存在から、群の作用する空間の次元に関する様々な不等式を導く形の定理を一般に Borsuk-Ulam 型定理と呼ぶ。これに関連し、Borsuk-Ulam 型定理やその逆の形の定理に現れる空間の次元に関する様々な不等式を、我々は Borsuk-Ulam 型不等式と呼ぶ。

同変障害理論と結びつけることで、分類問題を捉えなければならぬのは  $\dim M = d - 1$  の場合である。我々が研究を進めているのはこの場合であって、 $M$  が向き付け可能で、 $G$  の  $M$  への作用が向きを保つ場合について、[3], [5],[6] で研究されている。それによると

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{H \in \text{Iso}(W) \mid \dim SW^H = \dim SW^{>1}\} \\ \mathcal{A}/G &= \{(H) \mid H \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

とおくとき、 $[M, SW]_G^{\text{iso}}$  から  $\mathcal{A}/G$  にインデックスをもつ有理整数環の直和への全単射が構成される。これは、Hopf 型定理の等変版ともいえるものの研究であって、目下の進捗については、本誌掲載の長崎氏の研究報告に記されている。なお、上記の文献のうち [5] は  $G$  が有限巡回群の場合を、残りの文献は一般の場合を議論している。結果としては、前者の場合は後者に含まれて述べられるが、証明法としては必ずしもそうではない。詳細は [5] に譲るが、この全単射を構成するに当たり、障害類となる同変コホモロジーに値を持つ多重写像度と呼ばれるものを定義するが、その定義に際して有限巡回群の場合には付加的考察を必要とする。すなわち  $G$  が有限巡回群の場合に限り  $M$  として 1 次元多様体をとることが出来、このことが証明上の一つの困難を与えるのである。

ここで、上述の多重写像度について手短かに述べ、我々の分類定理を紹介したい<sup>†</sup>。  $SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$  とおくとき、我々の設定では、 $M$  への  $G$ -作用は自由であるから、 $[M, SW]_G^{\text{iso}} = [M, SW_{\text{free}}]_G$  が成り立っている。したがって、多重写像度は  $M$  から  $SW_{\text{free}}$  への同変写像に対して定義される。次の定義の中の  $c$  および  $\Psi$  の定義はすぐ下で述べるとして、先に多重写像度の定義を書くと次のようになる。

**定義 2.4.**  $G$  を有限群、 $M$  を向き付け可能な  $d - 1$  次元弧状連結閉  $G$ -多様体で、 $G$ -作用は自由かつ向きを保っているとする。 $W$  を忠実なユニタリー  $G$ -表現、 $f : M \rightarrow SW_{\text{free}}$  を  $G$ -写像とする。このとき、 $f$  の多重写像度  $\text{mDeg } f$  を

$$\text{mDeg } f = c \circ \Psi^G(f_*([M])) \in \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} \mathbb{Z}.$$

で定める。ただし、 $f_* : H_{d-1}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{d-1}(SW_{\text{free}}; \mathbb{Z})$  は  $f$  から誘導された準同型写像であり、 $[M]$  は  $M$  の基本類である。

<sup>†</sup>多重写像度は [2] において最初に導入された。

ここで定義 2.4 中に登場する  $c$  と  $\Psi$  について説明したい。証明については [6] を参照されたい。群  $G$  の部分群  $H$  に対して、その正規化群を  $NH$  と表すとき、 $\mathbb{Z}[G]$ -準同型

$$\Psi : H_{d-1}(SW_{\text{free}}; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} H_{d-1}(S(W^H)^\perp; \mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} \mathbb{Z}[G/NH]$$

は  $S(W^H)^\perp$  の基本類  $[S(W^H)^\perp]$  に対して  $\Psi([S(W^H)^\perp]) = 1 \cdot NH$  から定義されるものであって、 $\mathbb{Z}[G]$ -加群の間の  $\mathbb{Z}[G]$ -同型写像となる。 $M$  上の  $G$ -作用は向きを保つので、 $H_{d-1}(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  上に誘導された  $G$ -作用は自明である。よって  $f_*([M]) \in H_{d-1}(SW_{\text{free}}; \mathbb{Z})^G$  となることがわかる。また  $\sigma_H := \sum_{\bar{a} \in G/NH} \bar{a}$  とおくと、

$$\mathbb{Z}[G/NH]^G = \mathbb{Z} \cdot \sigma_H \cong \mathbb{Z},$$

となって、この対応から誘導される  $\mathbb{Z}[G]$ -同型写像が

$$c : \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} \mathbb{Z}[G/NH]^G \rightarrow \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$$

である。

ここで多重写像度に関する我々の結果を述べる。証明は [6] に記載されているが、その中心的手法は [7] にある同変障害理論である。

**定理 2.5 (Hopf 型定理).** 定義 2.4 の設定のもと、次が成り立つ。

- (1).  $\text{mDeg} : [M, SW_{\text{free}}]_G \rightarrow \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$  は単射である。
- (2). 任意の 2 つの  $G$ -写像  $f, g : M \rightarrow SW_{\text{free}}$  に対して、

$$\text{mDeg } f - \text{mDeg } g \in \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} |NH| \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

- (3).  $G$ -写像  $f_0 : M \rightarrow SW_{\text{free}}$  を一つ固定する。このとき、任意の  $a \in \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} |NH| \mathbb{Z}$  に対して、ある  $G$ -写像  $f : M \rightarrow SW_{\text{free}}$  が存在して、

$$\text{mDeg } f - \text{mDeg } f_0 = a.$$

を満たす。

この結果をもとに、分類問題の解決としての等変 Hopf 定理を述べたい。まず  $[M, SW]_G^{\text{isov}} = [M, SW_{\text{free}}]_G$  であることに着目して、これまで  $G$ -同変写像  $f: M \rightarrow SW_{\text{free}}$  として考えていたものを  $G$ -等変写像  $f: M \rightarrow SW$  として位置づける。  $\text{mDeg } f = (d_H(f)) \in \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$ . とおくと、

$$\text{mD}_{f_0}(f) = ((d_H(f) - d_H(f_0))/|NH|) \in \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} \mathbb{Z}.$$

と定めれば、定理 2.5 より次が得られる。

**系 2.6 (等変 Hopf 定理).**  $G$ -等変写像  $f_0: M \rightarrow SW$  を一つとり固定する。このとき、  $\text{mD}_{f_0}: [M, SW]_G^{\text{isov}} \rightarrow \bigoplus_{(H) \in \mathcal{A}/G} \mathbb{Z}$  は全単射である。

### 3 メタサイクリック群が作用している場合

我々の分類理論を実際に適応する対象の構成も必要である。[5] は作用する群が有限巡回群の場合であり、ここでは具体的に与えた  $M$  と  $SW$  の場合にその間の等変写像を構成し、それらの多重写像度を計算した。有限巡回群以外の具体的な群に対する等変写像の分類に関しては、[8],[9] および [10] において  $G$  が四元数群  $Q_8$  および一般四元数群  $Q_{2n}$  の場合を考察した。それに引き続き、本稿では  $G$  がメタサイクリック群の場合を考察する。(一般) 四元数群についての上記の考察では有理整数環の 2 個以上の直和に障害類を持つ例が構成されておらず、多重 写像度が真に利用されているとは言い難い状況であった。しかし本稿で考察するメタサイクリック群の作用は、そこをクリアするものである。

**例 3.1.**  $p$  と  $q$  を異なる奇素数で  $p-1$  は  $q$  で割り切れるものとする。  $Z_{p,q}$  を

$$\langle a, b \mid a^p = b^q = 1, bab^{-1} = a^r \rangle$$

で定義される群とする。ただし、 $r$  は  $r > 1$  と  $r^q \equiv 1 \pmod{p}$  を満たす自然数とする。この群の定義には  $r$  という自然数が含まれているが、群  $Z_{p,q}$  は  $p$  と  $q$  を定めれば、どのように  $r$  を定めてもすべて同型になる。実際、

$$Z_{p,q}^r = \langle a, b \mid a^p = b^q = 1, bab^{-1} = a^r \rangle$$

$$Z_{p,q}^{r'} = \langle a', b' \mid a'^p = b'^q = 1, b'a'b'^{-1} = a'^{r'} \rangle$$

とおき、 $\alpha$  を  $r'^\alpha \equiv r \pmod{p}$  を満たす整数とする。このような整数  $\alpha$  の存在は  $r$  の定義と  $q$  が素数であることよりわかる。今、準同型写像  $\varphi: Z_{p,q}^r \rightarrow Z_{p,q}^{r'}$  を

$$\varphi(a) = a', \quad \varphi(b) = b'^\alpha$$

から定義すると、これが群の同型写像となる。

ここで、 $Z_{p,q}$ -表現空間を定義する。準同型写像  $\rho: Z_{p,q} \rightarrow U(q)$  を

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{p} & & & & O \\ & \exp \frac{2\pi r\sqrt{-1}}{p} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \exp \frac{2\pi r^{q-1}\sqrt{-1}}{p} & \\ O & & & & \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

で定まる  $Z_{p,q}$  のユニタリー表現、その表現空間を  $R$  とする。また、準同型写像  $\tau: Z_{p,q} \rightarrow U(1)$  を

$$\tau(a) = 1, \quad \tau(b) = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{q}.$$

で定まる  $Z_{p,q}$  のユニタリー表現、その表現空間を  $T$  とする。このとき、 $(\rho, R)$  と  $(\tau, T)$  は、いずれも規約表現である。

$Z_{p,q}$  の真の部分群はすべて巡回群であるから、[1] により、この群は  $(2q-1)$ -次元球面  $S^{2q-1}$  に自由に作用することができる。 $S^{2q-1}$  にこのような自由作用を一つ考え、 $SW = S(T \oplus R)$  とおくと、

$$[S^{2q-1}, SW]_{Z_{p,q}}^{\text{isov}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

このことを順を追って証明しよう。まず、 $Z_{p,q}$  の部分群について整理する。自明でない部分群としては、正規部分群として  $\langle a \rangle (\cong C_p)$  があり、他には  $\langle b \rangle, \langle ab \rangle, \langle a^2b \rangle, \dots, \langle a^{p-1}b \rangle$  という互いに共役で  $C_q$  に同型な  $p$  個の部分群がある。

続いて部分群の共役類ごとに不動点集合を考えよう。 $T$  の方に関しては、

$$T^{\{1\}} = T, \quad T^{\langle a \rangle} = T, \quad T^{\langle b \rangle} = \{O\}, \quad T^{Z_{p,q}} = \{O\}$$

が成り立ち、 $R$  の方に関しては、

$$R^{\{1\}} = R, \quad R^{\langle a \rangle} = \{O\}, \quad R^{\langle b \rangle} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{C} \right\}, \quad R^{Z_{p,q}} = \{O\}$$

である。

以上をもとに  $A/G$  を考える。上の不動点集合に関する考察より、 $\text{Iso}(W)$  は  $Z_{p,q}$  の部分群全体と一致することがわかる。表現球面を考えるので  $\dim SW^{>1} = 1$  であって、

$$\dim S^{2q-1} + 1 = 2q = (2q + 1) - 1 = \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成立する。また、 $\mathcal{A} = \{\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle ab \rangle, \dots, \langle a^{p-1}b \rangle\}$  より

$$A/G = \{(\langle a \rangle), (\langle b \rangle)\}$$

が成り立つ。よって、系 2.6 より  $[S^{2q-1}, SW]_{Z_{p,q}}^{\text{isov}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  が得られる。

**注意 3.2.** 例 3.1 で考えた  $S^{2q-1}$  上の自由作用は線型ではない ([12])。裏事情を語ると、球面への線型作用を持つようなメタサイクリック群で例を構成しようとしたところ、 $\bigoplus_{(H) \in A/G} \mathbb{Z}$  を構成する  $\mathbb{Z}$  の直和因子の個数は高々1個であった。また、[8],[9],[10] などでは(一般)四元数群の場合に等変ホモトピー類を考察したが、(一般)四元数群はやはり球面への線型作用を持つ群であり、これらの場合にも  $\bigoplus_{(H) \in A/G} \mathbb{Z}$  を構成する  $\mathbb{Z}$  の因子個数は高々1個であった。

一方 [5] では、有限巡回群作用の場合に、 $M$  上の作用は線型でありながら、2個の  $\mathbb{Z}$  の直和因子を持つ例を構成した。等変写像は線型ではないが、作用が線型であるから具体的な等変写像と等変ホモトピー類が構成可能であった。

多重写像度が真に力を発揮するのは、 $\bigoplus_{(H) \in A/G} \mathbb{Z}$  において  $\mathbb{Z}$  の因子個数が2つ以上の場合であり、具体的な写像の構成が(私にとって)守備範囲にあるのは  $M$  が線型作用を持つ場合である。従って、巡回群以外の作用の場合、これら両方の条件を満たすような作用の有無が、一つの興味の対象である。

## 参考文献

- [1] I. Madsen, C. B. Thomas and C. T. C. Wall, *Topological spherical space form problem. III. Dimensional bounds and smoothing* Pacific J. Math. **106** (1983), no. 1, 135–143.

- [2] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743–757.
- [3] I. Nagasaki, *Classifications of isovariant homotopy classes under a Borsuk-Ulam type inequality*, Proceedings of 34th Symposium on Transformation Groups, ed. by T.Kawakami, Wing Co. Ltd. (2007), 97-102.
- [4] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *On existence of isovariant maps under Borsuk-Ulam type inequalities*, 数理解析研究所講究録, **1569** (2007), 28-34.
- [5] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free  $C_n$ -manifolds to representation spheres*, Topology Appl., **155** (2008), 1006-1076.
- [6] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Classification of isovariant maps from free  $G$ -manifolds to representation spheres*, in preparation.
- [7] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.
- [8] F. Ushitaki, *Isovariant maps and Borsuk-Ulam type Theorems*, Proceedings of 33th Symposium on Transformation Groups, ed. by T.Kawakami, Wing Co. Ltd. (2007), 84-93.
- [9] F. Ushitaki, *Isovariant homotopy classes from free  $Q_{2n}$ -manifolds to representation spheres*, Proceedings of 34th Symposium on Transformation Groups, ed. by T.Kawakami, Wing Co. Ltd. (2007), 76-79.
- [10] F. Ushitaki, 一般四元数群が自由に作用する3次元多様体から表現球面への等変写像の分類, 数理解析研究所講究録, **1575** (2008), 88-95.
- [11] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991), 155–161.
- [12] J. A. Wolf, *Spaces of Constant Curvature (5th edition)*, Publish or Perish, (1984)